CHAPITRE II

Compléments sur les Espaces de Banach

La théorie des espaces de Banach est extrêmement développée, et leurs propriétés

(théorème de Baire, Banach-Steinhaus, graphe fermé, caractérisation des application

linéaires continues, dualité, existence et propriétés des topologies faibles,etc.) sont bien

connues et développées. Les espaces de Banach sont le cadre fonctionnel naturel dans

lequel se fait la grande partie de l'analyse fonctionnelle.

II.1.1.Définition.

On appelle espace de Banach, tout espace vectoriel normé complet pour la distance

issue de sa norme.

II.1.2.Exemples.

- $C([0,1] \to \mathbb{R})$, $\|f\| = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

- $l^p(\mathbb{N})$, $1 \leq p < +\infty$, l'espace des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |u_n|^p < +\infty$, muni de la norme.

$$\|u_n\|_p = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^p\right)^{1/p}.$$

- Tout espace vectoriel normé de dimension finie.

- L'espace $L_c(E,F)$ des applications linéaires continues d'un e.v.normé E dans un espace

de Banach F, muni de la norme $\|f\| = \sup\limits_{\|x\|\leq 1} \|f(x)\|_F$.

II.1.3.Théorème.

Un espace vectoriel normé E est un espace de Banach si et seulement si toute

série absolument convergente est convergente dans E.

Preuve.

Supposons que E soit un espace de Banach. Soit $\sum u_n$ une série absolument

convergente de teme général u_n. La suite des sommes partielles $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$

est une suite de Cauchy

$$\|S_{n+p} - S_n\| = \left\|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right\| \leq \|u_{n+1}\| + \bullet\bullet\bullet + \|u_{n+p}\| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|u_k\| \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

E étant complet la suite S_n est convergente.

Réciproquement, supposons que toute série absolument convergente soit convergente.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Nous pouvons extraire une sous-suite $v_n = u_{\varphi(n)}$ telle que

$$\|v_{n+1} - v_n\| \leq \frac{1}{2^n}.$$

La série de terme général $(v_{n+1} - v_n)$ est donc absolument convergente. Comme

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (v_{k+1} - v_k) = v_{n+1} - v_0,$$

nous en déduisons que la suite extraite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, il résulte que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

1

II.1.4.Théorème. (de Baire).

Dans un espace de Banach non vide E,

(i) toute intersection dénombrable d'ouverts denses dans E est dense dans E.

$$\overline{O_n} = E,\ \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n} = E,$$

(ii) toute réunion dénombrable de fermés d'intérieurs vides dans E est d'intérieur vide dans E.

$$\overset{\circ}{\widehat{F_n}} = \emptyset,\ \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \overset{\circ}{\widehat{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n}} = \emptyset,$$

(iii) si E est réunion dénombrable de fermés de E, l'un au moins de ces fermés est d'intérieur non vide dans E.

$$E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \Longrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \overset{\circ}{\widehat{F_{n_0}}} \neq \emptyset.$$

Preuve.

(i)$\Longleftrightarrow$(ii). Par passage au complémentaire.

Montrons (i).

Pour montrer que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ est dense dans E, il faut montrer que

$$\forall V \text{ ouvert non vide de } E, \quad V \cap \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n\right) \neq \emptyset.$$

Soit donc V un ouvert non vide de E. Par réccurence, on va constuire une suite $(\ B_n)_{n\in\mathbb{N}}$

de boules fermées de E telles que

1- $\forall n \in \mathbb{N}, B_n$ est une boule fermée de rayon inférieur à $1/2^n$.

2- $B_0 \subset O_0 \cap V$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $B_{n+1} \subset O_{n+1} \cap \overset{\circ}{\widehat{B_n}}$.

L'ouvert O_0 est dense dans E, donc $O_0 \cap V \neq \emptyset$. Or $O_0 \cap V$ est ouvert, il existe donc une

boule ouverte $B(x_0, r) \subset O_0 \cap V$. Si B_0 est la boule fermée de centre x_0 et de rayon

$\inf(r/2; 1)$,on a donc $B_0 \subset O_0 \cap V$. Supposons les boules $B_0, B_1, \bullet\bullet\bullet, B_n$ construites

et vérifiant (1) et (2). L'ouvert O_{n+1} est dense dans E, donc $O_{n+1} \cap \overset{\circ}{\widehat{B_n}}$ est un ouvert non vide.

Il existe donc une boule ouverte $B(x, r) \subset O_{n+1} \cap \widehat{B_n}$. Si B_{n+1} est la boule fermée de centre x

est de rayon $\inf\left(r/2; 1/2^{n+1}\right)$, on a donc $B_{n+1} \subset O_{n+1} \cap \widehat{B_n}$. Ainsi B_{n+1} vérifie (1) et (2).

Par construction, $(\ B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fermés non vides de E dont le

diamètre tend vers 0. De plus E est complet, il existe donc $a \in E$ tel que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n = \{a\}$.

Or $B_0 \subset V$, donc $a \in V$. D'après (2), on a aussi $B_n \subset O_n$ pour tout n, donc $a \in O_n$

pour tout n. Ainsi $a \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} O_n$. Enfin, $a \in V \cap \left(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} O_n\right)$.

Montrons maintenant (iii).

Supposons par l'absurde que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\overset{\circ}{\widehat{F_n}} = \emptyset$,

alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\overline{C_E(F_n)} = C_E\left(\overset{\circ}{\widehat{F_n}}\right) = C_E(\emptyset) = E$,

donc on peut appliquer (i) aux $C_E(F_n)$: $\overline{\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} C_E(F_n)} = E$. Or,

$E = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n \Longrightarrow \emptyset = C_E\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n\right) = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} C_E(F_n)$ et donc $\overline{\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} C_E(F_n)} = \overline{\emptyset} = \emptyset$.

D'où une contradiction.

II.1.5.Application.

- $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.
- Tout espace de Banach est de dimension finie ou non dénombrable.

II.1.6.Théorème. (de Banach-Steinhaus).

Soit $(E, \|\bullet\|_E)$ un espace de Banach et $(F, \|\bullet\|_F)$ un espace vectoriel normé. Soit de plus,

A une partie non vide de $L_c(E,F)$, telle que:

$$\sup_{f\in A} \|f(x)\|_F < +\infty, \quad \forall x \in E.$$

Alors

$$\sup_{f\in A} \|f\|_{L_c(E,F)} < +\infty$$

Preuve.

Soit $k \in \mathbb{N}$. Posons $W_k = \{x \in E \ / \ \forall f \in A, \ \|f(x)\|_F \leq k\}$.

Pour $g \in A$, posons $\varphi_g : E \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \|g(x)\|_F$. Les applications g et $y \mapsto \|y\|_F$ étant

continues, il en est de même de φ_g. Comme $W_k = \varphi_g^{-1}([0,k])$, W_k est un fermé de E.

Comme $\bigcup_{k=1}^{\infty} W_k = E$, il résulte du théorème de Baire qu'il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que W_{n_0} est

d'intérieur non vide. Soient donc $x_0 \in E$ et $r > 0$ tel que $B_r(x_0) \subset W_{n_0}$. Alors

$$\|f(x_0 + rz)\|_F \leq n_0, \quad \forall f \in L_c(E,F), \quad \forall z \in B_1(0).$$

($\|x_0 + rz - x_0\|_E = \|rz\|_E = r\|z\|_E < r \Longrightarrow x_0 + rz \in B_r(x_0) \subset W_{n_0}$)

Par conséquent

$$|\|f(rz)\|_F - \|f(x_0)\|_F| \leq \|f(rz) + f(x_0)\|_F = \|f(x_0 + rz)\|_F \leq n_0$$

D'où

$$\sup_{f\in A} \|f\|_{L_c(E,F)} \leq \frac{n_0 + \|f(x_0)\|_F}{r} < +\infty$$

II.1.7.Application.

- Soit $(E, \|\bullet\|_E)$ un espace de Banach et $(F, \|\bullet\|_F)$ un espace vectoriel normé.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $L_c(E,F)$ convergeant simplement vers f. Alors $f \in L_c(E,F)$.

- Soit G un e.v.normé, B un sous-ensemble de G. On suppose que $\forall f \in G'$, $f(B)$ est borné. Alors B est borné.

II.1.8.Théorème. (de l'application ouverte).

Une application linéaire continue surjective entre espaces de Banach est ouverte.

La preuve du théorème repose sur les deux lemmes suivants:

3

II.1.9.Lemme.

Soit u une application linéaire continue surjective d'un espace de Banach E
dans un espace de Banach F. Alors

$$\exists \delta > 0 \text{ tel que } B_F(0,\delta) \subset \overline{u(B_E(0,1))}.$$

Preuve.
Posons

$$F_n = \overline{u(B_E(0,n))} = \overline{u(nB_E(0,1))} = n\overline{u(B_E(0,1))}, \quad n \geq 1.$$

u étant surjective, $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = F$ et alors, F étant complet, par le théorème de Baire

$$\exists n_0 \geq 1 \text{ tel que } \overset{\circ}{\widehat{F}}_n = n_0 \overset{\circ}{\widehat{\overline{u(B_E(0,1))}}} \neq \emptyset.$$

Par homothétie on a

$$\overset{\circ}{\widehat{\overline{u(B_E(0,1))}}} \neq \emptyset$$

autrement dit

$$\exists B_F(y_0,r) \subset \overline{u(B_E(0,1))}$$

$u(B_E(0,1))$ est convexe ($B_E(0,1)$ convexe et u linéaire), symétrique, ainsi que son
adhérence et donc $-y_0 \in \overline{u(B_E(0,1))}$. Or pour un convexe C, on a $C + C \subset 2C$.
D'où

$$B_F(0,r) = B_F(y_0,r) - \{y_0\} \subset \overline{u(B_E(0,1))} + \overline{u(B_E(0,1))} \subset 2\overline{u(B_E(0,1))}$$

ou encore

$$\frac{1}{2}B_F(0,r) = B_F\left(0,\frac{r}{2}\right) \subset \overline{u(B_E(0,1))}.$$

Donc $\delta = \frac{r}{2}$.
II.1.10.Lemme.
Soit u une application linéaire continue d'un espace de Banach E
dans un espace de Banach F vérifiant

$$\exists \delta > 0 \text{ tel que } B_F(0,\delta) \subset \overline{u(B_E(0,r))}.$$

Alors

$$B_F\left(0,\frac{\delta}{2}\right) \subset u(B_E(0,r)).$$

Preuve.

Par hypothèse et par homothétie, on a

$$B_F\left(0, \frac{\delta}{2^n}\right) \subset \overline{u\left(B_E\left(0, \frac{r}{2^n}\right)\right)}.$$

Posons $\delta_n = \frac{\delta}{2^n}$ et $r_n = \frac{r}{2^n}$.

4

Soit $y \in B_F(0, \delta_1)$, alors $y \in \overline{u(B_E(0, r_1))}$, et donc

$$\exists x_1 \in B_E(0, r_1) \quad \text{tel que } \|y - u(x_1)\| < \delta_2.$$

Alors

$$y - u(x_1) \in B_F(0, \delta_2) \subset \overline{u(B_E(0, r_2))}$$

et donc

$$\exists x_2 \in B_E(0, r_2) \quad \text{tel que } \|(y - u(x_1)) - u(x_2)\| < \delta_3$$

et ainsi, on construit une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ tel que

$$x_n \in B_E(0, r_n) \quad \text{et} \quad \|y - u(x_1) - u(x_2) - \bullet\bullet\bullet - u(x_n)\| < \delta_{n+1}. \qquad (*)$$

Posons $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$. Alors $(s_n)_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy car $\|x_n\| < \frac{r}{2^n}$.

E étant complet, elle converge vers un point $x \in E$. Mais

$$\|s_n\| \leq \sum_{k=1}^{n} \|x_k\| \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{r}{2^k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r}{2^k} = r.$$

Donc

$$\|x\| = \left\| \lim_{n\to+\infty} s_n \right\| = \lim_{n\to+\infty} \|s_n\| \leq r \quad \text{et} \quad x \in B_E(0, r)$$

u étant linéaire continue, en passant à la limite dans (*), on obtient:

$$\|y - u(x)\| = 0 \Longrightarrow y = u(x) \Longrightarrow B_F(0, \delta_1) = B_F\left(0, \frac{\delta}{2}\right) \subset u(B_E(0, r)).$$

Preuve du théorème.

Soit V un ouvert de E.

- Si $V = \emptyset$, $u(V) = \emptyset$ est un ouvert de F.
- Si $V \neq \emptyset$, alors $u(V) \neq \emptyset$. Par hypothèse tout $y \in u(V)$ est l'image d'un point

$x \in V$. V étant ouvert,

$$\exists B_E(x,r) \subset V \quad \text{et donc} \quad u(B_E(x,r)) \subset u(V).$$

Or

$$u(x)+B_F\left(0,\frac{\delta}{2}\right) \subset u(x)+u(B_E(0,r)) \quad \text{ou encore } B_F\left(u(x),\frac{\delta}{2}\right) \subset u(B_E(x,r)).$$

Alors

$$\forall y \in u(V),\ \exists B_F\left(y,\frac{\delta}{2}\right) \subset u(V)$$

d'où $u(V)$ est un ouvert de F.

Application.

II.1.11.Corollaire.(Théorème d'isomorphisme de Banach).

Si une application T est linéaire continue et bijective entre espaces de Banach,

alors T^{-1} est continue.

5

Preuve.

D'après le théorème de l'application ouverte, $T(B_E(0,1))$ est est un ouvert de F.

Il existe donc $B_F(0,r) \subset T(B_E(0,1))$. Comme T est bijective, on a

$$T^{-1}\left(\overline{B}_F\left(0,\frac{r}{2}\right)\right) \subset T^{-1}(B_F(0,r)) \subset B_E(0,1) \subset \overline{B}_E(0,1)$$

ce qui implique

$$T^{-1}\left(\overline{B}_F(0,1)\right) = T^{-1}\left(B_F\left(0,\frac{r}{2}.\frac{2}{r}\right)\right) = \frac{2}{r}T^{-1}\left(B_F\left(0,\frac{r}{2}\right)\right) \subset \frac{2}{r}\overline{B}_E(0,1) \subset \overline{B}_E\left(0,\frac{2}{r}\right)$$

d'où T^{-1} est bornée sur la boule unité fermée $\overline{B}_F(0,1)$ et donc elle est continue.

II.1.12.Théorème. (du graphe fermé).

Soit E et F deux espaces de Banach et T une application linéaire de E vers F. Alors T

est continue si et seulement si son graphe $G(T)$ est fermé dans $E \times F$.

Preuve.

"$\Longrightarrow$"

Supposons T continue. Soit $(x,y) \in E \times F$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n, T(x_n)) = (x,y)$.

$$\text{Alors } \lim_{n\to+\infty} x_n = x \text{ et } y = \lim_{n\to+\infty} T(x_n) = T\left(\lim_{n\to+\infty} x_n\right) = T(x).$$

Donc $y = T(x)$ et $(x,y) \in G(T)$, d'où le graphe $G(T)$ est fermé dans $E \times F$.

"$\Longleftarrow$"

Réciproquement, soit $T : E \to F$ linéaire dont le graphe $G(T)$ est fermé dans $E \times F$.

On a:

- $G(T)$ est un sous-espace vectoriel de $E \times F$ car T est linéaire.
- $E \times F$ est un espace de Banach pour la norme $\max(\|\bullet\|_E, \|\bullet\|_F)$.
- $G(T)$ fermé dans $E \times F$ complet est donc un espace de Banach.

Soit $g : E \to G(T)$, $x \longmapsto (x, T(x))$. C'est une bijection et $g^{-1} : G(T) \to E$ est la restriction à $G(T)$ la première projection pr_1. Mais pr_1 est continue, et donc g^{-1} est linéaire bijective et continue. D'après le théorème d'isomorphisme de Banach, $\left(g^{-1}\right)^{-1} = g$ est continue. Or $T = pr_2 \circ g$ où pr_2 est la deuxième projection.

Comme pr_2 est continue, T est continue.

Application.

II.1.13.Corollaire.

Une application linéaire T d'un espace de Banach E dans un espace de Banach F est continue si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E telle que:

- $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$,
- $\lim\limits_{n\to+\infty} T(x_n) = y$,

on a: $y = T(x)$.

Preuve.

"$\Longleftarrow$" évident.

"$\Longrightarrow$"

$\forall (x_n, T(x_n)) \in G(T)$, $\left[(x_n, T(x_n)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (x, T(x)) \right] \Longrightarrow G(T)$ est fermé et donc T est continue.

II.2. Dualité.

II.2.1. Définition.

Soit E un espace de Banach sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

On appelle dual (topologique) de E et on note E' l'ensemble des formes linéaires continues sur E.

6

II.2.2. Théorème.

E' muni de l'application qui à $f \in E'$ associe $\|f\|_{E'}$ telle que

$$\|f\|_{E'} = \sup_{\|x\|_E = 1} |f(x)| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} |f(x)| = \sup_{x\neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|_E}$$

est un espace vectoriel normé complet.

II.2.3. Proposition.

L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définie par

$$\begin{array}{cccc} \langle \cdot, \cdot \rangle & : & E' \times E & \to & \mathbb{K} \\ & & (\varphi, x) & \longmapsto & \langle \varphi, x \rangle = \varphi(x) \end{array}$$

est une forme bilinéaire continue. On l'appelle application de dualité ou crochet de dualité.

Preuve.

Il est bien clair que c'est une forme bilinéaire sur $E' \times E$. Par définition de la norme de E', on a

$$|\langle \varphi, x \rangle| = |\varphi(x)| \leq \|\varphi\|_{E'} \|x\|_E$$

d'où la continuité.

II.2.4. Théorème. (Hahn-Banach).

Soit E un espace vectoriel normé, F un sous-espace vectoriel de E et φ une forme linéaire continue sur F muni de la topologie induite, c-à-dire telle que

$$\exists C > 0, \forall x \in F, |\varphi(x)| \leq C \|x\|_E .$$

Il existe alors un élément $\widetilde{\varphi} \in E'$ tel que $\widetilde{\varphi}_{\backslash F} = \varphi$ et tel que $\left\|\widetilde{\varphi}\right\|_{E'} = \|\varphi\|_{F'}$.

II.2.5. Remarque.

Le théorème de Hahn-Banach est un théorème fondamental de prolongement de forme linéaire continue définie sur sous-espace vectoriel.

II.2.5. Corollaire.

Soit x un élément non nul d'un espace vectoriel normé E. Il existe une forme linéaire continue φ telle que l'on ait

$$\langle \varphi, x \rangle = \|x\|_E \qquad \text{et} \qquad \|\varphi\|_E = 1.$$

Preuve.

Posons $F = \mathbb{K}x$ et pour tout $y = \lambda x \in F, \varphi(y) = \lambda \|x\|_E$. On a donc $\varphi(x) = \|x\|_E$ et pour tout $y \in F, |\varphi(y)| = |\lambda| \|x\|_E = \|\lambda x\|_E = \|y\|_E$, d'où $\|\varphi\|_{E'} = 1$.

II.2.7. Définition.

Soit E un espace vectoriel normé et E' son dual. On appelle bidual de E, et l'on note E", le dual de E'.

II.2.8. Proposition.

Soit J l'application de E dans E" définie par

$$J : E \to E"$$

$$x \longmapsto J(x)$$

où

$$J(x) : E' \to \mathbb{K}$$

$$\varphi \longmapsto J(x)(\varphi) = \langle \varphi, x \rangle = \varphi(x).$$

Alors J est une injection isométrique de E dans E".

Preuve.

Il est clair que J est linéaire E dans E". De plus, elle est continue car

$$|J(x)(\varphi)| \leq \|\varphi\|_{E'} \|x\|_E$$

ce qui montre aussi que $\|J(x)\|_{E"} \leq \|x\|_E$. Poir démontrer l'égalité, on utilise

le corollaire du théorème de Hahn-Banach: pour $x \neq 0$ de E, il existe $\varphi_0 \in E'$

telle que $|J(x)(\varphi_0)| = \|x\|_E$ et $\|\varphi_0\|_{E'} = 1$.

II.2.9. Définition.

On dit qu'un espace vectoriel normé E est réflexif si l'application J est surjective.

$$(J(E) = E")$$

II.2.10. Proposition.

Si un espace vectoriel normé est réflexif, alors c'est un espace de Banach.

Preuve.

E est isométrique à son bidual E" qui est un espace de Banach.

II.2.11. Exemples.

- Tout espace vectoriel normé de dimension finie est réflexif.
- Tout espace de Hilbert est réflexif.
- Les espaces $l^p(\mathbb{N})$ pour $1 < p < +\infty$ sont réflexifs.
- $l^1(\mathbb{N})$ et $l^\infty(\mathbb{N})$ ne sont pas réflexifs.

II.3. Convergence faible.

II.3.1. Définition.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments d'un espace de Banach E et x un élément de E.

On dit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers x si,

$$\forall \varphi \in E', \quad \lim_{n\to+\infty} \varphi(x_n) = \varphi(x)$$

On note $x_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} x$.

II.3.2. Définition.

Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite faiblement de Cauchy si la suite $(\varphi(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy

pour toute $\varphi \in E'$. Un espace vectoriel normé E est dit faiblement complet si toute

suite de E qui est faiblement de Cauchy converge faiblement dans E.

II.3.3. Proposition..

La limite faible est unique.

II.3.4. Théorème.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'éléments d'un espace de Banach E et x et y

deux éléments de E. On a alors:

- $x_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} x \Longrightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$.
- $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x \Longrightarrow x_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} x$.
- $\varphi_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varphi$ dans E' et $x_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} x \Longrightarrow \varphi_n(x_n) \to \varphi(x)$.

II.3.5. Remarque.

En dimension finie, la convergence faible est équivalente la convergence forte.

II.4. Topologie faible.

Soit E un espace de Banach et E' son dual topologique.

II.4.1. Définition.

On appelle topologie faible sur E et on note $\sigma(E, E')$, la topologie la moins fine

rendant continues toutes les formes linéaires de E'.

II.4.2. Remarque.

Si O est un ouvert de $\mathbb{C}$ ou de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(O)$ est un ouvert pour la topologie faible de E.

$$(\ \forall f \in E'\ ) .$$

Les ouverts pour la topologie faible sont les réunions quelconques d'intersections finies

d'ensembles de type $f^{-1}(O)$ avec O ouvert de $\mathbb{R}$ (ou de $\mathbb{C}$).

L'ensemble $\left\{x \in E \ / \ \forall i = \overline{1,n},\ \ |f_i(x) - f_i(x_0)| < \alpha_i,\ \ \forall f_i \in E'\right\}$ est un voisinage

ouvert de x_0 pour la topologie faible.

II.4.3. Proposition.

La topologie faible est séparée.

On peut munir E de deux topologies séparées,

- la topologie forte associée à la norme de E.
- la topologie faible $\sigma(E, E')$.

II.4.5. Remarque.

Par construction, la topologie faible $\sigma(E, E')$ est moins fine que la topologie forte associée à la norme de E, et donc tout ouvert pour la topologie faible est un ouvert pour la topologie forte.

Si une topologie possède moins d'ouverts, elle possède, par contre, plus de compacts.

C'est ce qui montre l'utilité de la topologie faible. Les compacts jouent un rôle important quand on cherche à établir des théorèmes d'existences.

I.8.6. Proposition.

En dimension finie, les deux topologies sont les mêmes.

II.5. Convexité uniforme.

II.5.1. Définition.

Soit E un espace de Banach, on dit que E est uniformément convexe si, pour tout $\epsilon > 0$ il existe un $\delta(\epsilon) > 0$ tel que pour tout x et $y \in \overline{B}_E(0,1)$ si $\|x - y\| \geq \epsilon$ alors $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1 - \delta(\epsilon)$.

Remarque.

- L'uniforme convexité dépend de la norme.
- Tout espace de Hilbert est uniformément convexe. (Identité du parallélogramme).
- Les espaces l^p pour $1 < p < +\infty$, sont uniformément convexes.
- Les espaces l^1 et l^∞ ne sont pas uniformément convexes.

Théorème. (Millman-Pettis).

Tout espace de Banach uniformément convexe est réflexif.

Références.

W.Rudin, Functional Analysis (McGraw-Hill, NewYork, 1991, 2e édition).

H.Brézis, Analyse, Théorie et applications (Masson, Paris, 1992, 3e tirage).