السنة الأولى
جذع مشترك علوم وتكنولوجيا

الفصل الأول: تذكير رياضي

التحليل البعدي والحساب الشعاعي

الأستاذة: ناصر أمال

2021/2020

1. المعادلات البعدية(Les équations aux Dimensions)

1.1.المقادير الفيزيائية(Grandeurs physiques)

1.1.1 تعريف: المقدار (Grandeur) هو كل خاصية فيزيائية، كيميائية أو بيولوجية يمكن قياسها (Grandeur Mesurable) مثل الأطوال، الكتل ...الخ، أو قد تكون مرجعية (Grandeur Repérable) مثل الموضع متحرك في الفضاء وغيرها. في الفيزياء هناك نوعين من المقادير: المقدار الفيزيائي السلمي (Grandeur scalaire) أو الشعاعي (Grandeur vectorielle).

المقادير الفيزيائية السلمية هو كل كمية تعرف بقيمة ووحدة معينتين مثل: كتلة جسم m، الشحنة الكهربائية q. أما المقادير الشعاعية فبالإضافة إلى القيمة والوحدة يجب أن تعرف أيضا بمنحى (حامل) واتجاه مثل: شعاع السرعة $\vec{v}$، التسارع $\vec{a}$ القوة $\vec{F}$.

1.1.2.المقادير والوحدات الأساسية (Grandeurs et unité de base): هناك العديد من جمل الوحدات لكن الأكثر شيوعا واستخداما هي جملة الوحدات الدولية أو ما يعرف اختصارا بـ SI والتي تحتوي على سبعة وحدات أساسية توافق سبع مقادير فيزيائية رئيسة نلخصها في الجدول الموالي

البعد **Dimension**	رمزها **Symbole**	اسم الوحدة **Nom de l'unité**	المقدار الأساسي **Grandeur de base**
M	Kg	Kilogramme الكيلوغرام	Masse الكتلة
L	m	Mètre المتر	Longueur الطول
T	s	Seconde الثانية	Temps الزمن
I	A	Ampère الامبير	شدة التيار الكهربائي Intensité du courant électrique
N	mol	mole مول	Quantité de la matière كمية المادة
θ	K	Kelvin الكلفن	درجة الحرارة المطلقة Température Absolue
J	Cd	Candela الكاندلا	Intensité lumineuse الشدة الضوئية

الأربع وحدات الأولى تشكل ما يعرف بالنظام الدولي للوحدات MKSA (المتر ، الكيلوغرام، الثانية والامبير) كما توجد أنظمة أخرى لها استخداماتها في الفيزياء نذكر منها :

النظام CGS (السنتيمتر ، الغرام والثانية)

النظام MTS (المتر، الطن والثانية)

1.1.3. المقادير والوحدات المشتقة: (Grandeurs et unité dérivées) المقادير المشتقة يمكن تعريفها انطلاقا من المقادير الأساسية مثل السرعة، التسارع، العمل التردد.....الخ .ووحدتها تنتج من الوحدات الأساسية مثل النيوتن وحدة قياس القوة $N=Kg.m/s^2$.

1.1.4. البعد: (Dimension) بعد مقدار فيزيائي G يعبر عنه بـ [G]، وهو خاصية أشمل من الوحدة حيث يحدد طبيعة المقدار ولا يتعلق بالسلم الذي يكيف على حسب الظاهرة المدروسة. ولا يجب الخلط بين البعد والوحدة (البعد ≠ الوحدة)

امثلة: اذا كان المقدار الفيزيائي Gعبارة عن:

1. كتلة m فإن بعد الكتلة هو M و نكتب [m]=M بغض النظر ما اذا كانت الكتلة هي لإلكترون أو كوكب.
2. سرعة v فان بعدها يعبر عنه بـ $[v]=L.T^{-1}$

1.2. المعادلات البعدية: نسمي معادلة بعدية كل معادلة تربط بعد المقدار G بأبعاد المقادير الأساسية وتعطى في الحالة العامة بالشكل $[G] = M^a L^b T^c I^d \theta^e N^f J^g$ حيث الأسس a, b, c, d, e, f, g عبارة عن أعداد حقيقية.

ملاحظات:

- اذا كان $[G] = 1$ فإننا نقول بأن المقدار G هو ثابت بدون وحدة. نفس الشيء بالنسبة للدوال المثلثية (sinα, cosα, tgα) وكذا بالنسبة للدالة الأسية أو اللوغاريتمية $(e^x, \ln(x))$.
- طرفي مساواة تحوي جمع او طرح مقدارين يجب أن تكون متجانسة بعديا أي إذا كان $G = G_1 \pm G_2$ فإن:
$$[G] = [G_1] = [G_2]$$
- $[G^n] = [G]^n$

يمكننا التحليل البعدي من :

- كتابة الوحدة المركبة أو ما يعرف بالوحدات المشتقة بدلالة الوحدات الأساسية

مثال : اكتب وحدة الضغط الباسكال Pa بدلالة الوحدات الأساسية في جملة الوحدات الدولية (MKSA)

الحل: يعرف الضغط P على أنه تطبيق قوة F على سطح S أي

$$P = \frac{F}{S} \Rightarrow [P] = [F][S]^{-1}$$

$$F = ma; a = \frac{x}{t^2} \Rightarrow [F] = [m][x][t]^{-2} = MLT^{-2}$$

$$S = x.y \Rightarrow [S] = [x]^2 = L^2$$

ومنه بالتعويض في المعادلة البعدية للضغط نجد:

$$[P] = MLT^{-2}L^{-2} = ML^{-1}T^{-2}$$

$$U_P = Kg.m^{-1}s^{-2} = Pa$$

- *يمكننا أيضا من تحويل الوحدات من جملة وحدات الى أخرى بكل سهولة وسلاسة.*

مثال: أوجد النسبة بين وحدتي الضغط في الحملتين MKSA (Pa) وCGS (Bary)

الحل: نعوض كل وحدة في النظام العالمي بما يقابلها في النظام CGS

$$Pa = Kg\, m^{-1}\, s^{-2} = 10^3 g\, 10^{-2} cm\, s^{-2} = 10\, g\, cm\, s^{-2} = 10 Bary$$

$$\frac{Pa}{Bary} = 10$$

- التحقق من تجانس العبارات وبالتالي صحة لعلاقات

مثال: لدينا عبارتان للدور نواس بسيط T بدلالة طوله l والجاذبية g :

الحل:

الطرف الأول من المساواتان له بعد زمن لان الدور هو الزمن اللازم لإتمام دورة كاملة. اذن يجب على الطرف الثاني لكل منهما ان يكون له نفس البعد أي بعد الزمن أو تكون العبارة غير صحيحة.

$$\sqrt{\frac{l}{g}} = (l.g^{-1})^{\frac{1}{2}} = l^{\frac{1}{2}}\, g^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \left[l^{\frac{1}{2}}\, g^{-\frac{1}{2}}\right] = [l]^{\frac{1}{2}}[g]^{-\frac{1}{2}} = L^{\frac{1}{2}}\,(LT^{-2})^{-\frac{1}{2}} = L^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{1}{2}}T = T$$

طرفي هذه المعادلة متجانسان وبالتالي العبارة صحيحة

$$\sqrt{\frac{g}{l}} = (g.l^{-1})^{\frac{1}{2}} = g^{\frac{1}{2}}\, l^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \left[g^{\frac{1}{2}}\, l^{-\frac{1}{2}}\right] = [g]^{\frac{1}{2}}[l]^{-\frac{1}{2}} = (LT^{-2})^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{1}{2}} = L^{\frac{1}{2}}T^{-1}L^{-\frac{1}{2}}$$
$$= T^{-1} \neq T$$

الطرفان في هذه الحالة غير متجانسان وهذا يدل على أن العبارة غير صحيحة.

- *بما أن حفظ جميع العبارات للمختلف المقادير الفيزيائية أمر مستحيل فإن التحليل البعدي يمكننا من التكهن بشكل العبارة.*

مثال: *يعطى تردد قطرة ماء بالشكل الموالي:* $f = kR^{\alpha}\rho^{\beta}\tau^{\gamma}$

حيث k ثابت بدون وحدة ، R نصف قطر القطرة، ρ كتلتها الحجمية و τ لتوتر السطحي (وهو عبارة عن قوة على وحدة طول). أوجد المقادير الحقيقة α, β, γ *باستخدام التحليل البعدي ثم اكتب عبار التردد* f .

الحل:

التردد هو مقلوب الدور اذن: $[f] = T^{-1}$

من جهة أخرى وبالانتقال الى المعادلة البعدية للتردد نجد

$$[f] = [k][R]^{\alpha}[\rho]^{\beta}[\tau]^{\gamma}$$

$$[k] = 1 \;\; ; \;\; [R] = L \; ;$$

$$\rho = \frac{m}{v} \Rightarrow [\rho] = [m][v]^{-1} = M.L^{-3}$$

$$\tau = \frac{F}{l} \Rightarrow [\tau] = [F][l]^{-1} = MLT^{-2}L^{-1} = MT^{-2}$$

بالتعويض في المعادلة البعدية

$$[f] = [k][R]^{\alpha}[\rho]^{\beta}[\tau]^{\gamma} = L^{\alpha}\, M^{\beta}L^{-3\beta}M^{\gamma}T^{-2\gamma} = L^{(\alpha-3\beta)}M^{(\beta+\gamma)}T^{-2\gamma} = T^{-1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha - 3\beta = 0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (1) \Rightarrow \alpha = 3\beta \\ \beta + \gamma = 0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (2) \Rightarrow \beta = -\gamma \\ \quad -2\gamma = -1 \dots\dots\dots\dots\dots\dots . (3) \Rightarrow \gamma = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

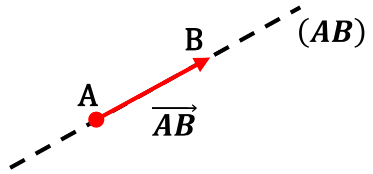
$$\gamma = \frac{1}{2} \;\; ; \;\; \beta = -\frac{1}{2} \;\; ; \;\; \alpha = -\frac{3}{2}$$

ومنه تعطى عبارة +التردد بـ: $f = k\sqrt{\frac{\tau}{R^3\rho}}$

2. الحساب الشعاعي (*Le Calcul Vectoriel*)

تنقسم المقادير الفيزيائية الى قسمين: سلمية وشعاعية

المقادير السلمية: هي كل عدد موجب، سالب أو معدوم يستخدم للتعبير عن الكميات المختلفة مثل: الكتلة، الزمن، درجة الحرارة، الطاقة...

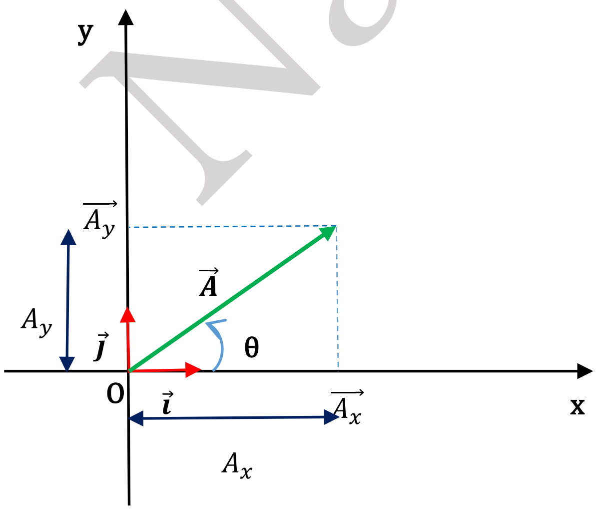


المقادير الشعاعية: الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هو مقدار يتميز بالخصائص التالية:

- المبدأ وهو نقطة التأثير.
- الحامل أو المنحى وهو المستقيم *(AB)*.
- الاتجاه من *A* الى *B*.
- الشدة او الطويلة هي طول القطعة المستقيمة AB ويرمز لها بـ: $\|\overrightarrow{AB}\|$.
- أي شعاع $\overrightarrow{AB}$ يمكن كتابه بدلالة طويلته $\|\overrightarrow{AB}\|$ بالشكل: $\overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{AB}\|\overrightarrow{U}$ حيث $\overrightarrow{U}$ شعاع الوحدة ($\|\overrightarrow{U}\|$=1) المحمول على الشعاع $\overrightarrow{AB}$.

مركبات شعاع: للتمثيل شعاع نستخدم مركباته والتي تكتب عادة في جملة الاحداثيات الكارتيزية *(O, x, ,y, z)*، هذه المركبات ماهي إلا الإسقاط المباشر للشعاع على محاور هذه الجمل والمزودة بأشعة وحدة تسمى القاعدة الكارتيزية $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

المعلم المستوي (معلم ذو بعدين *Repère à 2 Dimensions*):



تمثيل شعاع $\vec{A}$ في المستوي *(plan)* يكون في القاعدة $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. ونكتب:

$$\vec{A} = A_x\vec{\imath} + A_y\vec{\jmath}$$

نسمي المقادير السلمية A_x و A_y مركبات الشعاع $\vec{A}$ وهي عبارة عن المساقط العمودية للشعاع على المحاور (Ox) و (Oy) على الترتيب و نسمي $\vec{\imath},\vec{\jmath}$ اشعة الوحدة وفق ترتيب المحاور السابقة.

ملاحظات:

- $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ ويمكن التعبير عنها بالشكل الموال $\vec{i} = \binom{1}{0}$ و $\vec{j} = \binom{0}{1}$
- وبالتالي يكتب الشعاع $\vec{A}$ بالشكل: $\vec{A} = \binom{A_x}{A_y}$
- طويلة الشعاع $\vec{A}$ هي: $\|\vec{A}\| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$
- شعاع الوحدة $\vec{U}$ المحمول على $\vec{A}$ يعرف بالعبارة :

$$\vec{U} = \frac{\vec{A}}{\|A\|}; \ \|\vec{U}\| = 1$$

- لدينا نقطتين $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ يكتب الشعاع $\overrightarrow{AB}$ بالشكل:

$\overrightarrow{AB} = \binom{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$ طويلة الشعاع تحسب من العبارة $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

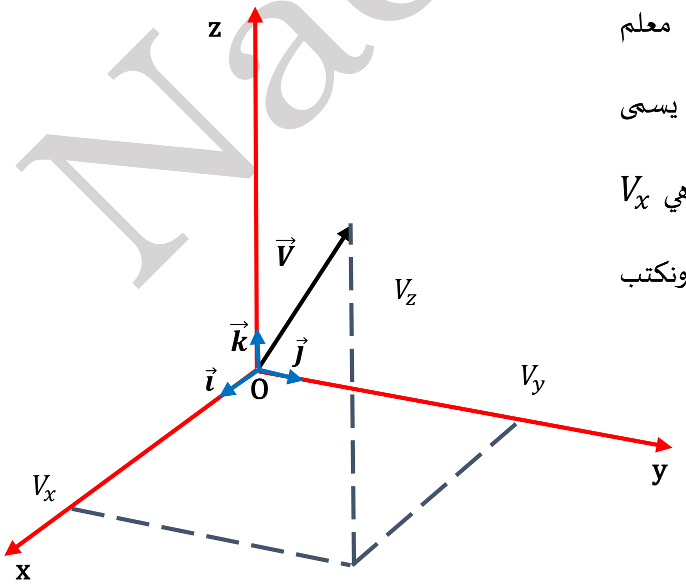
مثال: لدينا النقطتان $A(1,2)$ و $B(2,3)$ والمطلوب:

1. مثل النقطتين في مستوى متعامد ومتجانس بالقاعدة $(O, \vec{i}, \vec{j})$
2. اكتب عبارة الشعاع $\overrightarrow{AB}$ ثم احسب طويلته
3. أوجد شعاع الوحدة $\vec{U}$ المحمول على $\overrightarrow{AB}$.

الحل يفصل في المحاضرة

المعلم الفضائي (Espace à 3 Dimensions) : في معلم متعامد ومتجانس ذو ثلاثة أبعاد (O, x, y, z) أو ما يسمى بالفضاء ذي القاعدة $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ مركبات شعاع $\vec{V}$ هي V_x وفق المحور Ox، V_y وفق المحور Oy و V_z وفق المحور Oz ونكتب :

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}$$



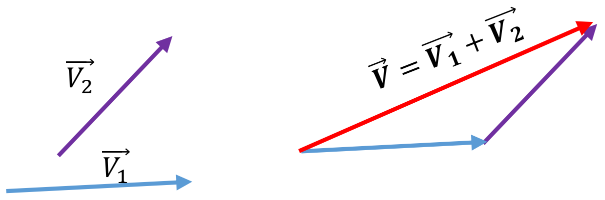
تطبيق: مثل الاشعة الموالية في الفضاء $(O,x\ ,y,z)$

$$\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}\ ;\ \overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix};\ \overrightarrow{OC}=\begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix}\ ;\ \overrightarrow{OD}=\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}$$

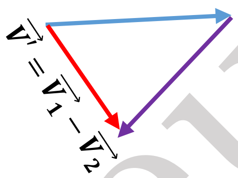
الحل يفصل في المحاضرة

عمليات على الاشعة:

الجمع و الطرح:



هندسيا: عند جمع شعاعين $\vec{V_1}$ و $\vec{V_2}$ نقوم بسحب الشعاع الثاني حتى تنطبق بدايته مع نهاية الشعاع الأول ونرسم محصلة الجمع $\vec{V}$ من بداية الشعاع الأول إلى نهاية الشعاع الثاني ونكتب $\vec{V}=\vec{V_1}+\vec{V_2}$



عند طرح شعاعين فان عملية السحب تتم بنفس الطريقة غير ان معاكس الشعاع الثاني هو الذي ينطبق على بداية الأول وتكون المحصلة $\vec{V'}=\vec{V_1}-\vec{V_2}$

تحليليا: محصلة الشعاعين $\vec{V_1}$ و $\vec{V_2}$ واللذين يكتبان في جملة الاحداثيات الكارتيزية في القاعدة $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ بالشكل الموالي:

$$\left.\begin{aligned}\vec{V_1}&=V_{1x}\vec{\imath}+V_{1y}\vec{\jmath}+V_{1z}\vec{k}\\ \vec{V_2}&=V_{2x}\vec{\imath}+V_{2y}\vec{\jmath}+V_{2z}\vec{k}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \vec{V}=\vec{V_1}+\vec{V_2}=V_x\vec{\imath}+V_y\vec{\jmath}+V_z\vec{k}$$

حيث:

$$\vec{V}=\begin{pmatrix}V_x=V_{1x}+V_{2x}\\ V_y=V_{1y}+V_{2y}\\ V_z=V_{1z}+V_{2z}\end{pmatrix}$$

ملاحظات:

- $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$
- $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

- $\overrightarrow{AB}^2 = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2$

خصائص الجمع : أهم خصائص جمع الاشعة يمكن تلخيصها في النقاط التالية:

- الخاصية التبديلية $\vec{V_1} + \vec{V_2} = \vec{V_2} + \vec{V_1}$
- الخاصية التجميعية: $\left(\vec{V_1} + \vec{V_2}\right) + \vec{V_3} = \vec{V_1} + \left(\vec{V_2} + \vec{V_3}\right)$
- الضرب في قيمة سلمية λ : أو ما يعرف بالارتباط الخطي ونكتب: $\vec{U} = \lambda\vec{V}$
  - $\lambda > 0$ الشعاعان المرتبطان لهما نفس الاتجاه
  - $\lambda < 0$ الشعاعان متعاكسان في الاتجاه.

جداء شعاعين:

الجداء السلمي: يرمز للجداء السلمي للشعاعين $\vec{U} = \begin{pmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{pmatrix}$ و $\vec{V} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$ بالرمز: $\vec{U} \cdot \vec{V}$ وهو قيمة سلمية تعطى بأحد العبارتين:

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = \|\vec{U}\|\|\vec{V}\|\cos(\theta)$$

حيث θ الزاوية المحصورة بين الشعاعين.

أو: $\vec{U} \cdot \vec{V} = U_x V_x + U_y V_y + U_z V_z$

مثال: احسب الجداء السلمي للشعاعين $\vec{U} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \sqrt{4} \end{pmatrix}$ و $\vec{V} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \sqrt{4} \end{pmatrix}$ ثم استنتج الزاوية المحصورة بينهما.

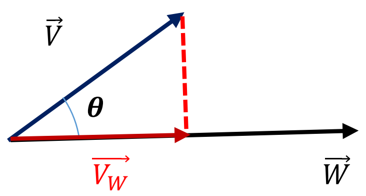
(الحل يفصل في المحاضرة)

خصائص الجداء السلمي:

- الخاصية التبديلية: $\vec{U} \cdot \vec{V} = \vec{V} \cdot \vec{U}$
- الخاصية التوزيعية: $\vec{U} \cdot \left(\vec{V} + \vec{W}\right) = \vec{U} \cdot \vec{V} + \vec{U} \cdot \vec{W}$
- $\vec{U} \cdot \vec{V} = 0 \Rightarrow \vec{U} \perp \vec{V}$ انعدام الجداء السلمي لشعاعين يعني حتما تعامدهما.

التفسير الهندسي للجداء السلمي:

مسقط الشعاع $\vec{V}$ على الشعاع $\vec{W}$ نرمز له بـ : $\overrightarrow{V_W}$



من الشكل المقابل نجد أن : $\overrightarrow{V_W} = \vec{V}\cos\theta$ ومنه فإن الجداء السلمي يكتب بالعبارة التالية :

$$\vec{V}\cdot\vec{W} = \|\vec{V}_W\|\|\vec{W}\|$$

ومنه المسقط يعطى بالعلاقة : $\|\vec{V}_W\| = \frac{\vec{V}\cdot\vec{W}}{\|\vec{W}\|}$

<u>**الجداء الشعاعي:**</u> يرمز للجداء الشعاعي بين الشعاعين $\vec{U} = \begin{pmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{pmatrix}$ و $\vec{V} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$ يصنعان بينهما زاوية θ بالرمز:

$\vec{W} = \vec{U}\wedge\vec{V}$.وهو شعاع تعرف طويلته بالعبارة :

$$\|\vec{W}\| = \|\vec{U}\|\|\vec{V}\||\sin\theta|$$

ويحسب تحليليا بواسطة المحدد بالشكل التالي :

$$\vec{U}\wedge\vec{V} = \begin{vmatrix} \overset{+}{\vec{\imath}} & \overset{-}{\vec{\jmath}} & \overset{+}{\vec{k}} \\ U_x & U_y & U_z \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}$$

$$= (U_yV_z - V_yU_z)\vec{\imath} - (U_xV_z - V_xU_z)\vec{\jmath} + (U_xV_y - V_xU_y)\vec{k}$$

$$\|\vec{U}\wedge\vec{V}\| = \sqrt{(U_yV_z - V_yU_z)^2 + (U_xV_z - V_xU_z)^2 + (U_xV_y - V_xU_y)^2}$$

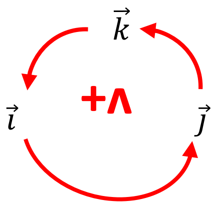
خصائص الجداء الشعاعي : يتميز الجداء الشعاعي بالخصائص التالية:

- غير تبديلي $\vec{U}\wedge\vec{V} = -\vec{V}\wedge\vec{U}$
- توزيعي على الجمع: $\vec{U}\wedge(\vec{V}+\vec{W}) = \vec{U}\wedge\vec{V} + \vec{U}\wedge\vec{W}$
- اذا انعدم الجداء الشعاعي بين شعاعين فإنهما متوازيان ونكتب:

$$\vec{U}\wedge\vec{V} = \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{U}\parallel\vec{V}$$

- حاصل الجداء الشعاعي عمودي على المستوي المشكل بالشعاعين طرفا الضرب أي:

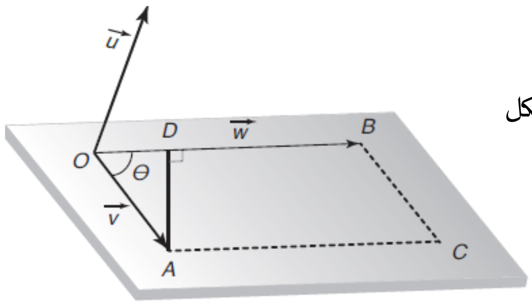
$$\vec{W} = \vec{U}\wedge\vec{V} \Rightarrow \vec{W}\perp\vec{U} \text{ و } \vec{W}\perp\vec{V}$$



- $\vec{\imath}\wedge\vec{\jmath} = \vec{k}\,;\vec{\jmath}\wedge\vec{k} = \vec{\imath}\,;\vec{k}\wedge\vec{\imath} = \vec{\jmath}$

- $\vec{\imath}\wedge\vec{\imath}=\vec{\jmath}\wedge\vec{\jmath}=\vec{k}\wedge\vec{k}=\vec{0}$

التفسير الهندسي للجداء الشعاعي:



نفرض أن $\vec{U}$ هو ناتج ضرب الشعاعين $\vec{V}$ و $\vec{W}$ كما يوضحه الشكل

المقابل حيث: $\|\vec{U}\| = \|\vec{V}\|\|\vec{W}\|sin\theta$

النقطة D تمثل المسقط العمودي لـ A على OB لدينا:

$|AD| = \|\vec{V}\|sin\theta$ و $|OB| = \|\vec{W}\|$ بالتعويض في طويلة $\vec{U}$ نجد $\|\vec{U}\| = |OB||AD|$ وهي مساحة متوازي

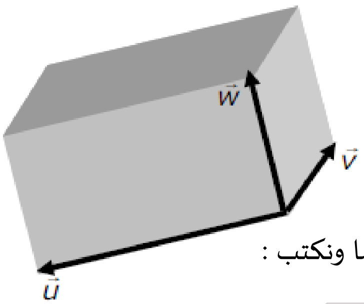
الاضلاع المشكل بالشعاعين $\vec{V}$ و $\vec{W}$.

<u>مثال:</u> لدينا الشعاعان: $\vec{U}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ و $\vec{V}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ احسب الجداء $\vec{U}\wedge\vec{V}$ ثم استنتج الزاوية المحصورة بينهما.

الحل يفصل في المحاضرة

<u>الجداء المختلط</u>

لتكن لدينا ثلاث اشعة معرفة في الفضاء ذي القاعدة $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ بـ:



$$\vec{U}=\begin{pmatrix}U_x\\U_y\\U_z\end{pmatrix}\ ;\ \vec{V}=\begin{pmatrix}V_x\\V_y\\V_z\end{pmatrix}\ ;\ \vec{W}=\begin{pmatrix}W_x\\W_y\\W_z\end{pmatrix}$$

الجداء المختلط للأشعة الثلاث هو مقدار سلمي يمثل حجم متوازي السطوح المشكل بها ونكتب :

$$\vec{U}\cdot(\vec{V}\wedge\vec{W})=\begin{pmatrix}U_x\\U_y\\U_z\end{pmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\vec{\imath} & -\vec{\jmath} & \vec{k}\\ V_x & V_y & V_z\\ W_x & W_y & W_z\end{vmatrix}$$

$$=U_x(V_yW_z-W_yV_z)-U_y(V_xW_z-W_xV_z)+U_z(V_xW_y-W_xV_y)$$

<u>مؤثرات التفاضل : Opérateurs différentiel</u>

<u>المؤثر الشعاعي نابلا $\vec{\nabla}$:</u> يعرف على أنه شعاع مركباته هي الاشتقاقات الجزئية في الفضاء وفق المحاور ويكتب بالشكل الموالي:

$$\vec{\nabla}=\frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \quad \text{أو نكتب} \quad \vec{\nabla}=\begin{pmatrix}\partial/\partial x\\ \partial/\partial y\\ \partial/\partial z\end{pmatrix}$$

بالاعتماد على هذا المؤثر الشعاعي سنعرف بعض المؤثرات الأكثر استخداما في الفيزياء الكلاسيكية.

<u>مؤثر التدرج (Gradient):</u> نسمي تدرج دلة سلمية $f(x,y,z)$ الشعاع $\overrightarrow{grad}f(x,y,z)$ و المعرف في الاحداثيات الكارتيزية بالشكل:

$$\overrightarrow{grad}\, f = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

<u>مثال:</u> احسب تدرج الدالة السلمية $f(x,y,z)$ المعرفة كما يلي: $f(x,y,z) = x^2 - yz$

الحل يفصل في المحاضرة

<u>مؤثر التفرق: (Divergence) :</u> في المعلم الكارتيزي $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$، تفرق حقل شعاعي $\vec{U} = \begin{pmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{pmatrix}$ هو مقدار سلمي يعرف على أنه الجداء السلمي بين المؤثر نابلا $\vec{\nabla}$ والحقل $\vec{U}$ ونكتب:

$$div\vec{U} = \vec{\nabla} \cdot \vec{U} = \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z}$$

<u>مثال :</u> لدينا الشعاع : $\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$. أحسب $div\vec{r}$

<u>**الحل يفصل في المحاضرة**</u>

<u>مؤثر الدوران (Rotationnel) :</u> في المعلم الكارتيزي $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$، دوران حقل شعاعي $\vec{U} = \begin{pmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{pmatrix}$ هو مقدار شعاعي يعرف على أنه الجداء الشعاعي بين المؤثر نابلا $\vec{\nabla}$ والحقل $\vec{U}$ ونكتب:

$$\overrightarrow{rot}\vec{U} = \vec{\nabla} \wedge \vec{U} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & -\vec{\jmath} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ U_x & U_y & U_z \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial U_z}{\partial y} - \frac{\partial U_y}{\partial z}\right)\vec{\imath} - \left(\frac{\partial U_z}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial z}\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial U_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

<u>مؤثر لابلاس (Laplacien):</u> نسمي لابلاسيان دالة سلمية $f(x,y,z)$ **تفرق تدرج الدالة** و نكتب:

$$\Delta f(x,y,z) = \vec{\nabla}\,(\vec{\Delta} f(x,y,z)) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

خصائص: مهم كانت الدالة السلمية $f(x,y,z)$ أو الحقل الشعاعي $\vec{U}$ فإن الخاصيتان المواليتان دائما محققتان:

$$div(\overrightarrow{rot}\vec{U}) = 0 \quad \text{و} \quad \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad}f) = \vec{0}$$