7- القيم الحدية (العظمى والصغرى)

1. تعريف:

لتكن $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ معرفا على I ولتكن $x_0 \in I$، نقول أن للدالة f قيمة عظمى مطلقة عند x_0 إذا تحقق الشرط:

$$\forall x \in I : f(x) \leq f(x_0)$$

- نقول أن لـ f قيمة صغرى مطلقة عند x_0 اذا تحقق الشرط:

$$\forall x \in I : f(x) \geq f(x_0)$$

أي أن الشرط يتحقق بصورة مطلقة ودون أي قيد على $x \in I$.

- نقول أن للدالة f قيمة عظمى نسبية (أو محلية) عند x_0 إذا تحقق الشرط:

$$\exists \delta_1 > 0 , |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$$

أي أنه يوجد مجال $L =]x_0 - \delta_1 , x_0 + \delta_1[$ مركزه x_0 ويتحقق عليه الشرط السابق من أجل كل $x \in L$.

- نقول أن للدالة f قيمة صغرى نسبية (أو محلية) عند x_0 إذا تحقق الشرط:

$$\exists \delta_2 > 0 : |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow f(x) \geq f(x_0)$$

مثال ①: لتكن

$$f : [-2,2] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = x^4 - x^3$$

باستعمال جدول التغيرات نحصل على:

x	-2		0		$\frac{4}{3}$		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	48	↘	0	↗	$f\left(\frac{4}{3}\right)$	↘	-16

نلاحظ أن: $\forall x \in [-2,2] : f(x) \leq f(-2) = 48$

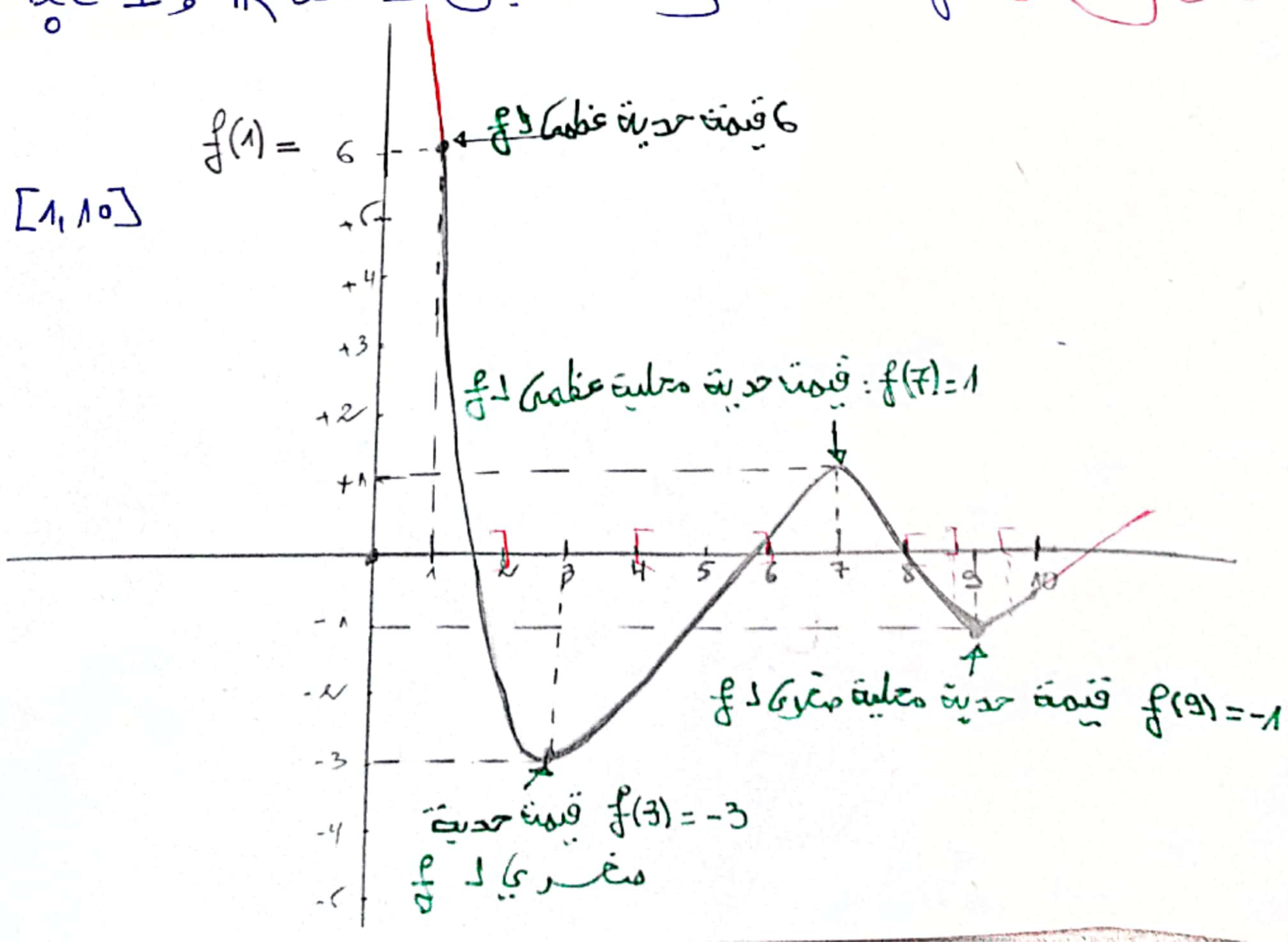
- $f(-2) = 48$ هي القيمة الحدية العظمى لـ f على المجال $[-2,2]$

$\forall x \in [-2,2] : f(x) \geq f(2) = -16$

- $f(2) = -16$: القيمة الحدية الصغرى لـ f على المجال $[-2,2]$

مثال ②: f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$ و $x_0 \in I$

$I = [1,10]$



ملاحظة

- في مجال ما هناك قيمة حدية عظمى أو هناك
هناك قيمة حدية صغرى واحدة
- لكن القيم الحدية المحلية يمكن أن لا تكون أي
قيم حدية محلية لا صغرى ولا كبرى في مجال ما
ويمكن أن تكون لدينا عدة قيم حدية محلية
في مجال ما وبالتالي هناك فرق بين القيم
الحدية المحلية والقيم الحدية

يمكن التعرف على القيم الحدية بطريقة أخرى:

- اذا كان f معرفا على المجال المغلق والمحدود $[a,b]$ ووجد المشتق على يمين a أي $f'(a+0)=f'(a)$ ووجد المشتق على يسار b أي $f'(b-0)=f'(b)$ فانه لدينا ما يلي:

- f قيمة عظمى محلية (نسبية) عند a اذا كان: $f'(a)<0$
- f " " " " عند b " ": $f'(b)>0$
- f " صغرى " " عند a " ": $f'(a)>0$
- f " صغرى " " عند b " ": $f'(b)<0$

عموما لايجاد القيم العظمى والقيم الصغرى لدالة f فإننا نبحث من أجل تلك النقاط عن حيث:

أ) ينعدم المشتق
ب) لا يوجد مشتق
ج) يكون مجال تعريف الدالة f نصف مفتوح

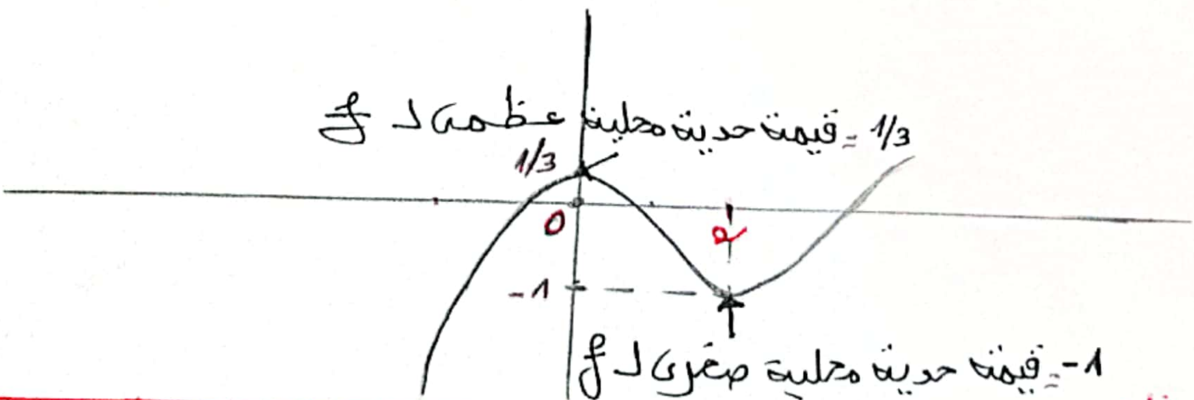
أي أن هذه قيم المتغير x المرشحة كي تكون لـ f قيمة حدية (عظمى أو صغرى) نسمي هذه النقاط x بالنقاط الحرجة لبلوغ f قيمة حدية ولكي نقرر أي هذه النقاط قيم حدية (عظمى أو صغرى) علينا أن نقارن قيم f في هذه النقط مع بعضها البعض ومع حلول النقط المجاورة

مثال 3: لتكن $f(x)=\frac{x^3}{3}-x^2+\frac{1}{3}$

$$f'(x)=x^2-2x=x(x-2)$$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$1/3$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

- هناك قيمة عظمى نسبية لـ f عند $x_0=0$ وقيمتها $f(0)=1/3$
- هناك قيمة صغرى نسبية لـ f عند $x=2$ وقيمتها $f(2)=-1$



نظرية: لتكن $f: I=[a,b]\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

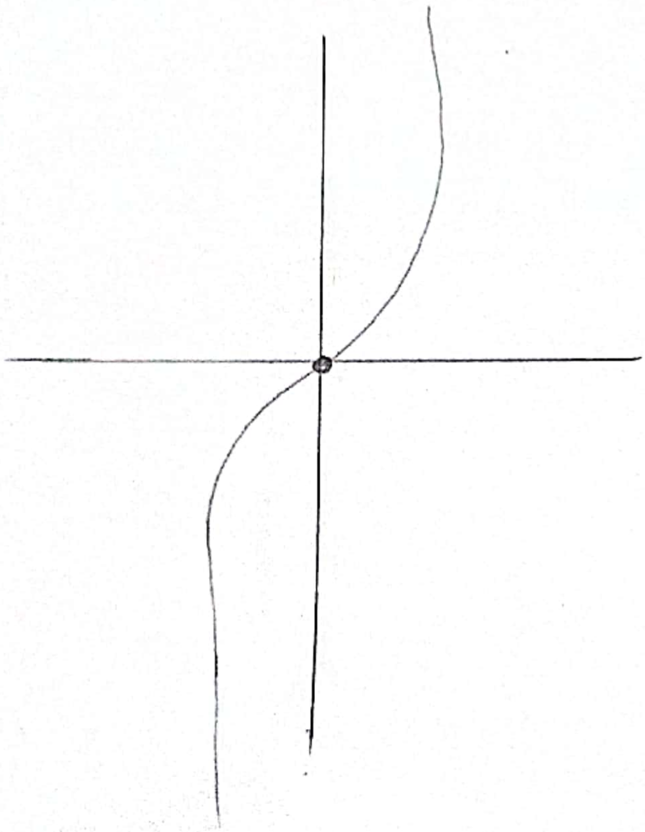
اذا كانت f تقبل الاشتقاق على $]a,b[$ وكان لـ f نهاية عظمى محلية (نسبية) (أو صغرى) عند $x_0\in]a,b[$ فإن $f'(x_0)=0$

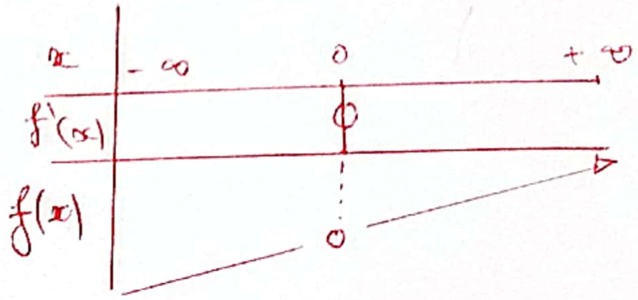
والعكس غير صحيح دومًا.

مثال: الدالة x^3 ليس لها أي نقاط عظمى أو صغرى مطلقة بالرغم من ان:

$$f'(x) = 2x^3$$

ينعدم عند $x = 0$





2- نظرية رول : (Rolle)

نظرية:

ليكن $f:[a,b]\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ بحيث يكون

1- f مستمرا على $[a,b]$

2- f يقبل الاشتقاق على $]a,b[$

3- $f(a)=f(b)$

عندئذ توجد على الأقل نقطة $c\in]a,b[$ تحقق: $f'(c)=0$

مثال: طبق شروط رول على الدالة $f(x)=x^2-1$ على المجال $[-1,1]$

1) f مستمرة على $\mathbb{R}$ ومنه f مستمرة على $[-1,1]$

2) f قابلة للاشتقاق على $]-1,1[$

3) $f(1)=0=f(-1)$

حسب رول فإنه يوجد على الأقل $c\in]-1,1[$ بحيث $f'(c)=0$

ملاحظة:

1) حسب شروط رول حيث أن $f'(c)=0 \Leftrightarrow (C_f)$ يقبل على الأقل مماسا موازيا لحامل محور الفواصل.

2) شروط رول كافية وليست لازمة.

مثال: لتكن $f(x)=x^3$ ، المجال $[-1,1]$

1- f مستمرة على $\mathbb{R}$ إذن f مستمرة على $[-1,1]$

2- f قابلة للاشتقاق على $]-1,1[$

3- $f(1)\neq f(-1)$

لكن يوجد c حيث: $c\in]-1,1[$ من أجله $f'(c)=0$ $(c=0)$

3- نظرية التزايدات المنتهية :

نظرية :

لتكن $f:[a,b]\subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ بحيث يكون

1) f مستمرة على $[a,b]$

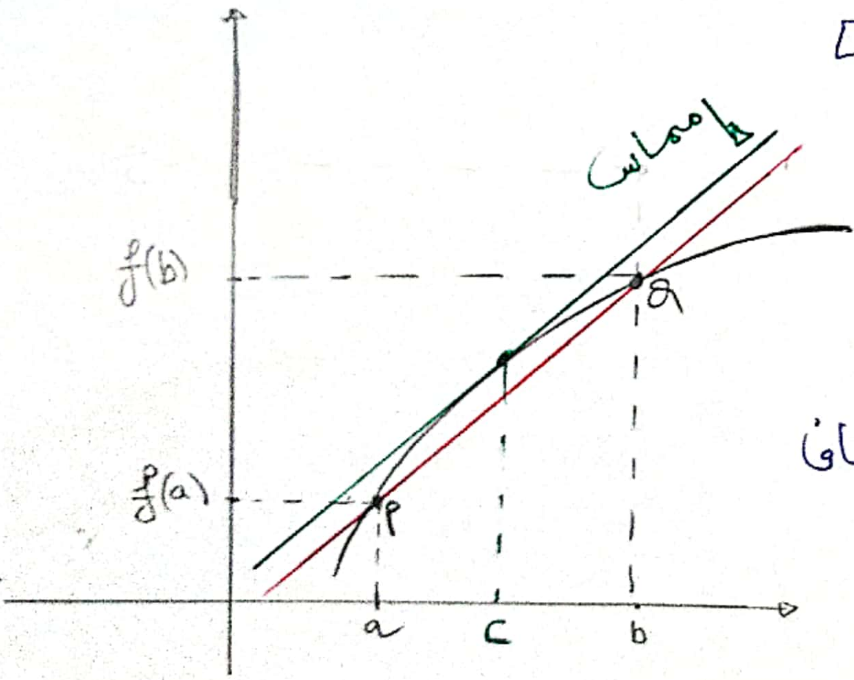
2) f يقبل الاشتقاق على $]a,b[$

عندئذ توجد على الأقل نقطة $c \in]a,b[$ تحقق

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

ملاحظة :

نظرية رول هي حالة خاصة من نظرية التزايدات المنتهية



f دالة معرفة على مجال $[a,b]$

- f مستمرة على $[a,b]$
- f قابلة للاشتقاق على $]a,b[$

وكان $f(a)$ و $f(b)$ كيفيين بحيث $f(a)\neq f(b)$

بالتخمين لما أن f قابلة للاشتقاق على مجال $]a,b[$ فحتما يوجد مماس يوازي المستقيم (PQ) له نفس معامل التوجيه

أي : معامل توجيه المستقيم (PQ) $\rightarrow \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \leftarrow$ معامل توجيه المماس

وعليه يكون $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$

نظرية:

اذا كان $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ مستمرًا وقابلًا للاشتقاق على $]a,b[$ عندئذ نقول أن:

1- f متزايد على $]a,b[$ اذا كان: $\forall x\in]a,b[: f'(x)>0$

2- f متناقص على $]a,b[$ اذا كان: $\forall x\in]a,b[: f'(x)<0$

4- دراسة حالة عدم التعيين: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{0}{0}$

نظرية (قاعدة لوبيتال):

لتكن الدالتين $f,g:]a,b[\to\mathbb{R}$ بحيث الشروط التالية محققة

1) $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} a} f(x)=0$ و $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} a} g(x)=0$

2) f,g يقبلان الاشتقاق على $]a,b[$

3) $\forall x\in]a,b[,\ g'(x)\neq 0$

4) النهاية $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=k$ موجودة حيث $k\in[-\infty,+\infty]$

عندئذ تكون: $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=k$

ملاحظات :

1) ندرس الحالة لما $x \to b$ بطريقة مشابهة أو عندما $x \to x_0$ حيث $x_0 \in]a,b[$

2) اذا كانت $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{0}{0}$ فنطبق نظرية لوبيتال من جديد على f' و g' أي أنه يمكن تطبيق النظرية عدة مرات متتالية في حالة توفر شروطها.

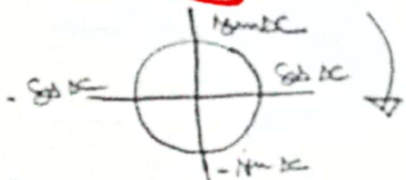
3) تبقى النظرية صحيحة في حالة $\frac{\infty}{\infty} = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} a} \frac{f(x)}{g(x)}$

4) تبقى النظرية صحيحة في حالة $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = 0$ ، $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$

5) يتم ايجاد النهاية $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ عندما تكون حالة عدم التعيين بتطبيق قاعدة لوبيتال اذا كانت النهاية $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ موجودة حسب النظرية. أما اذا كانت النهاية $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ غير موجودة فإن هذا لا يعني اطلاقا أن النهاية $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ غير موجودة.

مثال: لحساب النهاية

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}=\frac{0}{0} \quad \text{ح ع ت}$$



شروط لوبيتال متوفرة

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{0}{1}=0$$

إذن:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}=0$$

ملاحظة:

يمكن رد الحالتين $0.\infty$ و $+\infty-\infty$ لعدم التعيين إلى الحالتين $\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$ ثم نطبق النظرية.

مثال: لحساب $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos x}-tg\, x\right)$

نلاحظ أن: $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos x}-tg\, x\right)=\infty-\infty$

لذا نكتب:

$$\frac{1}{\cos x}-tg\, x=\frac{1-\sin x}{\cos x}\xrightarrow[x\to\frac{\pi}{2}]{}\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\sin x)'}{(\cos x)'}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{-\sin x}=\frac{0}{1}=0$$

إذن:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos x}-\frac{1}{tg\, x}\right)=0$$

ملاحظة:

يمكن رد حالات عدم التعيين 0^0 ، 1^∞ ، ∞^0 إلى الحالة $0.\infty$ و بالتالي إلى $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$ وذلك باستعمال العلاقة $y^x = e^{x\log y}$

مثال : لحساب $\lim_{x \to +\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^x$

لدينا $\lim\left(1+\frac{5}{x}\right)^x = 1^\infty$ فنكتب :

$$\lim_{x \to +\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^x = \lim_{x \to +\infty} e^{x\log\left(1+\frac{5}{x}\right)} = e^{+\infty.0}$$

نطبق النظرية على $x\log\left(1+\frac{5}{x}\right)$ بحيث يمكن أن نكتب :

$$x\log\left(1+\frac{5}{x}\right) = \frac{\log\left(1+\frac{5}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

اذن $f(x)=\log\left(1+\frac{5}{x}\right)$ و $g(x)=\frac{1}{x}$ ومنه يصبح لدينا

$$\lim_{x \to +\infty} x\log\left(1+\frac{5}{x}\right) = \lim_{x \to +\infty}\frac{\log\left(1+\frac{5}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to +\infty}\left(\frac{\frac{5}{x^2}}{1+\frac{5}{x}} * x^2\right) = 5$$

0

اذن : $\lim\left(1+\frac{5}{x}\right)^x = e^5.$

ملاحظة:

الحالات التي لا تمثل حالات عدم التعيين

اذا كان $a \in \mathbb{R}$ فإن $a+(+\infty) = +\infty$; $a-(+\infty) = -\infty$

$a.(+\infty) = +\infty$ عندما يكون $a > 0$ و $a.(+\infty) = -\infty$ في حالة $a < 0$

$a.(-\infty) = -\infty$ " " $a > 0$ و $a.(-\infty) = +\infty$ في حالة $a < 0$

$(+\infty)(+\infty) = +\infty$ و $(-\infty)(-\infty) = +\infty$ ، $(+\infty)+(+\infty) = +\infty$