CHAPITRE 5.

RAPPELS DES FORMULES USUELLES

5.1. Périmètres, Longueurs développées

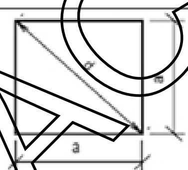
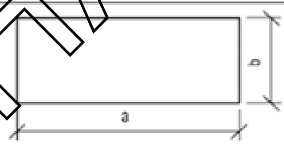
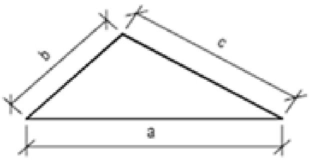
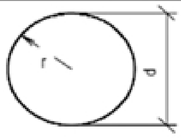
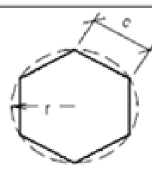
Dans cette partie, on va réviser et compléter les connaissances sur le calcul de longueurs, afin de calculer le périmètre de figures complexes.

On distingue 2 types de figures fermées:

- Les figures qui ont une forme régulière.
- Les figures qui ont une forme irrégulière.

5.1.1. Figures de formes régulières

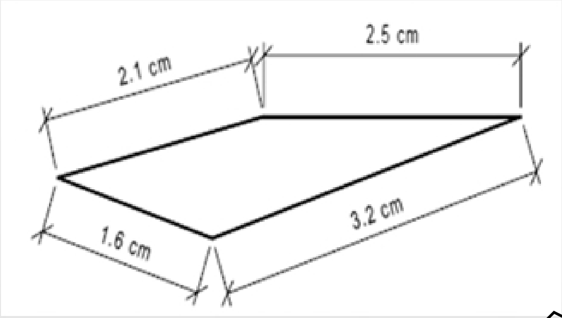
On calcule le périmètre des figures régulières en appliquant des formules mathématiques "prêtes à l'emploi".

Le carré		$P = 4 . a$ $A = d . 0{,}707$ $D = a . 1{,}414$
Le rectangle		$P = (a + b) . 2$
Le triangle		$P = a + b + c$
Le cercle		$P = 2 . r . \pi$ $P = d . \pi$
L'hexagone		$P = 6 . c$ $P = 6 . r$

5.1.2. Figures de formes irrégulières

On calcule le périmètre des figures irrégulières en additionnant les longueurs des côtés.

Exemple



Pour calculer le périmètre de cette figure, on additionne les longueurs des côtés.

p = 2,1 cm + 2,5 cm + 3,2 cm + 1,6 cm = 9,4 cm

5.2. Théorème de Pythagore

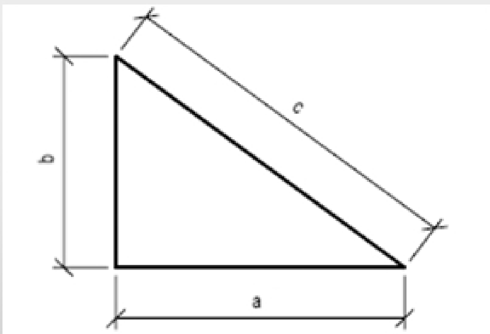
Pour calculer les longueurs obliques, nous avons besoin du théorème de Pythagore.

On peut déduire trois formules du théorème de Pythagore pour l'application courante.

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

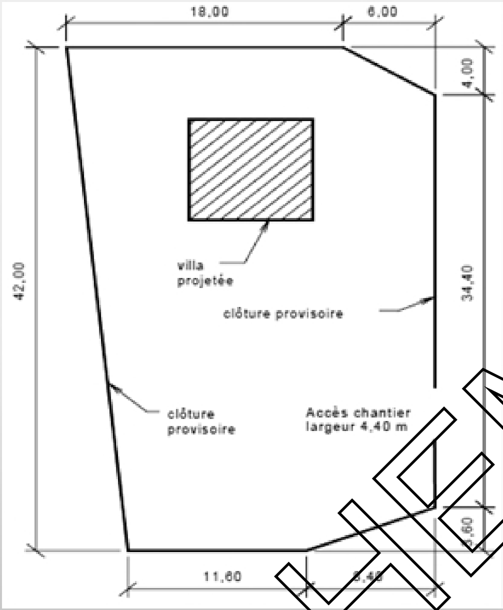
$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$



<u>Exercice</u> :

Calculez la longueur de la clôture provisoire.



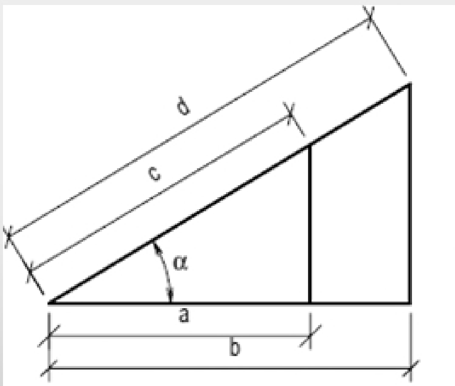
5.3. Théorème de Thalès

Ce théorème définit les relations entre les longueurs des côtés de deux triangles semblables. Deux triangles sont semblables quand ils ont la même forme mais pas la même grandeur.

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \qquad a = \frac{c\,.\,b}{d}$$

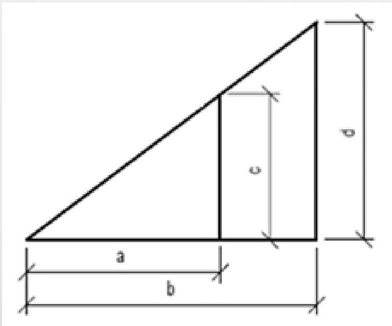
$$b = \frac{d\,.\,a}{c} \qquad c = \frac{d\,.\,a}{b}$$

$$d = \frac{c\,.\,b}{a}$$



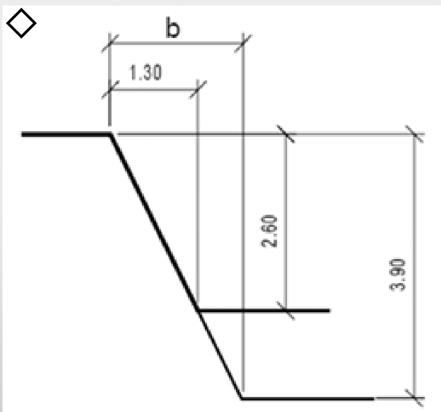
Remarque:

On utilise les mêmes formules pour le calcul des hauteurs en fonction des longueurs.



Exercice :

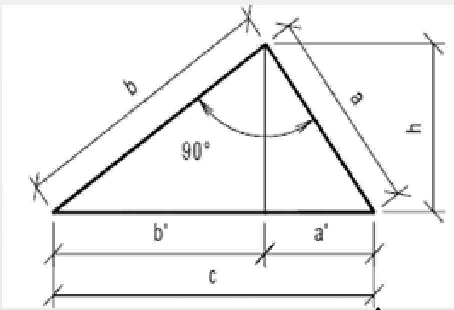
Calculez la largeur du talus après l'approfondissement de la fouille.



5.4. Théorèmes d'Euclide et de la hauteur

Théorème de la hauteur
$a^2 = a' \cdot c$
$b^2 = b' \cdot c$

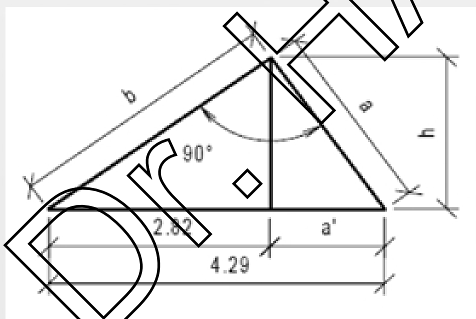
Théorème d'Euclide
$h^2 = a' \cdot b'$

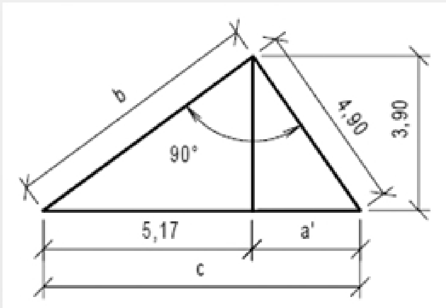


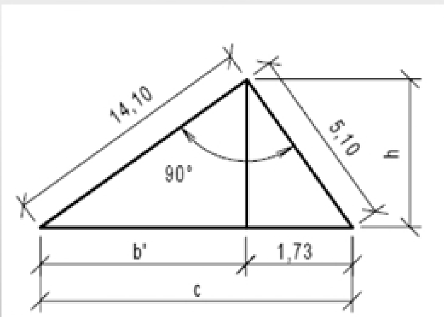
On peut déduire de ces 2 théorèmes que :

$$a = \sqrt{a'.c} \qquad b = \sqrt{b'.c} \qquad h = \sqrt{a'.b'}$$

Exercices :
Calculez les valeurs manquantes.







5.5. Longueur d'arc de cercle

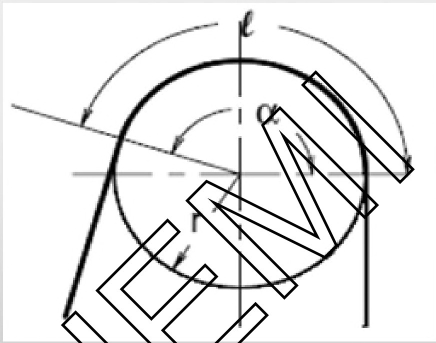
Dans la plupart des cas, nous avons besoin d'un quart de cercle (angle de 90°) ou d'un demi-cercle (angle de 180°). Dans ces cas, nous calculons la fraction du périmètre du cercle.
Si l'angle α est d'une valeur quelconque, on utilisera des 360ème de degré ou des 400ème de grade.

Longueur d'arc en degrés :

$$l = 2.r.\pi.\frac{\alpha}{360}$$

Longueur d'arc en grades :

$$l = 2.r.\pi.\frac{\alpha}{400}$$



5.5.1. Les éléments de l'arc de cercle

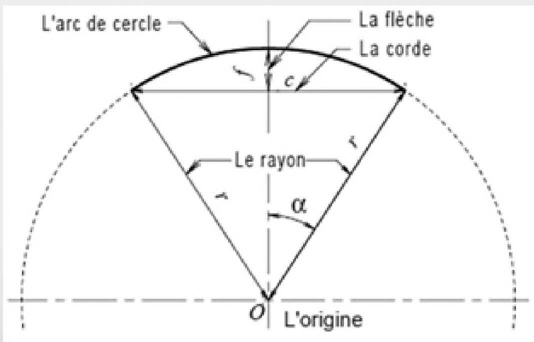
Pour calculer la longueur d'un arc de cercle, on ne dispose pas toujours de la valeur du **rayon** et de **l'angle α**. On doit donc calculer la longueur de l'arc à l'aide de la corde et de la flèche.

$$r = \frac{f^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2}{2.f}$$

$$f = r - \sqrt{r^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2}$$

$$c = 2.\sqrt{r^2 - (r-f)^2}$$

$$tg\ \alpha = \frac{c}{2.(r-f)}$$



Pour trouver la valeur de l'angle α, effectuer « inverse tangente » sur votre calculette.

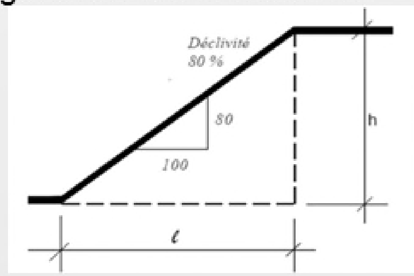
5.6. Pentes

<u>Exemple</u>:

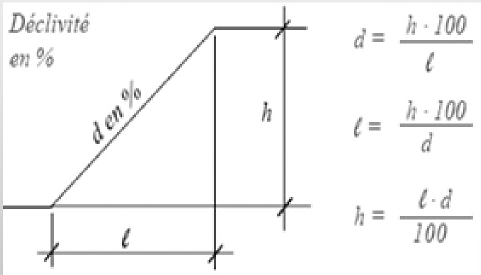
Si vous montez de 80 m sur une longueur de 100 m vous avez grimpé une pente de 80 %.

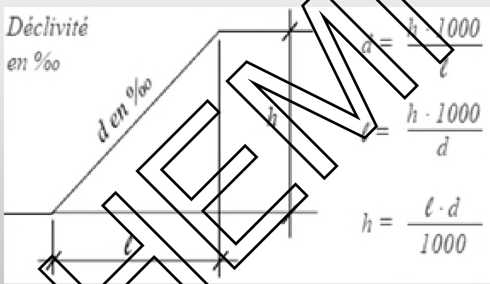
Notation:

- Les "pour cent" se notent %
- Les "pour mille" se notent ‰



On utilise trois formules qui nous permettent de calculer la déclivité d'une pente ou d'une rampe.



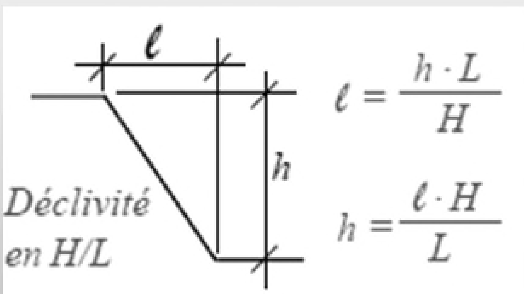


5.6.1. Pentes et rampes en rapport

Pour certaines parties de construction on peut indiquer la valeur de la déclivité en donnant la hauteur par rapport à la longueur. C'est le cas notamment des pentes qui dépassent 100%.

La déclivité est généralement indiquée par rapport à 1, soit 1/1, 2/1, 3/1, etc...

Toutefois, comme les nombres ne peuvent être que des entiers (nombres sans virgule), on trouve également d'autres valeurs comme 3/2 (et non 1,5/1).

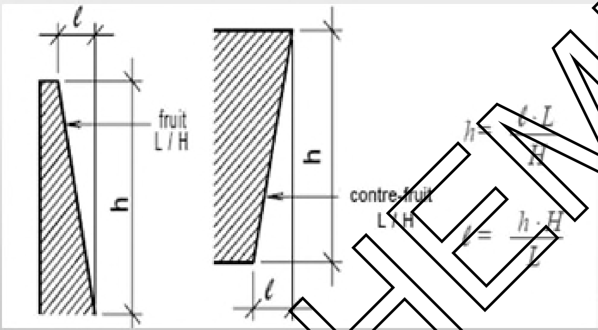


5.6.2. Fruit et contre-fruit

Il existe deux façons d'indiquer la valeur du fruit d'un objet: soit en indiquant sa déclivité par rapport à l'horizontale, soit en indiquant son inclinaison par rapport à la verticale.

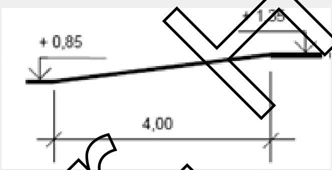
Si la valeur du fruit est indiquée par une déclivité (par exemple 10/1), on utilisera les formules de la page précédente.

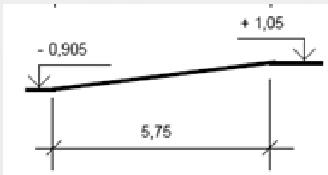
Si la valeur est indiquée par une inclinaison (par exemple 1/10) on appliquera les formules ci-dessous pour trouver la hauteur ou la valeur du décalage.



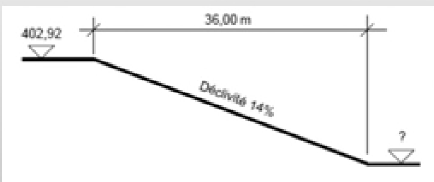
Exercices d'application

1. Calculez les différences de niveaux et les déclivités en %.



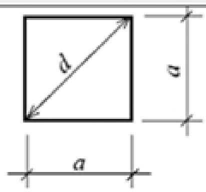
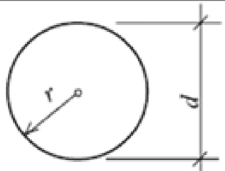
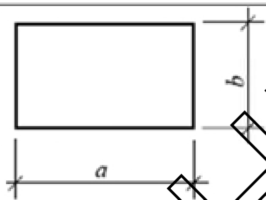
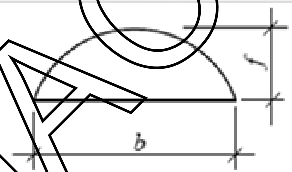
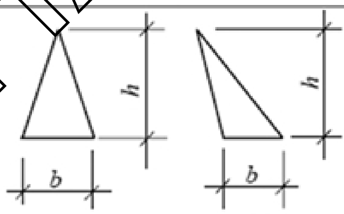
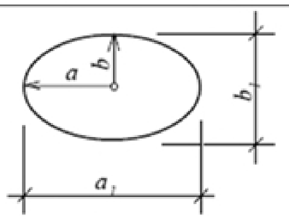
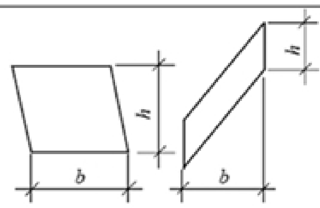


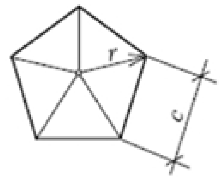
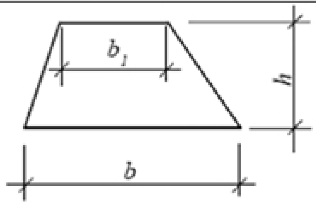
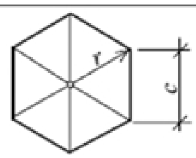
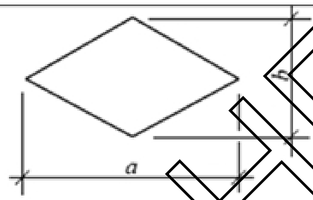
2. La rampe d'accès d'un garage souterrain a une longueur horizontale de 36,00 m et une déclivité de 14 %.
Le haut de la rampe est à l'altitude de 402,92 m.
Quelle sera l'altitude du bas de la rampe?

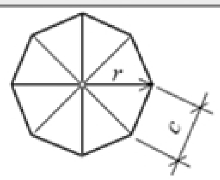


5.7. Aires simples

Comme pour le calcul des périmètres, on utilise pour le calcul des surfaces de formes régulières des formules "prête à l'emploi".

Le carré		$A = a.a$ $A = d.\frac{d}{2}$
Le cercle		$A = r^2.\pi$ $A = \frac{d^2.\pi}{4}$
Le rectangle		$A = a.b$
Le segment de cercle		$A \cong \frac{2}{3}.b.f$
Le triangle		$A = b.\frac{h}{2}$
L'éclipse		$A \cong a.b.\pi$ $A \cong a_1.b_1.\frac{\pi}{4}$
Le parallélogramme		$A = b.h$

Le pentagone		$A \cong c.c.1{,}72$ $A \cong r.r.2{,}38$
Le trapèze		$A = h.\frac{b+b_1}{2}$
L'hexagone		$A \cong c.c.2{,}60$ $A \cong r.r.2{,}60$
Le losange		$A = a.\frac{b}{2}$

L'octogone		$A \cong c.c.4{,}83$ $A \cong r.r.2{,}83$

5.8. Volumes simples et composés

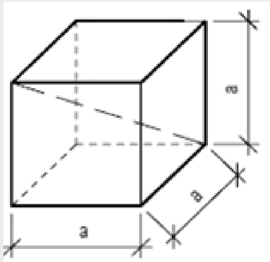
5.8.1. Parallélépipèdes

Les parallélépipèdes sont constitués de lignes parallèles

Le cube

$$V = a^3 = a\ .a\ .a$$

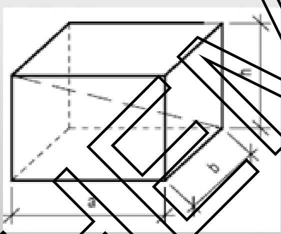
$$d = a\ .\sqrt{3}$$



Le parallélépipède rectangle

$$V = a\ .b\ .h$$

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + h^2}$$

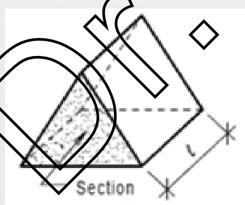


5.8.2. Prismes

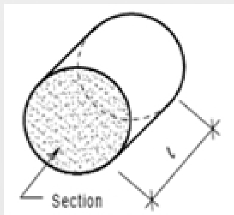
Les prismes sont des volumes constitués d'une section régulière et de longueurs égales et parallèles.

$$V = aire\ de\ section\ .\ l$$

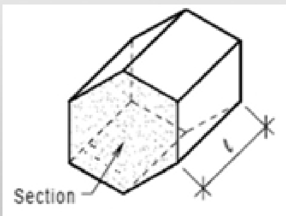
Prisme de section triangulaire



Prisme de section circulaire



Prisme de section hexagonale

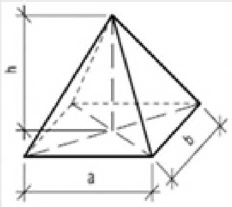


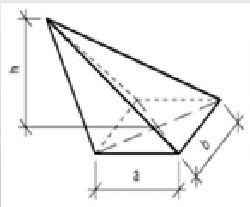
5.8.3. Pyramides et cônes

Les pyramides sont des volumes constitués d'une aire de base régulière et d'un sommet sur lequel se raccorde les lignes provenant de chacun des côtés de la base.

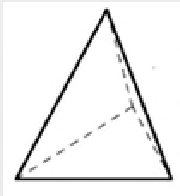
$$V = aire\ de\ base\ .\frac{h}{3}$$

Pyramide à base rectangulaire

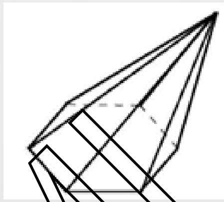




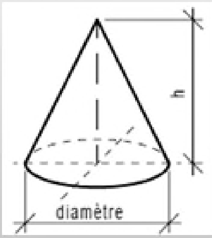
Pyramide à base triangulaire

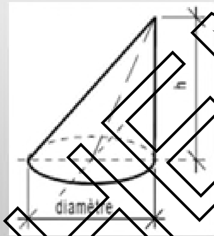


Pyramides à base hexagonale



Pyramides à base circulaire = cônes

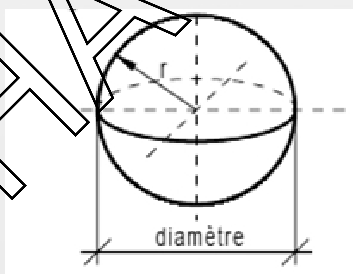




5.8.4. Autres formes

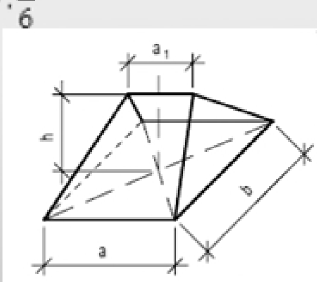
La sphère

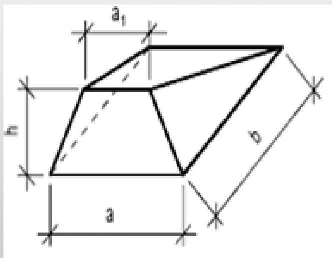
$$V = \frac{\pi . d^3}{6}$$



Le coin à base rectangulaire

$$V = (2.a + a_1).b.\frac{h}{6}$$

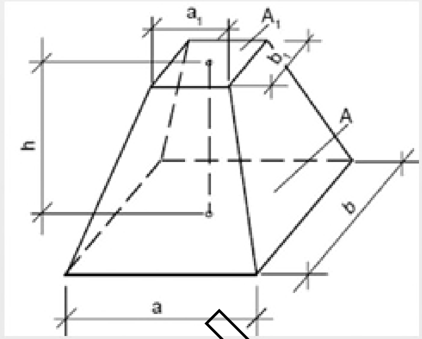




5.8.5. Volumes tronqués

La pyramide tronquée et le cône tronqué sont des volumes simples mais qui ont des particularités qui méritent un développement.

La pyramide tronquée



Formule simplifiée: le résultat sera approximatif et inférieur au résultat juste

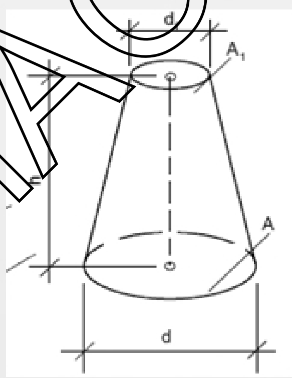
$$V = \frac{a + a_1}{2} \cdot \frac{b + b_1}{2} \cdot h$$

Formule simplifiée: le résultat sera approximatif et supérieur au résultat juste

$$V = \frac{(a \cdot b) + (a_1 \cdot b_1)}{2} \cdot h$$

Formule précise: le résultat sera juste $V = [b \cdot (2 \cdot a + a_1) + b_1 \cdot (2 \cdot a_1 + a)] \cdot \frac{h}{6}$

Le cône tronqué



Formule simplifiée: le résultat sera approximatif et supérieur au résultat juste

$$V = \frac{(\pi \cdot r^2) + (\pi \cdot r_1^2)}{2} \cdot h \qquad r = \frac{d}{2} \qquad r_1 = \frac{d_1}{2}$$

Formule précise: le résultat sera juste

$$V = (d^2 + d \cdot d_1 + d_1^2) \cdot \frac{\pi \cdot h}{12}$$