Université Mohamed Khider Biskra
Département des Mathématiques
Master 1

2020/2021
Méthodes numériques
T.D

Série 1

Approximation des EDP par les schémas aux différences finies

Exercice 1
1. On considère le problème unidimensionnel suivant :

$$-u"(x) + c(x)u(x) = f(x) \quad , \quad x \in]0, 1[\tag{1}$$

où $c \in C([0, 1]), \mathbb{R}_+)$ et $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$, et les trois conditions suivantes :

a) $u(0) = u(1) = 0$ (condition de Dirichlet homogène).
b) $u'(0) = a$ et $u(1) = b$ (condition de Neumann).
c) $u(0) = a$ et $u'(1) + u(1) = 0$ (condition de Fourier).

Donner le schéma aux différences finies (D.F) de ce problème pour chaque conditions aux bords a) , b) et c). On appelle U_h la solution approchée, c-à-d, $U_h = (u_0, u_1, \ldots, u_{N+1})$, où u_i est l'inconnue discrète en x_i. Donner l'écriture matricielle $A_h U_h = b_h$.

2. On considère le problème (1) avec les conditions aux bords a).

2.1 Montrer qu'il existe une solution unique au problème discret.
Indication : Montrer que la matrice A_h est symétrique définie positive.
2.2 On suppose ici $c = 0$. Montrer que la solution du problème discret vérifie le principe du Maximum discret.

$$Si \quad f \geq 0 \; alors \; u_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \ldots, N$$

2.3 Si la solution $U \in C^4([0, 1])$, montrer que le schéma aux D.F est consistant d'ordre 2, et on a plus précisément

$$|R_i| \leq \frac{h^2}{12} \;\; Sup_{[0,1]}|U^{(4)}|, \qquad \forall i = 1, \ldots, N$$

Exercice 2
On considère le problème suivant

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2u}{dx^2}(x) + xu^3(x) = f(x) \quad x \in [0,1] \quad , \\ \\ y(0) = 0 \quad y(1) = 1 \end{cases}$$

Écrire le schéma de différences finies avec un pas constant de ce problème. Par quelle méthode peut-on résoudre ce schéma ?

Exercice 3
On considère l'équation de Laplace (ou Poisson) suivante

$$\begin{cases} \triangle u = 0, (x,y) \in [0,20] \times [0,10] \quad , \\ \\ u(x,0) = u(x,10) = x(0,y) = 0 \ et \ u(20,y) = 10 \end{cases}$$

où $\triangle u = \dfrac{\partial u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial u}{\partial y^2}$
Par la méthode des différences finies de pas fixe $h \in \{5, 2.5\}$, résoudre cette EDP.

Exercice 4
Soit le problème (parabolique) aux limites suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \alpha \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = x, \forall x \in]0,2[, t \in]0,3.75[, \\ \\ u(0,t) = u(2,t) = 0, \forall t \in]0,3[, \\ \\ u(x,0) = 100x, \forall x \in]0,1[, \\ \\ u(x,0) = 100(2-x), \forall x \in]1,2[, \end{cases}$$

1. Discrétiser le problème par la méthode explicite. Fixer Δt par la relation de convergence sachant que $\Delta x = 0.5$, $\alpha = 0.1$.
2. Trouver les valeurs numériques de la solution approchée.
3. Mêmes questions précédentes en utilisant le schéma Crank-Nicolson.