Chapitre 2. Equation aux Dérivées Partielles

1. Définition

Une équation aux dérivées partielles EDP est une équation dont les solutions sont les fonctions inconnues vérifiant certaines conditions concernant leurs dérivées partielles. C'est une équation mathématique contenant en plus de la variable dépendante (U dans les cas suivants) des variables indépendantes $(x, y, \ldots) \in \boldsymbol{R}^n$ et une ou plusieurs dérivées partielles qu'on peut écrire sous la forme :

$$F(x, y, \ldots, U, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \ldots) = 0 \qquad (2.1)$$

Exemple :

L'équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \qquad (2.2)$$

2. Classification des EDP

Nous avons l'habitude de classer les équations aux dérivées partielles en trois grandes classes fondamentales d'équations : les équations elliptiques (qui servent typiquement à décrire des phénomènes d'équilibre en physique) pour les problèmes stationnaires, les équations paraboliques (qui permettent de décrire des phénomènes de diffusion) et les équations hyperboliques (qui permettent de décrire les phénomènes de propagation) pour les problèmes d'évolution.

La forme générale d'une équation aux dérivées partielles du second ordre est :

$$A\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 U}{\partial xy} + C\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + D\frac{\partial U}{\partial x} + E\frac{\partial U}{\partial y} + FU = G(x, y) \qquad (2.3)$$

La classe d'une telle équation est déterminée par le calcul de :

$$\Delta = B^2 - 4AC \qquad (2.4)$$

- Si $\Delta < 0$, l'équation est Elliptique

Exemple :

Equation de Poisson ou de Laplace si $f = 0$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = f \tag{2.5}$$

- Si $\Delta = 0$, l'équation est Parabolique

Exemple :

Equation de la chaleur

$$\frac{\partial U}{\partial t} = c\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \tag{2.6}$$

- Si $\Delta > 0$, l'équation est Hyperbolique

Exemple :

Equation des ondes

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0 \tag{2.7}$$

Notons que le genre d'une équation peut varier selon les valeurs des variables.

L'équation :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + (x^2 - y^2)\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \tag{2.8}$$

est Hyperbolique si $|x| < |y|$, Elliptique si $|x| > |y|$ et Parabolique si $|x| = |y|$.

3. Conditions aux limites

La résolution d'une EDP n'a de sens que si on impose un certain nombre de conditions aux limites que la solution doit respecter. Ces conditions peuvent être des conditions initiales et des conditions aux limites sur une région. Les 3 types sont :

- On impose la valeur de la solution sur la frontière de la région $U = U_0$. On parle alors de conditions de Dirichlet.
- On impose une condition de flux de la solution à la frontière de la région de la forme $\frac{\partial U}{\partial n} = \phi_0$, n étant la normale à la frontière. On parle alors de condition de Neumann.
- Il arrive aussi qu'on impose une condition de la forme $\frac{\partial U}{\partial n} + \alpha U = \beta$. On parle alors de conditions de Cauchy.

4. Méthodes de résolution

Pour passer d'un problème exact continu régit par une EDP au problème approché discret, il existe trois grandes familles de méthodes (les méthodes les plus utilisées pour la résolution des EDP) :

- La méthode des différences finies.
- La méthode des éléments finis.
- La méthode des volumes finis.

4.1. Méthode des différences finies

La méthode consiste à remplacer les dérivées partielles par des différences divisées ou combinaisons de valeurs ponctuelles de la fonction en un nombre fini de points discrets ou nœuds du maillage. L'avantage de cette méthode est qu'il y a une grande simplicité d'écriture et un faible cout de calcul. Elle est couramment pratique et facile d'accès. Elle repose sur deux notions : la discrétisation des opérateurs de dérivation ou différentiation et la convergence du schéma numérique ainsi obtenu. Son inconvénient est qu'on se limite à des géométries simples, et qu'il y a des difficultés de prise en compte des conditions aux limites de type Neumann.

Maillage :

On appelle maillage un ensemble de points du domaine de définition sur lequel on va appliquer la méthode des différences finies. Pour une application définie sur un segment de *R*, on ajoutera en général les deux extrémités du segment; pour un maillage en dimension supérieure, on sera amené à choisir, éventuellement, des points du contour du domaine de définition. On appelle le pas du maillage la distance entre deux points successifs du maillage voisins. En dimension 1, cela se simplifie en différence des abscisses. Ce pas n'est pas nécessairement constant. Le pas (global) de l'approximation peut être défini comme le plus grand pas du maillage. Ainsi, si ce pas global tend vers 0, cela veut dire que la répartition des points du maillage dans l'intervalle choisi tend à se faire sur tout le domaine d'étude par densité.

Exemple :

Pour un intervalle de validité **[0, 2]**, avec $\boldsymbol{n}$ le nombre des pas, on aura $\boldsymbol{n+1}$ points qui sont donnés par la relation $\boldsymbol{x_i = i \times h}$ avec $\boldsymbol{h = 2/n}$ constant, $\boldsymbol{0 \le i \le n}$.

Notation indicielle :

Durant ces chapitres nous utiliserons souvent la notation indicielle. C'est pourquoi nous voulons en rappeler le principe. si $\boldsymbol{x}$ est un des vecteurs de base du repère (quadrillage) discrétisé, nous noterons le point $\boldsymbol{x(i)}$, qui est la i^{ieme} abscisse par x_i et de même la j^{ieme} ordonnée $y(j)$ sera noté y_j et si $\boldsymbol{u}$ est maintenant la fonction, ici la solution de l'équation aux dérivées partielles dépendant seulement des variables de l'espace, on remplacera $u(x_i, y_j)$ par $u_{i,j}$. Si, en plus des variables de l'espace, il existe une variable temporelle $t(k) = t_k$, alors la fonction $u(x_i, y_j, t_k)$ sera notée $u^k_{i,j}$.

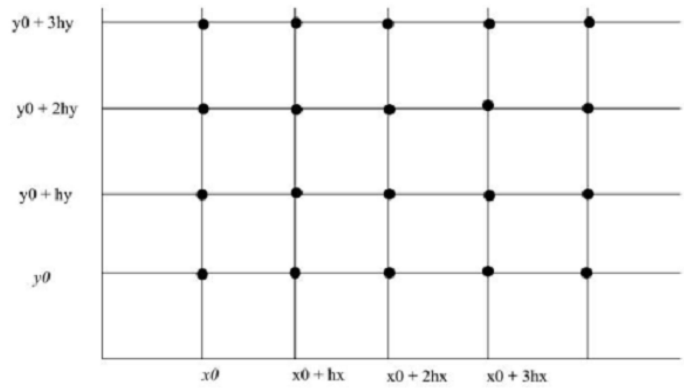

Figure 2.1. Maillage rectangulaire

On remplace les dérivées partielles de U aux points (x_i , y_i) par :

Les différences avant :

$$U_{,x}(x_i, y_i) \approx \frac{U(x_{i+1}, y_j) - U(x_i, y_j)}{h_x} \tag{2.11}$$

$$U_{,y}(x_i, y_i) \approx \frac{U(x_i, y_{j+1}) - U(x_i, y_j)}{h_y} \tag{2.12}$$

$$U_{,xx}(x_i, y_i) \approx \frac{U(x_{i+2}, y_j) - 2U(x_{i+1}, y_j) + U(x_i, y_j)}{h_x{}^2} \tag{2.13}$$

$$U_{,yy}(x_i, y_i) \approx \frac{U(x_i, y_{j+2}) - 2U(x_i, y_{j+1}) + U(x_i, y_j)}{h_y{}^2} \tag{2.14}$$

Les différences centrées :

$$U_{,x}(x_i, y_i) \approx \frac{U(x_{i+1}, y_j) - U(x_{i-1}, y_j)}{2h_x} \tag{2.15}$$

$$U_{,y}(x_i, y_i) \approx \frac{U(x_i, y_{j+1}) - U(x_i, y_{j-1})}{2h_y} \tag{2.16}$$

$$U_{,xx}(x_i, y_i) \approx \frac{U(x_{i+1}, y_j) - 2U(x_i, y_j) + U(x_{i-1}, y_j)}{h_x{}^2} \tag{2.17}$$

$$U_{,yy}(x_i, y_i) \approx \frac{U(x_i, y_{j+1}) - 2U(x_i, y_j) + U(x_i, y_{j-1})}{h_y{}^2} \tag{2.18}$$

Les différences arrière :

$$U_{,x}(x_i, y_i) \approx \frac{U(x_i, y_j) - U(x_{i-1}, y_j)}{h_x} \tag{2.19}$$

$$U_{,y}(x_i, y_i) \approx \frac{U(x_i, y_j) - U(x_i, y_{j-1})}{h_y} \tag{2.20}$$

$$U_{,xx}(x_i, y_i) \approx \frac{U(x_{i-2}, y_j) - 2U(x_{i-1}, y_j) + U(x_i, y_j)}{h_x{}^2} \tag{2.21}$$

$$U_{,yy}(x_i, y_i) \approx \frac{U(x_i, y_{j-2}) - 2U(x_i, y_{j-1}) + U(x_i, y_j)}{h_y{}^2} \tag{2.22}$$