CORRECTION TD

Correction exercice 1.

1.
$$x * y = xy + (x^2 - 1)(y^2 - 1) = yx + (y^2 - 1)(x^2 - 1) = y * x$$
La loi $*$ est commutative

Pour montrer que la loi n'est pas associative, il suffit de trouver x, y et z tels que :
$$x * (y * z) \neq (x * y) * z$$
Comme on le verra ci-dessous, 1 sera l'élément neutre il ne faut pas prendre 1 dans x, y et z.

Prenons, par exemple : $x = 0$, $y = 2$ et $z = 3$
$$x * (y * z) = 0 * (2 * 3) = 0 * \left(2 \times 3 + (2^2 - 1)(3^2 - 1)\right) = 0 * (6 + 3 \times 8) = 0 * 30$$
$$= 0 \times 30 + (0^2 - 1)(30^2 - 1) = -899$$
$$(x * y) * z = (0 * 2) * 3 = \left(0 \times 2 + (0^2 - 1)(2^2 - 1)\right) * 3 = (-3) * 3$$
$$= -3 \times 3 + ((-3)^2 - 1)(3^2 - 1) = -9 + 8^2 = 55$$
La loi $*$ n'est pas associative
$$1 * x = 1 \times x + (1^2 - 1)(x^2 - 1) = x$$
De plus, comme la loi est commutative $x * 1 = 1 * x$

On a bien $x * 1 = 1 * x = x$, 1 est l'élément neutre.

2.
$$x * y = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{y^2 + x^2} = y * x$$
La loi $*$ est commutative.
$$(x * y) * z = \sqrt{x^2 + y^2} * z = \sqrt{\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
En reprenant le calcul ci-dessus en changeant (x, y, z) en (y, z, x) :
$$(y * z) * x = \sqrt{y^2 + z^2 + x^2}$$
Comme $*$ est commutative :
$$(y * z) * x = x * (y * z)$$
Et finalement :
$$(x * y) * z = x * (y * z)$$
La loi $*$ est associative.

Remarque : On aurait pu calculer directement $x * (y * z)$

$$0 * x = \sqrt{0^2 + x^2} = |x| = x, \quad \text{car } x \geq 0$$
Comme $*$ est commutative
$$0 * x = x * 0$$
Et finalement
$$0 * x = x * 0 = x$$
0 est l'élément neutre.

Supposons que x admette un symétrique y
$$x * y = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$$
Or $x > 0$ et $y > 0$ donc $x * y = 0$ est impossible, pour tout $x > 0$, x n'a pas de symétrique.

Correction exercice 2.

1. Si $x \neq 0$ et $x' \neq 0$ alors $xx' \neq 0$ donc $(x, y) * (x', y') = (xx', xy' + y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

   La loi $*$ est une loi interne.
$$(x, y) * \left((x', y') * (x'', y'')\right) = (x, y) * (x'x'', x'y'' + y') = (xx'x'', x(x'y'' + y') + y)$$
$$= (xx'x'', xx'y'' + xy' + y)$$

Et

$$\big((x,y)*(x',y')\big)*(x'',y'')=(xx',xy'+y)*(x'',y'')=(xx'x'',xx'y''+xy'+y)$$

Donc la loi $*$ est associative.

Soit (a,b) tel que pour tout $(x,y)\in G$:

$$(a,b)*(x,y)=(x,y)=(x,y)*(a,b)$$

Ces égalités équivalent à :

$$(ax,ay+b)=(x,y)=(xa,xb+y)\Leftrightarrow\begin{cases}ax=x=xa\\ ay+b=y=xb+y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=0\end{cases}$$

Donc $(1,0)$ est l'élément neutre.

Soit $(x,y)\in G$, on cherche (x',y') tel que $(x,y)*(x',y')=(1,0)=(x',y')*(x,y)$

Ces égalités équivalent à :

$$(xx',xy'+y)=(1,0)=(x'x,x'y+y')\Leftrightarrow\begin{cases}xx'=1=x'x\\ xy'+y=0=x'y+y'\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x'=\dfrac{1}{x}\\ xy'+y=0=\dfrac{1}{x}y+y'\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x'=\dfrac{1}{x}\neq 0\\ y'=-\dfrac{y}{x}\end{cases}$$

Le symétrique de (x,y) est $\left(\frac{1}{x},-\frac{y}{x}\right)$.

Donc $(G,*)$ est un groupe.

Comme $(1,2)*(2,0)=(2,2)$ et que $(2,0)*(1,2)=(2,4)$ il est clair que ce groupe n'est pas commutatif.

2. L'élément neutre de $(G,*)$, $(1,0)\in]0,+\infty[\times\mathbb{R}$.

   Soit $(x,y)\in]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ et $(x',y')\in]0,+\infty[\times\mathbb{R}$. Alors

$$(x,y)*\left(\frac{1}{x'},-\frac{y'}{x'}\right)=\left(\frac{x}{x'},x\left(-\frac{y'}{x'}\right)+y\right)=\left(\frac{x}{x'},\frac{-xy'+x'y}{x'}\right)$$

   Comme $\frac{x}{x'}>0$ alors $\left(\frac{x}{x'},\frac{-xy'+x'y}{x'}\right)\in]0,+\infty[\times\mathbb{R}$.

   Donc $(]0,+\infty[\times\mathbb{R},*)$ est un sous-groupe de $(G,*)$.

Correction exercice 3.

1. $(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')\in A$ donc la loi est interne.

$$(x,y)+[(x',y')+(x'',y'')]=(x,y)+(x'+x'',y'+y'')=\big(x+(x'+x''),y+(y'+y'')\big)$$
$$=\big((x+x')+x'',(y+y')+y''\big)=[(x,y)+(x',y')]+(x'',y'')$$

   Donc la loi $+$ est associative.

$$(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')=(x'+x,y'+y)=(x',y')+(x,y)$$

   Donc la loi $+$ est commutative

Soit (a, b) tel que $(x, y) + (a, b) = (x, y)$, il est clair que $(a, b) = (0,0)$ est l'unique élément neutre.
Soit (x', y') tel que $(x, y) + (x', y') = (0,0)$ cela équivaut à

$$(x + x', y + y') = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} x + x' = 0 \\ y + y' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$

Donc le symétrique de (x, y) est $(-x, -y)$.
Donc $(A, +)$ est un groupe commutatif.

2.

a) $(x, y) * (x', y') = (xx', xy' + x'y) = (x'x, x'y + xy') = (x', y') * (x, y)$ donc $*$ est commutative.

b)

$$[(x, y) * (x', y')] * (x'', y'') = (xx', xy' + x'y) * (x'', y'') = \big(xx'x'', xx'y'' + x''(xy' + x'y)\big)$$
$$= (xx'x'', xx'y'' + x''xy' + x''x'y)$$
$$(x, y) * [(x', y') * (x'', y'')] = (x, y) * (x'x'', x'y'' + x''y') = (xx'x'', x(x'y'' + x''y') + x'x''y)$$
$$= (xx'x'', xx'y'' + xx''y' + x'x''y)$$

Donc $[(x, y) * (x', y')] * (x'', y'') = (x, y) * [(x', y') * (x'', y'')]$
La loi $*$ est associative.

c) Soit (e, f) tel que pour tout $(x, y) \in A$, $(x, y) * (e, f) = (x, y)$, e et f vérifient :

$$\begin{cases} xe = x \\ xf + ye = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e = 1 \\ xf + y = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e = 1 \\ f = 0 \end{cases}$$

$(1,0) \in A$ est l'élément neutre de A pour la loi $*$.

d) Toutes les propriétés pour qu'un ensemble muni de deux lois soit un anneau sont dans les questions précédentes sauf la distributivité de $*$ par rapport à l'addition (à gauche ou à droite puisque la loi $*$ est commutative, c'est d'ailleurs cette commutativité qui rend l'anneau commutatif).

$$(x, y) * [(x', y') + (x'' + y'')] = (x, y) * (x' + x'', y' + y'')$$
$$= (x(x' + x''), x(y' + y'') + (x' + x'')y) = (xx' + xx'', xy' + xy'' + x'y + x''y)$$
$$= (xx' + xx'', xy' + x'y + xy'' + x''y) = (xx', xy' + x'y) + (xx'', xy'' + x''y)$$
$$= (x, y) * (x', y') + (x, y) * (x'', y'')$$

Et voilà, $(A, +, *)$ est un anneau commutatif.