Université Med Khider Biskra

Département de Mathématiques

Gherbal Boulakhras

Cours d’analyse 2 (les équations différentielles de premier ordre)

الفصل 3: المعادلات التفاضلية من الدرجة الاولى

Les équations différentielles de premier ordre

I-1- المعادلات التفاضلية من الدرجة الاولى

تعريف: ليكن D جزء غير خال من الجداء الديكارتي RxR و f تطبيق من D نحو R، نسمي المعادلة: $y'=f(x,y)$ بمعادلة تفاضلية من الدرجة الاولى. نسمي حلا لهذه المعادلة التفاضلية كل دالة $f : I \to R$ قابلة للاشتقاق على I بحيث:من اجل كل

$$x \in I \; ; (x,y(x)) \in D : y'(x)=f(x,y(x)).$$

I-2-المعادلة التفاضلية من الدرجة الاولى الخطية

Equation différentielle de premier ordre linéaire

تعريف: لتكن a,b,c ثلاث دوال مستمرة من I نحو R، نسمي المعادلة التفاضلية التالية:

$$a(x)y'(x)+b(x)y(x)=c(x) \ldots\ldots\ldots (E)$$

بمعادلة تفاضلية من الدرجة الاولى خطية. نسمي حلا لهذه المعادلة كل دالة f معرفة من I الى R وقابلة للاشتقاق بحيث: من اجل كل $x \in I$

$$a(x)f'(x)+b(x)f(x)=c(x).$$

*اذا كانت c هي الدالة الصفرية (المعدومة) على I (اي من اجل كل $x \in I$: $c(x)=0$) فان المعادلة (E) يصبح يسمى متجانسة.

*نسمي معادلة متجانسة مرفقة للمعادلة التفاضلية من الدرجة الاولى الخطية (E) للمعادلة:

$$a(x)y'(x)+b(x)y(x)=0\ldots\ldots\ldots(E_0).$$

وتسمى ايضا معادلة تفاضلية بدون الطرف الثاني.

ملاحظة: اذا كانت الدالة a لا تنعدم على I فان المعادلة التفاضلية من الدرجة الاولى الخطية (E) يمكن كتابتها كالتالي:

$$y'(x)=\beta(x)y(x)+\delta(x).$$

حيث ان β و δ دالتين مستمرتين على I.

I-3- حل المعادلات التفاضلية من الدرجة الاولى

I-3-1 حل المعادلات التفاضلية المتجانسة

Résolution des équations différentielles homogènes

لتكن a,b دالتين مستمرتين على I نحو R و (E_0) المعادلة التفاضلية الخطية من الدرجة الاولى المتجانسة التالية:

$$a(x)y'(x)+b(x)y(x)=0,\ldots\ldots(E_0)$$

<u>الطريقة 1:</u>

قضية 1: *إذا كانت a لا تنعدم على I وكانت A الدالة الاصلية للدالة:* $A:A(x)=b(x)/a(x)$ *فإن حلول المعادلة التفاضلية المتجانسة* (E_0) *على I تعطى بالشكل:*

$$f : f(x)=\mu e^{-A(x)}$$

<u>البرهان:</u>

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على I. نضع من اجل كل

$$x\in I :g(x)=f(x)e^{A(x)},$$

وبالتالي g قابلة للاشتقاق على I ولدينا من اجل كل $x\in I$:

$$g'(x)=f'(x)\,e^{A(x)}+f(x)A'(x)\,e^{A(x)}$$

$$= e^{A(x)}[f'(x)+A'(x)f(x)]$$

$$= e^{A(x)}[f'(x)+ (b(x)/a(x))f(x)]$$

$$= (e^{A(x)} /a(x))\,[a(x)f'(x)+ b(x)\,f(x)]$$

وبالتالي تكون f حلا للمعادلة التفاضلية المتجانسة (E_0) اي

$(a(x)f'(x)+ b(x)\,f(x)=0)$ اذا وفقط اذا كان من اجل كل $x\epsilon I :g'(x)=0$

اي ان g ثابتة على I بمعنى: من اجل كل $x\epsilon I :g\,(x)=\mu$ وبما ان

$\mu=g(x)=f(x)e^{A(x)}$ فنجد: $f(x)=\mu e^{-A(x)}$

الطريقة 2: باستعمال المكاملة.

مثال1: حل المعادلة التفاضلية المتجانسة التالية:

$$y'(x)\cos x-y(x)\sin x=0,\ldots..(E_0).$$

لأنه حسب الطريقة 1 فإن حلول المعادلة (E_0) تعطى بالشكل $y(x)=\mu/\cos x$ هو

$y(x)=\mu e^{-A(x)}$ حيث ان

$$A(x)=\int (b(x)/a(x))dx=-\int(\sin(x)/\cos(x))dx=\ln|\cos x|$$

ومنه

$$y(x)=\mu e^{-\ln|\cos x|}=\mu/\cos x.$$

I-4- حل المعادلات التفاضلية الخطية من الدرجة الاولى مع الطرف الثاني

Résolution des équations différentielles de premier ordre avec seconde membre

لتكن a,b,c دوال مستمرة على I نحو R و نعتبر المعادلة التفاضلية الخطية من الدرجة الاولى التالية:

$$a(x)y'(x)+b(x)y(x)=c(x),\ldots\ldots.(E)$$

<u>قضية 2:</u> *ليكن Y حلا خاصا للمعادلة التفاضلية الخطية (E) و S مجموعة حلول التفاضلية الخطية المتجانسة (E_0) المرفقة للمعادلة (E) فإن مجموعة حلول المعادلة التفاضلية الخطية من الدرجة الاولى مع الطرف الثاني (E) هي المجموعة* $\{y+y_0 / y_0 \epsilon S\}$ *أي مجموع الحل الخاص لـ(E) و الحل العام لـ(E_0).*

I–4–1– الحل الخاص لمعادلة تفاضلية خطية من الدرجة الاولى مع الطرف الثاني

أ– إستعمال الحل التافه او الهين (solution évidente)

وتعتمد هذه الطريقة على الملاحظة فقط مثال: لتكن المعادلة التفاضلية الخطية من الدرجة الاولى مع الطرف الثاني التالية:

$$y'(x)\cos x-y(x)\sin x=\cos(2x),\ldots\ldots.(E).$$

نلاحظ ان $y(x)=\sin x$ هو حل خاص للمعادلة (E) وبما أن الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة (E_0) المرفقة لـ(E) وهي

$$y'(x)\cos x-y(x)\sin x=0,\ldots\ldots.(E_0).$$

وهو $y_0(x)=\mu /cosx$ (حسب المثال السابق) وبالتالي مجموعة حلول المعادلة التفاضلية الخطية من الدرجة الاولى مع الطرف الثاني (E) هي:

$$y(x)= (\mu /cosx)+sinx, \mu \epsilon R.$$

ب- طريقة تغاير الثابت (méthode de variation de la constante)

في حالة عدم إيجاد الحل الهين أي بالملاحظة للمعادلة التفاضلية الخطية من الدرجة الاولى مع الطرف الثاني (E) نستعمل طريقة تغاير الثابت والتي تعتمد على فكرة أن نبحث عن حال خاص للمعادلة التفاضلية (E) من الشكل: $y=zy_0$ حيث أن y_0 هو واحد من الحلول غير المعدومة للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة (E_0) المرفقة لـ(E) و z هي دالة قابلة للاشتقاق على I. لدينا $y=zy_0$ حلا خاصا لـ (E) أي:

$$a(x)Y'(x)+b(x)Y(x)=c(x)$$

يعني أن $a(x)[z'(x)y_0(x)+z(x)y'_0(x)]+b(x)z(x)y_0(x)=c(x)$

ومنه $a(x)z'(x)y_0(x)+z(x)[a(x)y'_0(x)+b(x) y_0(x)]=c(x)$

وبإستعمال كون y_0 حل (E_0) نجد $a(x)z'(x)y_0(x)=c(x)$

أي $z'(x)= c(x) /a(x) y_0(x)$

وبالتالي $y=zy_0$ حل خاص لـ (E) إذا كانت الدالة z هي الدالة الأصلية للدالة:

$$x\rightarrow c(x) /a(x) y_0(x).$$

مثال3. حل على المجال $]0,+\infty[$ المعادلة التفاضلية الخطية التالية:

$$Xy'(x)-y(x)=x^2e^x,\ldots.(E)$$

لنحل في البداية المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة (E_0) المرفقة لـ(E) وهي

$$xy'(x)-y(x)=0,\dots(E_0).$$

الحل العام للمعادلة التفاضلية (E_0) من الشكل: $y_0=\mu e^{-A(x)}$ بحيث

$$A(x)=\int(b(x)/a(x))dx=\int(-1/x)dx=-\ln|x|$$

ومنه $y_0(x)=\mu e^{-(-\ln|x|)}=\mu x,\mu\in R$

الآن نبحث عن حل خاص لـ(E) من الشكل: $y=zy_0$ مع أن y_0 هو احد حلول (E_0) غير المعدومة مثلا $y_0=x$ و z هي دالة قابلة للاشتقاق على I أي يمكن أخذها $z=\mu(x)$ وبالتالي الحل الخاص لـ(E) يصبح $y=x\mu(x)$ ثم نبحث عن $\mu(x)$ بحيث

$$\mu(x)=\int(c(x)/a(x)y_0(x))dx=\int(x^2e^x/x^2)dx=e^x.$$

ومنه $y=xe^x$ حلا خاصا لـ(E) وبالتالي الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية من الدرجة الاولى مع الطرف الثاني (E) هو $y=\mu x+xe^x,\mu\in R$

I-4- معادلات تفاضلية لبرنولي

(Equation différentielle de Bernoulli)

تعريف: المعادلة التفاضلية لبرنولي هي معادلة من الشكل:

$$a(x)y'(x)+b(x)y(x)=c(x)y^{\beta},\ \beta\in R\dots\dots(E')$$

حيث ان a,b,c دوال مستمرة على I و β عدد حقيقي يختلف عن 0 و 1 لأنه إذا كان $\beta=0$ فإن (E') تصبح معادلة تفاضلية خطية متجانسة وإذا كان $\beta=1$ فإن (E') معادلة تفاضلية من الدرجة الاولى خطية مع الطرف الثاني.

ملاحظة:

1- الحل $y=0$ لا يؤخذ بعين الإعتبار.

2- إذا كانت الدالة $a(x)$ لا تنعدم على I فإن معادلة برنولي تصبح

$$y'+A(x)y=B(x)y^{\beta},.....(E')$$

مثال: المعادلات التفاضلية التالية هي معادلات تفاضلية لبرنولي

$$2xy'-3y=y^2\ln x$$
$$x^2y'-y=y^{1/2}$$
$$-y'+y/5=x^3y^4.$$

I-4-1 حل المعادلات التفاضلية لبرنولي

Résolution des équations différentielles de Bernoulli

لدينا

$$y'+A(x)y=B(x)y^{\beta},.....(E')$$

نقسم طرفي المعادلة على y^{β} نجد

$$y'/ y^{\beta}+A(x)(1/ y^{\beta-1})=B(x),\dots (E')$$

نستعمل استبدال المتغير التالي

$$Z(x)= 1/ y^{\beta-1}= y^{1-\beta}$$

ومنه

$$Z'(x)=(1-\beta/y^{\beta})y'$$

بالتعويض في (E') نجد

$$Z'(x)/(1-\beta)+A(x)Z(x)=B(x).....(E)$$

وهي معادلة تفاضلية خطية من الدرجة الاولى مع الطرف الثاني نحلها بالطرق السابقة

لإيجاد Z ثم من كون $y(x)=(Z(x))^{1/1-\beta}$ نجد حل المعادلة التفاضلية لبرنولي (E').

مثال4: لتكن المعادلة التفاضلية لبرنولي التالية:

$$xy'+y=y^2\ln x,......(E')$$

نضع $Z=1/y$

ومنه $Z'=(-1/y^2)y'$

وبالتالي

$$y'=-y^2Z'=-Z'/Z^2$$

نعوض في (E') نجد

$$-xZ'+Z=\ln x \ ,\ldots.(E)$$

وهي معادلة تفاضلية خطية من الدرجة الاولى مع الطرف الثاني، لنبدأ بحل المعادلة التفاضلية المتجانسة المرفقة لـ(E) وهي

$$-xZ'+Z=0 \ ,\ldots.(E_0)$$

وحلها العام هو $Z=\mu x$ ولنبحث عن حل خاص لـ(E) من الشكل: $z=\mu(x)x$

ومنه $z'=\mu'(x)x+\mu(x)$ وبالتعويض في (E) نجد

$$\mu(x)=-\int(\ln x/x^2)dx$$

نكامل بالتجزئة فنجد

$$\ln x\rightarrow(1/x)dx$$
$$(-1/x^2)dx\rightarrow 1/x$$

ومنه

$$\mu(x)=(1/x)\ln x-1/x$$

وبالتالي

$$z=(\ln x)-1$$

ويصبح حل (E) هو

$$Z=\mu x+(\ln x)-1=1/y$$

وهذا يستلزم ان

$$y=1/(\mu x+(\ln x)-1)$$

وهو الحل العام لمعادلة برنولي (E’).