La dégénérescence dans un primal :

Une solution est dite dégénérée si I est une base et :

$X_i = 0 \quad i \notin I$

$X_j \neq 0 \quad i \in I$

$X_k = 0 \quad k \in I$ ➔ Z est constante

A un certain nombre d'itérations Z reste constante :

- Cas ou plusieurs $\mathrm{Min}(\frac{bi}{Ai,r} \,/\, A_{i,r} > 0)$.

  Exemple :

$X_i \geq 0$ i= 1,5 ;

$\mathrm{Max}(Z) = 6x_1 + 2x_2$

$x_1+2x_2+x_3= 0$ (1)

$2x_1-x_2+x_4= 0$ (2)

$3x_1+x_2+x_5= 6$ (1) et (2) ont la même valeur, pour créer une différence dans le second membre tel que les contraintes non redondantes, le second membre est remplacer par :

La règle lexicographique

$$\mathbf{b_i = b_i + \sum_{j=1}^{n} ai,j * \varepsilon^j \quad \varepsilon > 0 \quad \varepsilon \text{ petit}}$$

$b_1 = 0+ \varepsilon + 2\varepsilon^2 + \varepsilon^3$ I

$b_2 = 0+ 2\varepsilon - \varepsilon^2 + \varepsilon^4$ II Min (I/1, II/2,III/3)= MIN(a,b,III/3)

6 $= 6 + 3\varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^5$ III

A - b = $5\varepsilon^2 + 2\varepsilon^3 + \varepsilon^5 > 0$ ➔ a-b> 0 ➔ a>b

On choisit b puisque il satisfait le min et indique le rang du vecteur sortant

- Cas de la même valeur du cout dans la fonction objective :

  $\boldsymbol{c_i = c_i + \sum_{i=1}^{m} ai,j * \varepsilon^i \quad \varepsilon > 0}$ Ɛ petit, choisir le c_i le plus grand qui indique le vecteur rentrant dans la base.

<u>Les méthodes de résolution algébrique d'un programme linéaire dual</u> :

Soient un programme primal noté P et son dual noté D

$$(P)\begin{cases} X \geq 0 \\ AX \leq B \\ MAX(Z)= CX \end{cases} \qquad (D)\begin{cases} Y \geq 0 \\ Y^T A \geq C \\ MIN(W)= Y^T B \end{cases}$$

La forme canonique de (D) est :

$$(D')\begin{cases} Y \geq 0 \\ - Y^T A \leq - C \\ MAX(- W)= - Y^T B \end{cases}$$

1. **<u>Résolution par la méthode simplexe duale</u>**

<u>Algorithme de la Méthode du Dual Simplexe</u>

<u>PAS 1</u> **RENDRE (D) EN (D')**

<u>PAS 2</u> **VERIFIER SI LE SECOND MEMBRE (D) EST ≥ 0**

<u>PAS 3</u> **Indice (s) vecteur sortant est :**
s = MIN(second membre(C) de (D')/ C < 0)

<u>PAS4</u> **Indice (r) vecteur rentrant est :**
r=MIN($\frac{\textbf{vecteur coût(B)}}{A(s,j)}$ **de (D') /** $A(s,j)$ **< 0)**

<u>PAS5</u> **Pivot = A(s,r) ;**

Pivotage selon la formule de GAUSS

<u>PAS6</u> **aller à <u>PAS2</u>**

Exemple d'applications

Y1 ≥ 0, Y2≥0,Y3 ≥0

MIN(14Y1+10Y+3Y3)

Y1+2Y2+ Y3 ≥2

2Y1 -Y2 -Y3 ≥1:

Standardisation par rapport à la base I et représentation matricielle de la forme standard /base I

Y1	Y2	Y3	X1	X2	B
-1	-2	-1	1	0	-2
-2	1	1	0	1	-1
-14	-10	-3	0	0	Z-0
14	5	3	0	0	

MIN(Cj)

ITTERATION1

Y1	Y2	X1	.	X2	B
1	2	1	-1	0	2
-3	-1	0	1	1	-3
-11	-4	0	-3	0	Z+6
14	5	3	0	0	

Y3 DANS LA BASE (vecteur 1)

ITTERATION II

Y1	Y2	X1	.	X2	B
0	5/3	1	-2/3	1/3	1
-3	-1	0	1	1	1
0	-1/3	0	-20/3	-11/3	Z+17
14	5	3	0	0	

La solution optimale est : Y1=Y2=1 Z= 17

La solution du dual est X1=-20/3 , X2= -11/3

2. <u>La méthode de la transposé</u>

   Elle consiste a transposé le problème dual (D) et le rendre primal de manière que :

1. **La variable principale de P (primal) devienne une variable d'écart de D (Dual) et la variable d'écart de P devienne la variable principale de D .**
2. **Le vecteur coût de P (primal) devient le vecteur second membre de D (dual).**
3. **Le vecteur second membre de P (primal) devient Le vecteur coût de D (dual).**
4. **Le vecteur de base de P devient le vecteur hors base de D et vice versa.**

   Une fois la transformation de D en P est faite par l'application de ces sus 4 règles on applique le simplexe normal sauf que la lecture des résultats des variables se font d'une façon verticale (il faut lire les valeurs du vecteur hors base du primal)

On utilise la méthode du simplexe et la solution est dans la transposé selon la manière sus citée.

Exemple d'applications de la méthode de la transposée :

Le dual

$$D \begin{cases} X_1 \geq 0, \quad X_2 \geq 0 \\ 3X_1 + 5X_2 \geq 12 \\ 4X1 + 7X2 \geq 18 \\ 2X1 + 6X2 \geq 24 \\ MIN(w) = 6X1 + 8X2 \end{cases}$$

le primal par la transposée

$$P \begin{cases} y_1 \geq 0, \; y_2 \geq 0 \; ? \; y_3 \geq 0 \\ 3Y_1 + 4Y_2 + 2Y_3 \quad 6 \\ 3Y_1 + 4Y_2 + 2Y_3 \quad 6 \\ MAX(Z) = 12Y_1 + 18Y_2 + 24Y_3 \end{cases}$$

On applique le simplexe normal sur la transposée P. une fois la solution optimale atteinte, il faut lire les résultats à partir du vecteur hors base de P (autrement dit verticale).