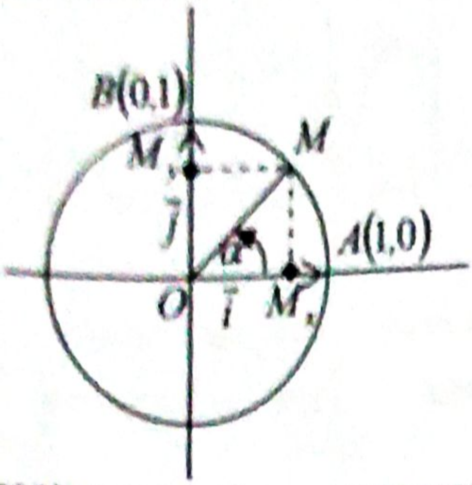
الدائرة المثلثية

I. تعريف

الدائرة المثلثية المرفقة في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ هي الدائرة الموجهة التي مركزها O ونصف قطرها 1



- $\cos\alpha = \overline{OM_x}$
- $\sin\alpha = \overline{OM_y}$
- $tg\alpha = \dfrac{\overline{OM_y}}{\overline{OM_x}} = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \,/\, \sin\alpha \neq 0$
- $\cot g\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{1}{tg\alpha} \,/\, \cos\alpha \neq 0$

a) خصائص

❶ يسمي محور الفواصل Ox محور الجيوب تمام ويسمى محور التراتيب Oy محور الجيوب:

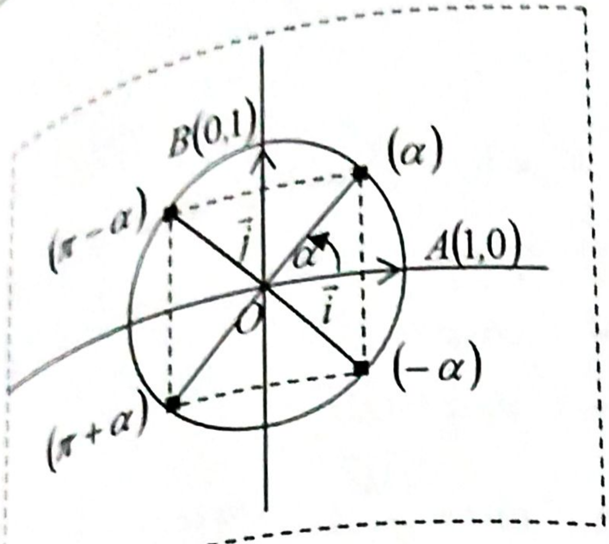
$$\forall\alpha \in IR : -1 \leq \cos\alpha \leq +1 \quad \wedge \quad -1 \leq \sin\alpha \leq +1$$

- $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$
- $1 + tg^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \,/\, \cos\alpha \neq 0$
- $1 + \cot g^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha} \,/\, \sin\alpha \neq 0$

❷ مهما كان العدد الحقيقي α والعدد الصحيح k فان :

- $\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha$
- $\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha$
- $tg(\alpha + k\pi) = tg\alpha$
- $\cot g(\alpha + k\pi) = \cot g\alpha$

❸ مهما كان العدد الحقيقي α :



$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha \\ \sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha \end{cases} \quad \begin{cases} \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha \\ \sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha \end{cases} \quad \begin{cases} \cos(-\alpha)=\cos\alpha \\ \sin(-\alpha)=-\sin\alpha \end{cases}$$

b) النسب المثلثية للزوايا الشهيرة

$\alpha\ \left(rad/deg°\right)$	$0/0°$	$\frac{\pi}{6}/30°$	$\frac{\pi}{4}/45°$	$\frac{\pi}{3}/60°$	$\frac{\pi}{2}/90°$
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$tg\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞

II. المعادلات المثلثية

$$\boxed{\cos\alpha=\cos\beta \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha=\beta+2k\pi \\ \vee \\ \alpha=-\beta+2k\pi \end{pmatrix} / k\in /Z}$$

مثال01:

$$\sqrt{2}\cos\alpha+1=0 \Leftrightarrow \cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\cos\frac{\pi}{4}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha=\frac{3\pi}{4}+2k\pi \\ \vee \\ \alpha=-\frac{3\pi}{4}+2k\pi \end{pmatrix} / k\in /Z$$

مثال02:

$$\cos\left(2x-\frac{5\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2x-\frac{5\pi}{4}=\frac{\pi}{4}-x+2k\pi \\ \vee \\ 2x-\frac{5\pi}{4}=-\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+2k\pi \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x=\frac{\pi}{2}+\frac{2k\pi}{3} \\ \vee \\ x=\pi+2k\pi \end{pmatrix} / k\in /Z$$

$$\boxed{\sin\alpha=\sin\beta \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha=\beta+2k\pi \\ \vee \\ \alpha=\pi-\beta+2k\pi \end{pmatrix} / k\in /Z}$$

مثال03:

$$2\sin\alpha+\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow \sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin-\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha=-\frac{\pi}{3}+2k\pi \\ \vee \\ \alpha=\pi-\left(-\frac{\pi}{3}\right)+2k\pi \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha=-\frac{\pi}{3}+2k\pi \\ \vee \\ \alpha=\frac{4\pi}{3}+2k\pi \end{pmatrix} / k\in /Z$$

إذا كان $tg\alpha$ و $tg\beta$ معرفين فإن:

$$\boxed{tg\alpha = tg\beta \Leftrightarrow (\alpha = \beta + k\pi) / k \in \mathbb{Z}}$$

مثال 04:

$$tg\alpha - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow tg\alpha = tg\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \left(\alpha = \frac{\pi}{3} + k\pi\right) / k \in \mathbb{Z}$$

III. علاقات أساسية

صيغة الجمع (addition)

- $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta$
- $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta$
- $tg(\alpha \pm \beta) = \dfrac{tg\alpha \pm tg\beta}{1 \mp tg\alpha . tg\beta}$

صيغة الضعف (duplication)

- $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
  $= 2\cos^2\alpha - 1$
  $= 1 - 2\sin^2\alpha$
- $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cos\alpha$
- $tg 2\alpha = \dfrac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$

صيغة ضرب-جمع (produit-somme)

- $\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$
- $\sin\alpha \sin\beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)]$
- $\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$

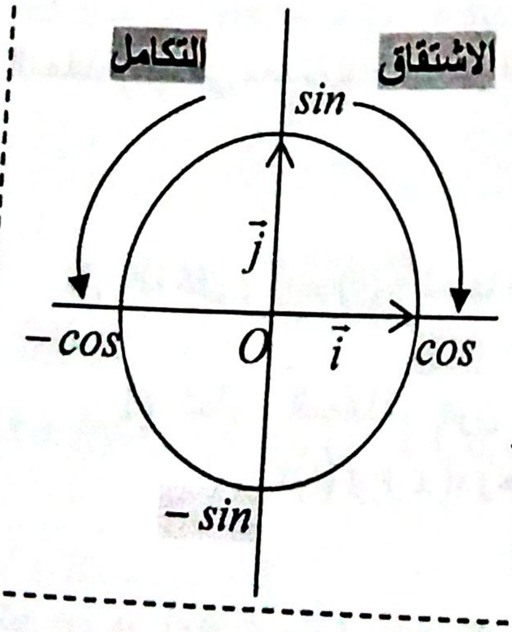
صيغة كارنوا (formules de Carnot)

- $\cos^2\alpha = \dfrac{1 + \cos 2\alpha}{2}$
- $\sin^2\alpha = \dfrac{1 - \cos 2\alpha}{2}$

سمبسون (formules de Simpson)

- $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
- $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
- $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
- $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
- $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right]$
- $tg\alpha + tg\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$
- $tg\alpha - tg\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$

IV. الاشتقاق والتكامل



$\forall : (a,b) \in /R^2, \quad / a = cte, b = cte \Rightarrow$

$$\begin{cases} \left(\cos(ax+b)\right)' = -a\sin(ax+b) \\ \left(\sin(ax^2+b)\right)' = 2ax\cos(ax^2+b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + Cte \\ \int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + Cte \end{cases}$$

المعادلات التفاضلية

I. تعريف:

المعادلات التفاضلية هي عبارة عن علاقة بين المتغير: t ودالة غير محددة مثل: $x(t)$، وهي تنطوي على مشتق واحد أو أكثر أو على تفاضل واحد أو أكثر؛ وتصنف المعادلات التفاضلية بحسب : النوع ، المرتبة و الدرجة (وسنلخص المعادلات التفاضلية من الدرجة الأولي والثانية):

II. المعادلات التفاضلية من الدرجة الأولى:

وتأخذ الشكل العام :

$$\dot{x}+f(t)x=g(t)\cdots\cdots\cdots(1),\quad /\,\dot{x}=\frac{dx}{dt}$$

A. إذا كان: $g(t)=0$ فهي تقبل حلا من الشكل:

$$x=\lambda e^{-\int f(t)dt},\quad /\,\lambda=Cte.$$ (λ ثابت يعين من الشروط الابتدائية)

مثال01:

حل المعادلة التفاضلية :($-2\dot{x}+4tx=0$)

$$-2\dot{x}+4tx=0\Rightarrow \dot{x}-2tx=0\cdots\cdots(a)$$

المعادلة(a) هي معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى دون طرف تقبل حلا من الشكل:

$$x=\lambda e^{+\int 2t\,dt}=\lambda e^{t^2},\quad /\,\lambda=Cte.$$

B. إذا كان : $g(t)\neq 0$ لحلها نتبع الخطوات التالية :

1) نحل المعادلة دون الطرف الثاني بوضع المعادلة المتجانسة ($\dot{x}+f(t)x=0$)، وحلها من الشكل:

$$x=c\,e^{-\int f(t)dt}\cdots\cdots\cdots(2)$$

نعتبر c ، هو $c(t)$ ثم نبحث عنه وذلك باشتقاق عبارة الحل والتعويض في المعادلة (1)

2) بعد التحصل على قيمة $c(t)$ نعوضها في عبارة الحل (الخطوة الأولى- المعادلة (2))، فنحصل على الحل العام.

مثال 02:

حل المعادلة التفاضلية: $(\dot{x} + x = sint + cost)$

$$\dot{x} + x = sint + cost \cdots\cdots(b)$$

1) $x = c e^{-t}$

2) $\dot{x} = \dot{c} e^{-t} - c e^{-t}$ بتعويض في $(b) \Leftarrow$

$$\dot{c} e^{-t} - c e^{-t} + c e^{-t} = sint + cost \Rightarrow \dot{c} e^{-t} = sint + cost$$

$$\Rightarrow \frac{dc}{dt} e^{-t} = sint + cost$$

$$dc = (sint) e^{+t} dt + (cost) e^{+t} dt$$

$$\Rightarrow c = \int (sint) e^{+t} dt + \int (cost) e^{+t} dt + \lambda, \quad / \lambda = Cte.$$

نستعمل التكامل بالتجزئة $\left(\int u.dv = u.v - \int du.v\right)$، وذلك بوضع :

$$\begin{cases} dv = cost\, dt \\ u = e^{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = sint \\ du = e^{t} dt \end{cases}$$

$$\Rightarrow c = \int (sint) e^{+t} dt + (sint) e^{+t} - \int (sint) e^{+t} dt + \lambda, \quad / \lambda = Cte.$$

$$\Rightarrow c = e^{+t} sint + \lambda, \quad / \lambda = Cte.$$

الحل هو :

$$\Rightarrow x = \left(e^{+t} sint + \lambda\right) e^{-t} = sint + \lambda e^{-t}, \quad / \lambda = Cte.$$

III. المعادلات التفاضلية من الدرجة الثانية.

وتأخذ الشكل التالي :

$$A\ddot{x} + B\dot{x} + Cx = f(t), \quad /(A, B, C) \in /R^{3}$$

A. إذا كان: $f(t) = 0$ (دون طرف) :

$$A\ddot{x} + B\dot{x} + Cx = 0$$

نحل المعادلة المميزة وذلك بوضع $\left(x = e^{\lambda t}, / e^{\lambda t} \neq 0\right) \Leftarrow$:

$$A\lambda^{2} + B\lambda + C = 0$$

نلاحظ 03 حالات حسب إشارة$\left(\Delta = B^{2} - 4AC\right)$:

❶ $\Delta > 0$ فإن حل المعادلة التفاضلية من الدرجة الثانية هو : $x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$ / λ_1, λ_2 جذرا المعادلة المميزة، C_1 و C_2 ثوابت تعين من الشروط الإبتدائية.

❷ $\Delta = 0$ فإن للمعادلة المميزة جذر مضاعف:
$x = (C_1 t + C_2) e^{\lambda t} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{-B}{2A}$ / C_1 و C_2 ثوابت تعين من الشروط الإبتدائية.

❸ $\Delta < 0$ فإن حل المعادلة التفاضلية يأخذ الشكل التالي:
$x = e^{\alpha t}(C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t)$ / $\lambda = \alpha \pm i\beta \rightarrow \begin{cases} \alpha = Rée(\lambda) \\ \beta = \text{Im}(\lambda) \end{cases}$ ، C_1 و C_2 ثوابت تعين من الشروط الإبتدائية.

مثال04:

$\ddot{x} - \dot{x} - 6x = 0$ (1

$$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0, \quad \Delta = 1 + 24 = 25 \Rightarrow \lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = -2$$
$$\Rightarrow x = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-2t}, (C_1, C_2) \in /R^2$$

$16\ddot{x} - 8\dot{x} + x = 0$ (2

$$16\lambda^2 - 8\lambda + 1 = 0, \quad \Delta = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{4}$$
$$\Rightarrow x = (C_1 t + C_2) e^{\frac{1}{4}t}, (C_1, C_2) \in /R^2$$

$\ddot{x} + 5x = 0$ (3

$$\lambda^2 + 5 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -5 = i^2 5 \Rightarrow \lambda = \pm i\sqrt{5}$$
$$\Rightarrow x = e^{0t}\left(C_1 \cos\sqrt{5}t + C_2 \sin\sqrt{5}t\right)$$
$$= C_1 \cos\sqrt{5}t + C_2 \sin\sqrt{5}t, \quad (C_1, C_2) \in /R^2$$

B. إذا كان: $f(t) \neq 0$ (مع طرف ثاني):

$$A\ddot{x} + B\dot{x} + Cx = f(t)$$

مبرهنة: $x(t) = x_g(t) + x_p(t)$

$x(t)$: الحل العام للمعادلة مع طرف ثاني،

$x_g(t)$: الحل العام للمعادلة مع بدون طرف ثاني

$x_p(t)$: حل خاص للمعادلة الكاملة.

بعض الأمثلة: " ناخذ حالة واحدة " $(f(t)=K, \quad K=Cte)$

المعادلة	الحل
$\ddot{x}+\omega^2 x=0$	$x=\begin{cases} C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t \\ \vee \\ A\sin(\omega t+\varphi) \end{cases} \quad /(\omega,A,C_1,C_2)\in /R^4$
$\ddot{x}+\omega^2 x=K$	$x=\begin{cases} C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t+\dfrac{K}{\omega^2} \\ \vee \\ A\sin(\omega t+\varphi)+\dfrac{K}{\omega^2} \end{cases} \quad /(\omega,A,C_1,C_2)\in /R^4$
$\ddot{x}-\alpha^2 x=0$	$x=C_1 e^{\alpha t}+C_2 e^{-\alpha t}, \quad /(C_1,C_2)\in /R^2$
$\ddot{x}+\alpha^2 x=K$	$x=C_1 e^{\alpha t}+C_2 e^{-\alpha t}-\dfrac{k}{\alpha^2}, \quad /(C_1,C_2)\in /R^2$

الفصل الأول:

﴿تمهيد رياضي﴾

I. التحليل البعدي:

جميع المقادير التي تصف ظاهرة فيزيائية تتميز بأبعادها، إذ أن التعرف على بعد المقدار الفيزيائي يسمح لنا بالتعرف على طبيعته الفيزيائية.

A. وحدات النظام العالمي الأساسية :

المقدار G	بعد المقدار أو $[G]$	وحدة المقدار
الكتلة	M	kg
الزمن	T	s
الطول	L	m
درجة الحرارة	Θ	K
الشدة الضوئية	J	Cd
شدة التيار الكهربائي	I	A
كمية المادة	N	mol

B. وحدات مستنبطة من الوحدات الأساسية :

المقدار G	اسم الوحدة أو الاسم الخاص ورمزه	وحدة المقدار
المساحة	متر مربع	m^2
الحجم	متر مكعب	m^3
الكثافة	كيلو جرام لكل متر مكعب	$kg\,m^{-3}$
السرعة	متر لكل ثانية	$m\,s^{-1}$
السرعة الزاوية	زاوية نصف قطرية لكل ثانية	$rad\,s^{-1}$
التسارع	متر لكل ثانية مربعة	$m\,s^{-2}$
القوة	نيوتن (N)	$kg\,m\,s^{-2} = J\,m^{-1}$

الضغط	نيوتن لكل متر مربع	$N\,m^{-2}$
الطاقة	جول (J)	$kg\,m^2\,s^{-2} = N\,m$
الاستطاعة (القدرة)	وات (W)	$kg\,m^2\,s^{-3} = J\,s^{-1}$
الشحنة الكهربائية	كولوم C	As
فرق الجهد الكهربائي	فولت V	$kg\,m^2\,s^{-3}\,A^{-1} = J\,A^{-1}\,s^{-1}$
شدة المجال الكهربائي	فولت لكل متر	$V\,m^{-1}$
المقاومة الكهربائية	اوم (Ω)	$kg\,m^2\,s^{-3}\,A^{-2} = J\,A^{-1}$
السعة الكهربائية	فاراد (F)	$A^2\,s^4\,kg^{-1}\,m^2 = A\,s\,V^{-1}$

المقادير المستنبطة مرتبطة بالمقادير الأساسية. فبصفة عامة يمكننا كتابة بعد أي مقدار $[G]$ على الشكل الآتي:

$$[G] = M^{a_1} L^{a_2} T^{a_3} I^{a_4} \theta^{a_5} J^{a_6} N^{a_7}$$

حيث a_1، a_2 ..... ،a_7 ثوابت يطلب تعيينها.

- يمكننا استخدام التحليل ألبعدي لبناء بعض المعادلات الفيزيائية البسيطة أو للتأكد من صحتها.

في الحالة العامة تمر الدراسة البعدية لظاهرة فيزيائية بالمراحل الأربعة الآتية:

1) طرح المشكل مع ذكر المقادير المرتبطة بالظاهرة.
2) التحليل ألبعدي للمقادير المعطاة و المطلوب حسابها.
3) إضافة المقادير الناقصة (الغير مذكورة) للمعطيات إذا استلزم الأمر ذلك.
4) تشكيل المعادلة البعدية التي تربط المقدار المطلوب حسابه مع المعطيات.

مثال 1: (السقوط الحر)

سنفصل هذه المسألة (السقوط الحر) حسب المراحل الأربعة السابقة:

1) المشكل: ما هي السرعة التي يصل بها جسم إلى الأرض عندما ترك دون سرعة ابتدائية من ارتفاع قدره h؟
2) التحليل ألبعدي: المقدار المعطى هو. $[h] = L$ أما المقدار المطلوب حسابه فهو السرعة. $[v] = L\;T^{-1}$
3) نلاحظ أن بعد المقدار المطلوب حسابه (السرعة) يحتوي على الزمن و هو غير موجود في المعطيات، إذن ينقصنا معطى واحد أو عدة معطيات لحل هذا المشكل. في هذا المثال المقدار الناقص هو تسارع الجاذبية الأرضية $[g] = L\;T^{-2}$.

4) نبحث عن السرعة v حسب المعادلة التالية : $[v]=[g]^{\alpha}\ [h]^{\beta}$ ، إذن يمكننا كتابة:

$$L\ T^{-1}=L^{\alpha}\ T^{-2\alpha}\ L^{\beta}\ \Rightarrow\ L\ T^{-1}=L^{\alpha+\beta}\ \ T^{-2\alpha}$$

بالمقارنة بين الطرفين نجد أن:

$$\begin{cases}\alpha+\beta=1\\ 2\alpha=1\end{cases}\Rightarrow\quad \alpha=\beta=1/2$$

$$\Rightarrow\ \ [v]\ =\ [g]^{\frac{1}{2}}\ [h]^{\frac{1}{2}}$$

إذن عبارة السرعة (باستعمال التحليل ألبعدي) تكتب على الشكل الآتي: $v=k\sqrt{gh}$ ، حيث k ثابت بدون وحدة.

مثال 2 : (النواس البسيط)

المطلوب في هذا المثال هو إيجاد شكل عبارة دور النواس البسيط T ، أما المعطيات المتعلقة بالظاهرة فهي طول النواس l و تسارع الجاذبية الأرضية g إذن: $[T]=[l]^{\alpha}[g]^{\beta}$

و منه: $T=L^{\alpha}\ (L/T^{2})^{\beta}=L^{\alpha+\beta}\ \ T^{-2\beta}$

بالمقارنة بين الطرفين نجد:

$$\begin{cases}0=\alpha+\beta\\ 1=-2\beta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=1/2\\ \beta=-1/2\end{cases}$$

و منه نجد : $[T]=[l]^{1/2}[g]^{-1/2}$ إذن عبارة دور النواس البسيط تكتب على الشكل الآتي: $T=k\sqrt{\dfrac{l}{g}}$.