Solutions TD N 4

Solution Exercice 1

1. On a $\lim_{x\to 5} x^2 - 11x + 28 = -2$ et $\lim_{x\to 5} x^2 - 25 = 0$. Il faut faire attention au signe du dénominateur. Pour $x > 5$, on a $x^2 > 25$ et donc $\lim_{x\to 5^+} x^2 - 25 = 0^+$. On en déduit que

$$\lim_{x\to 5^+} \frac{x^2 - 11x + 28}{x^2 - 25} = -\infty.$$

2. On procède de la même façon, mais on remarque que $\lim_{x\to 5^-} x^2 - 25 = 0^-$. On a cette fois

$$\lim_{x\to 5^-} \frac{x^2 - 11x + 28}{x^2 - 25} = +\infty.$$

3. On a $\lim_{x\to 5} x^2-9x+20 = 0$, et donc on est en présence d'une forme indéterminée 0/0. On va lever cette forme indéterminée en factorisant le numérateur et le dénominateur par la racine commune. En effet, on a d'une part

$$x^2 - 25 = (x-5)(x+5)$$

et d'autre part

$$x^2 - 9x + 20 = (x-5)(x-4).$$

On peut donc écrire que

$$\frac{x^2 - 9x + 16}{x^2 - 25} = \frac{(x-5)(x-4)}{(x-5)(x+5)} = \frac{x-4}{x+5}.$$

On n'est plus en présence d'une forme indéterminée, car

$$\lim_{x\to 5} x - 4 = 1 \text{ et } \lim_{x\to 5} x + 5 = 10.$$

On en déduit que

$$\lim_{x\to 5} \frac{x^2 - 9x + 16}{x^2 - 25} = \frac{1}{10}.$$

Il n'y a plus besoin ici de distinguer limite à droite et limite à gauche.

Solution Exercice 2

Dans chaque cas, on va multiplier par la quantité conjuguée. 1.

$$\begin{aligned}
\sqrt{x+4} - \sqrt{x-4} &= \frac{(\sqrt{x+4} - \sqrt{x-4})(\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4})}{\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4}} \\
&= \frac{(x+4) - (x-4)}{\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4}} \\
&= \frac{8}{\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4}}.
\end{aligned}$$

Le dénominateur tend vers $+\infty$ (ce n'est pas une forme indéterminée) et donc on a

$$\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x+4} - \sqrt{x-4} = 0.$$

2.

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2-1}-x &= \frac{(\sqrt{x^2-1}-x)(\sqrt{x^2-1}+x)}{\sqrt{x^2-1}+x} \\ &= \frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}.\end{aligned}$$

Le dénominateur tend vers $+\infty$, et donc on a

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-1}-x=0.$$

Solution Exercice 3

Dans le premier cas, on a une forme indéterminée du type $+\infty-\infty$, et dans les trois autres cas, on a une forme indéterminée du type $\frac{\infty}{\infty}$. On lève souvent ces formes indéterminées en mettant en facteur le terme dominant.

1. On met en facteur e^{2x}. Il vient :

$$e^{2x}-e^x=e^{2x}\left(1-\frac{e^x}{e^{2x}}\right)=e^{2x}(1-e^{-x}).$$

Or, $\lim_{x\to+\infty}e^{2x}=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}1-e^{-x}=1$ donc

$$\lim_{x\to+\infty}e^{2x}-e^x=+\infty.$$

2. On met en facteur e^{2x} au numérateur, et x au dénominateur. On a

$$\frac{e^{2x}+1}{x+3}=\frac{e^{2x}}{x}\times\frac{1+e^{-2x}}{1+\frac{3}{x}}.$$

Or,

$$\lim_{x\to+\infty}1+e^{-2x}=1,\ \lim_{x\to+\infty}1+\frac{3}{x}=1 \text{ donc } \lim_{x\to+\infty}\frac{1+e^{-2x}}{1+\frac{3}{x}}=1.$$

D'autre part, par croissance comparée, on a

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{x}=+\infty.$$

Finalement, on conclut par produit de limites que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}+1}{x+3}=+\infty.$$

3. On met en facteur xe^x au numérateur, et e^x au dénominateur. Il vient :

$$\frac{xe^x+2e^x-5}{e^x-3}=\frac{xe^x}{e^x}\times\frac{1+\frac{2}{x}-\frac{5}{xe^x}}{1-3e^{-x}}=x\times\frac{1+\frac{2}{x}-\frac{5}{xe^x}}{1-3e^{-x}}.$$

Or, puisque $\lim_{x\to+\infty} xe^x = +\infty$ (ce n'est pas une forme indéterminée!), puisque $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, il vient

$$\lim_{x\to+\infty} 1+\frac{2}{x}-\frac{5}{xe^x} = 1,\ \lim_{x\to+\infty} 1-3e^{-x} = 1 \text{ donc } \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{2}{x}-\frac{5}{xe^x}}{1-3e^{-x}} = 1.$$

On en déduit par produit de limites que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{xe^x+2e^x-5}{e^x-3} = +\infty.$$

4. On met en facteur x^2 au numérateur et au dénominateur. On trouve

$$\frac{x^2+x\sin x}{x^2+x\cos x} = \frac{x^2}{x^2}\times\frac{1+\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\cos x}{x}} = \frac{1+\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\cos x}{x}}.$$

Puisque $-1\leq \sin x\leq 1$, on a pour tout $x>0$,

$$\frac{-1}{x}\leq\frac{\sin x}{x}\leq\frac{1}{x}$$

et donc par le théorème des gendarmes $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x} = 0$. On prouve de la même façon que $\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x} = 0$. On a donc

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x\sin x}{x^2+x\cos x} = \frac{1}{1} = 1.$$

<u>**Solution Exercice 4**</u>

1. On écrit

$$\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2} = \frac{1}{1-x}\left(1-\frac{2}{1+x}\right) = \frac{x-1}{(1-x)(1+x)} = \frac{-1}{1+x}.$$

On a levé l'indéterminée, et la limite recherchée vaut donc $-1/2$.

2. L'astuce est de remarquer que $x-1 = (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)$ pour pouvoir simplifier numérateur et dénominateur. On trouve donc

$$\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

et la limite recherchée vaut donc $1/2$.

3. On met en facteur le terme dominant au numérateur (x^3) et au dénominateur ($5x^3$). Après simplification, on trouve :

$$\frac{x^3+x+5}{5x^3+7x^2+8} = \frac{1}{5}\times\frac{1+\frac{1}{x^2}+\frac{5}{x^2}}{1+\frac{7}{5x}+\frac{8}{5x^3}}$$

est la limite recherchée est $1/5$.

4. On utilise la quantité conjuguée :

$$\sqrt{x^2+2x}-x = \frac{x^2+2x-x^2}{\sqrt{x^2+2x}+x} = \frac{2x}{x\sqrt{1+2/x}+x} = \frac{2}{\sqrt{1+2/x}+1}.$$

La limite recherchée est égale à $2/2 = 1$.

5. On utilise le changement de variables $u = x^2$. Il vient

$$\lim_{x\to+\infty} x^5 e^{-x^2} = \lim_{u\to+\infty} u^{5/2} e^{-u}.$$

Par comparaison de la fonction exponentielle et des fonctions puissance, cette limite vaut 0. 6. On met en facteur le terme dominant :

$$\frac{x+\cos x}{x+\sin x} = \frac{x\left(1+\frac{\cos x}{x}\right)}{x\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)} = \frac{1+\frac{\cos x}{x}}{1+\frac{\sin x}{x}}.$$

Mais on a

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

et donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$. De même, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$. On en déduit que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\cos x}{x+\sin x} = 1.$$

7. On met de même en facteur le terme dominant au numérateur et au dénominateur :

$$\frac{x\ln x + 7}{x^2+4} = \frac{x\ln x\left(1+\frac{7}{x\ln x}\right)}{x^2\left(1+\frac{4}{x^2}\right)} = \frac{\ln x}{x} \times \frac{1+\frac{7}{x\ln x}}{1+\frac{4}{x^2}}.$$

Or, on sait que $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. On en déduit que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\ln x+7}{x^2+4} = 0.$$

8. On va majorer et conclure par le théorème des gendarmes : pour $x > 0$,

$$\left|\frac{4\sin^2 x + 3\cos(5x)}{x}\right| \leq \frac{4\sin^2 x + 3|\cos(5x)|}{x} \leq \frac{7}{x}.$$

Par majoration, la limite recherchée est 0.

<u>Solution Exercice 5</u>

Fixons $\epsilon > 0$. On doit trouver $\delta > 0$ tel que, si $|x-1| < \delta$, alors $|x^3 - 1| < \epsilon$ (car évidemment la limite est 1). On peut toujours supposer que $\epsilon \leq 1$ car si on a trouvé un δ pour $\epsilon = 1$, le même δ va fonctionner pour tout $\epsilon \geq 1$. Procédons par analyse-synthèse. Soit $\delta > 0$ tel que $|x-1| < \delta$. Alors $1-\delta \leq x \leq 1+\delta$ soit, en passant au cube (la fonction x^3 est croissante)

$$1 - 3\delta + 3\delta^2 - \delta^3 \leq x^3 \leq 1 + 3\delta + 3\delta^2 + \delta^3.$$

Ceci entraîne que

$$-3\delta + 3\delta^2 - \delta^3 \leq x^3 - 1 \leq 3\delta + 3\delta^2 + \delta^3.$$

Il suffit donc de choisir $\delta \in]0,1]$ tel que

$$-3\delta + 3\delta^2 - \delta^3 \geq -\epsilon$$

et
$$3\delta + 3\delta^2 + \delta^3 \leq \epsilon.$$
Supposons que $\delta \leq c\epsilon$, avec $c > 0$ une constante à déterminer. Alors

$$3\delta + 3\delta^2 + \delta^3 = 3c\epsilon + 9c^2\epsilon^2 + c^3\epsilon^3 \leq (3c + 9c^2 + c^3)\epsilon$$

puisque $\epsilon \leq 1$, et

$$-3\delta + 3\delta^2 - \delta^3 \geq -3\delta - 3\delta^2 - \delta^2 \geq -(3c + 9c^2 + c^3)\epsilon$$

en suivant exactement le même calcul. Il suffit donc de trouver un réel $c > 0$ tel que $3c + 9c^2 + c^3 \leq 1$. Par exemple, $c = 1/100$ convient (c'est loin d'être le meilleur!). Faisons la synthèse. Pour $\epsilon \in]0, 1]$, on a prouvé que, si $\delta = \epsilon/100$, alors
$$|x - 1| \leq \delta \implies |x^3 - 1| \leq \epsilon.$$
Ceci prouve bien que la limite de x^3 en 1 est égale à 1.

Solution Exercice 6

D'abord, g est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{-1, 0, 1\}$ comme inverse d'une fonction continue dont le dénominateur ne s'annule pas. Etudions ensuite la continuité de g en 0. Puisque $\lim_{x\to0} \ln|x| = -\infty$, on a

$$\lim_{x\to0} g(x) = \lim_{X\to-\infty} \frac{1}{X} = 0 = g(0).$$

La fonction g est continue en 0. Ensuite, puisque $\lim_{x\to1^+} \ln|x| = 0^+$, on a

$$\lim_{x\to1^+} g(x) = \lim_{X\to0^+} \frac{1}{X} = +\infty \neq g(1).$$

La fonction g n'est pas continue en 1. De même, on prouve que g n'est pas continue en -1.

Solution Exercice 7

1. La fonction est clairement continue sur $]1; +\infty[$ et sur $]-\infty; 1[$. Pour que f soit continue, il faut et il suffit que f admette une limite à droite et à gauche en 1 et que ces limites coïncident. Mais on a

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = a\sin(\pi/2) = a \text{ tandis que } \lim_{x\to1^-} f(x) = a^2.$$

La fonction f est donc continue en 1 si et seulement si $a^2 = a$ c'est-à-dire si et seulement si $a = 1$ ou $a = 0$. 2. On fait la même chose, mais on doit étudier cette fois la continuité à droite et à gauche en 0 et en 1, la fonction g étant clairement continue sur $]-\infty; 0[$, sur $]0; 1[$ et sur $]1; +\infty[$. On a d'une part

$$\lim_{x\to0^-} g(x) = 1 \text{ et } \lim_{x\to0^+} g(x) = \alpha + \beta.$$

D'autre part, on a

$$\lim_{x\to1^-} g(x) = \alpha e^{-1} + \beta e^1 + \gamma(e^1 - e^{-1}) \text{ et } \lim_{x\to1^+} g(x) = e^1.$$

La fonction g est continue si et seulement si le triplet (α,β,γ) vérifie le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \alpha+\beta &=& 1\\ e^{-1}\alpha+e^{1}\beta+(e^{1}-e^{-1})\gamma &=& e^{1}.\end{array}\right.$$

On résout ce système, par exemple en retirant $e^{-1}L_1$ à L_2. On trouve le système équivalent :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \alpha+\beta &=& 1\\ (e^{1}-e^{-1})\beta+(e^{1}-e^{-1})\gamma &=& e^{1}-e^{-1}.\end{array}\right.$$

On peut simplifier par e^1-e^{-1} dans la seconde équation et on trouve

$$\left\{\begin{array}{rcl} \alpha+\beta &=& 1\\ \beta+\gamma &=& 1.\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \alpha &=& \gamma\\ \beta &=& 1-\gamma\\ \gamma &=& \gamma\end{array}\right.$$

L'ensemble des triplets pour lesquels la fonction g est continue est donc donné par $\{(0,1,0)+\gamma(1,-1,1):\gamma\in\mathbb{R}\}$.

Solution Exercice 8

1. Par les théorèmes généraux, f est continue sur $\mathbb{R}^*$. De plus, on a

$$|f(x)|\leq|\sin x||\sin(1/x)|\leq|x|\times 1\leq|x|.$$

Par le théorème d'encadrement, $\lim_{x\to 0}f(x)=0$. On peut donc prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0)=0$.

2. En remplaçant sin par cos, le procédé précédent ne fonctionne plus puisque $\cos(0)\neq 0$. On va prouver qu'on ne peut pas prolonger g par continuité en 0. Pour cela, on considère les deux suites

$$u_n=\frac{1}{2n\pi}\text{ et }v_n=\frac{1}{2n\pi+\pi/2}.$$

Alors les suites (u_n) et (v_n) convergent vers 0. Cependant,

$$g(u_n)=\cos(u_n)\cos(2n\pi)=\cos(u_n)\to 1$$

tandis que

$$g(v_n)=\cos(v_n)\cos(2n\pi+\pi/2)=0.$$

Ainsi, $(g(u_n))$ converge vers 1 et $(g(v_n))$ converge vers 0. g n'admet pas de limite en 0 et n'est donc pas prolongeable par continuité en ce point.

3. Par les théorèmes généraux, h est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$. Par ailleurs, posant $u=x+1$, on a

$$\lim_{x\to-1}h(x)=\lim_{u\to 0}\sin(u)|\ln(u)|=\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}\times u|\ln(u)|=1\times 0=0.$$

Ainsi, on peut prolonger par continuité h en -1 en posant $h(-1)=0$.

Solution Exercice 9

On revient à la définition, et on cherche si le taux d'accroissement admet une limite en 0.

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{\frac{x}{1+|x|}}{x} = \frac{1}{1+|x|} \to 1$$

lorsque $x \to 0$. La fonction est donc dérivable en 0, de dérivée 1. Concernant g, on a

$$\frac{g(x)-g(0)}{x} = \sin(x)\sin(1/x).$$

Utilisant $|\sin x| \leq |x|$ et $|\sin(1/x)| \leq 1$, on en déduit que

$$\left|\frac{g(x)-g(0)}{x}\right| \leq |x|.$$

Par le théorème de comparaison, le taux d'accroissement converge vers 0 lorsque x tend vers 0. La fonction g est donc dérivable en 0, avec $g'(0) = 0$. Pour h, on a

$$\frac{h(x)-h(0)}{x} = |x| \times \frac{\sin x}{x}.$$

Puisque $\sin x/x$ tend vers 1 quand x tend vers 0 et que $|x|$ tend vers 0 quand x tend vers 0, le taux d'accroissement converge vers 0 quand x tend vers 0, et donc h est dérivable en 0, avec $h'(0) = 0$.

Solution Exercice 10

Il est d'abord nécessaire que f soit continue en 1. On a $f(1) = 1$ et la limite à droite de f en 1 vaut $a + b + 1$. On doit donc avoir $a + b + 1 = 1$, soit $b = -a$. Etudions maintenant la dérivabilité en 1. La fonction f coïncide avec la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0, 1]$. La dérivée de $x \mapsto \sqrt{x}$ étant égale à $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$, f admet une dérivée à gauche en 1 qui vaut $1/2$. D'autre part, f coïncide sur $[1, +\infty[$ avec la fonction $x \mapsto ax^2 - ax + 1$, donc la dérivée est $x \mapsto 2ax - a$. La fonction f est donc dérivable à droite en 1, de dérivée a. Finalement, la fonction f sera dérivable en 1 si et seulement si les dérivées à droite et à gauche coïncident. Le seul moyen de définir f de sorte que ce soit une fonction dérivable en 1 est donc de poser $a = 1/2$ et $b = -1/2$.

Solution Exercice 11

On remarque d'abord que f est continue en 0, car, pour $x \neq 0$, on a

$$|f(x) - f(0)| \leq x^2$$

et $x^2 \to 0$ quand $x \to 0$. D'autre part, f est clairement C^1 sur $\mathbb{R}^*$. Etudions la dérivabilité en 0 en revenant à la définition, c'est-à-dire en étudiant si le taux d'accroissement admet une limite. On a :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

et ceci tend vers 0 quand x tend vers 0, grâce à la majoration $|x\sin\left(\frac{1}{x}\right)| \leq |x|$. Ainsi, f est dérivable en 0, avec $f'(0) = 0$. Pour déterminer si f est C^1 en 0, il faut étudier si la dérivée est continue en 0. Pour $x \neq 0$, on a

$$f'(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Or, posons $u_n = \frac{1}{2n\pi}$. Alors, u_n tend vers 0, et

$$f'(u_n) = \frac{1}{n\pi}\sin(2n\pi) - \cos(2n\pi) = -1 \neq f'(0).$$

Ainsi, f' n'est pas continue en 0, et f n'est pas de classe C^1. Concernant g, on peut procéder comme pour f pour démontrer que g est C^1 sur $\mathbb{R}^*$, dérivable en 0 avec $g'(0) = 0$. De plus, pour $x \neq 0$,

$$g'^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

de sorte que

$$|g'(x) - g'^2 + |x|.$$

Ceci entraîne que g' est continue en 0, et donc que g est de classe C^1.

Solution Exercice 12

1. Posons $u(x) = xe^x$ et écrivons $u(x) = v(x)w(x)$ avec $v(x) = x$ et $w(x) = e^x$. On va appliquer la formule de Leibniz

$$u^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} v^{(k)}(x) w^{(n-k)} x.$$

Cette somme ne va comporter que deux termes. En effet, on a

$$v(x) = x,\ v'^{(k)}(x) = 0,\ k \geq 2.$$

Comme de plus $w^{(k)}(x) = e^x$ pour tout $k \geq 0$, on a donc

$$u^{(n)}(x) = xe^x + ne^x = (x+n)e^x.$$

Remarquons que cette formule se démontre aussi très facilement par récurrence.

2. On pose $u(x) = x^2\sin(x)$ et on écrit $u(x) = v(x)w(x)$ avec $v(x) = x^2$ et $w(x) = \sin x$. On va appliquer la formule de Leibniz. L'application est simplifiée par le fait que

$$v'(x) = 2x,\ v''^{(k)}(x) = 0 \text{ pour } k \geq 2.$$

Reste à calculer les dérivées successives de $\sin x$. Pour cela, on peut "un peu" tricher et remarquer que

$$(\sin x)' = \sin(x + \pi/2).$$

On obtient immédiatement $(\sin)^{(k)}(x) = \sin(x + k\pi/2)$, d'où

$$u^{(n)}(x) = x^2\sin(x+n\pi/2) + 2nx\sin(x+(n-1)\pi/2) + n(n-1)\sin(x+(n-2)\pi).$$

3. Posons $f(x) = x^{n-1}\ln(1+x)$ et écrivons $f(x) = g(x)h(x)$ avec $g(x) = x^{n-1}$ et $h(x) = \ln(1+x)$, qui sont C^∞ sur $]-1,+\infty[$. On peut utiliser la formule de Leibniz. Calculons au préalable la dérivée k-ième de g et h :

$$g^{(k)}(x) = (n-1)\dots(n-k)x^{n-1-k} = \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!}x^{n-1-k},$$

pour $k \leq n-1$, avec $g^{(n)}(x) = 0$. D'autre part, on établit facilement par récurrence que

$$h^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$$

pour $k > 0$. Utilisant la formule de Leibniz, et $g^{(n)} = 0$, on trouve

$$f^{(n)}(x) = (n-1)! \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \frac{x^{k-1}}{(1+x)^k}.$$

Si $x = 0$, on trouve que $f^{(n)}(0) = n!$. Si $x \neq 0$, on factorise par x pour faire apparaitre une somme qu'on va simplifier à l'aide de la formule du binome :

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \frac{(n-1)!}{x} \left(1 - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{-x}{1+x}\right)^k\right) \\ &= \frac{(n-1)!}{x} \left(1 - \left(1 + \frac{-x}{1+x}\right)^n\right) \\ &= \frac{(n-1)!}{x} \left(1 - \frac{1}{(1+x)^n}\right). \end{aligned}$$

Solution Exercice 13

La fonction est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$. Démontrons la formule demandée par récurrence sur n. Pour $n = 0$, la dérivée de $e^{1/x}$ est bien $\frac{-1}{x^2} e^{1/x}$. Supposons la formule vraie au rang $n-1$, et prouvons-la au rang n. Pour cela, on écrit $x^n e^{1/x}$ sous la forme $x \times x^{n-1} e^{1/x}$ et on utilise la formule de Leibniz :

$$\left(x^n e^{1/x}\right)^{(n+1)} = x \left(x^{n-1} e^{1/x}\right)^{(n+1)} + (n+1) \left(x^{n-1} e^{1/x}\right)^{(n)}.$$

On introduit alors le résultat de l'hypothèse de récurrence, qui donne directement la valeur du second terme et aussi celle du premier terme après une dernière dérivation :

$$x \left(x^{n-1} e^{1/x}\right)^{(n+1)} = x \left(\frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+3}} e^{1/x} + \frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{x^{n+2}} e^{1/x}\right).$$

En mettant tous les résultats ensembles, on trouve exactement le résultat demandé.