<u>*Stabilité des systèmes asservis linéaires*</u>

I. CRITERE ALGEBRIQUE DE ROUTH-HURWITZ

1 INTRODUCTION

L'objectif de ce chapitre est de présenter les techniques d'analyse des systèmes linéaires et invariants dans le temps. Nous nous intéressons principalement aux techniques d'étude de la stabilité des systèmes linéaires est de celles des lieux des racines.

Nous avons vu que la réponse transitoire d'un système asservi dont le modèle est décrit par des équations différentielles ordinaires (linéaires) avec coefficients constants est gouvernée par les racines de l'équation caractéristique. En particulier, si le système possède une ou plusieurs racines à partie réelle positive, la réponse correspondante augmente avec le temps le système set dit instable. Etant donné qu'un système asservi instable ne peut pas fonctionner de manière adéquate, la stabilité doit être considérée comme première spécification lors du design de ces systèmes.

En règle générale, l'emplacement des pôles de l'équation caractéristique du système en boucle fermée caractérise la réponse dynamique et la stabilité. C'est aussi un moyen de caractériser la marge de stabilité d'un système donné. Le positionnement de ces pôles aux valeurs qui assurent les performances désirées fait souvent intervenir l'ajustement d'un ou plusieurs paramètres. La technique des lieux des racines permet de voir comment les pôles de l'équation caractéristique se comportent lorsqu'un paramètre varie.

Le but consiste à concevoir un système asservi stable et précis. Nous voulons aussi que le système asservi soit insensible aux variations des paramètres du système. Nous voulons, pour un gain K, une constante de temps T et un Kr donnés, trouver les valeurs de K_p qui assurent au système en boucle fermée une stabilité.

2. STABILITE ET LIEU DES RACINES :

Stabilité absolue et une très bonne précision. Pour répondre à ces questions, nous avons besoin de quelques méthodes appropriées. Ces méthodes font l'objet de ce chapitre.

2.1. Stabilité des systèmes linéaires

Au cours de cette section, nous allons voir comment caractériser la stabilité des systèmes dynamiques linéaires à coefficients. Pour cela, considérons le schéma-bloc de la figure, qui illustre la structure simplifiée d'un système asservi linéaire sans perturbation.

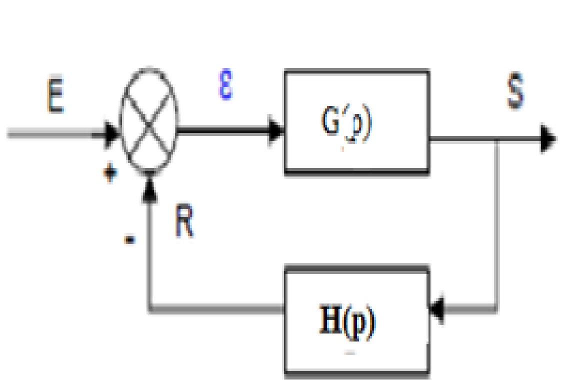


Figure 1 : Structure de Commande

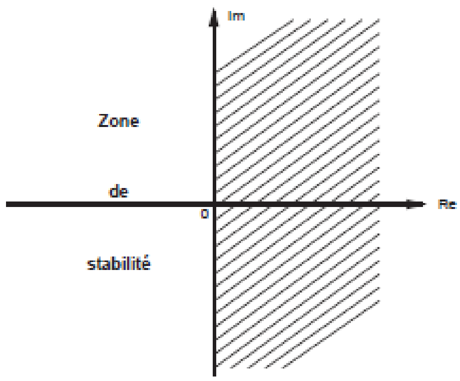


Figure 2 : Domaine de stabilité

Les fonctions de transfert en boucle ouverte et en boucle fermée d'un tel système sont données respectivement par les expressions suivantes :

$$T(p) = G(p) * H(p) \tag{1}$$

$$F(p) = \frac{G(p)}{1+G(p)*H(p)} = \frac{G(p)}{1+T(p)} \tag{2}$$

La stabilité de ce système exige que les racines de l'équation caractéristique 1+T(p) =0, soient toutes à partie réelle négative. La figure 2 illustre le domaine de stabilité qui comprend tout le demi-plan gauche du plan complexe. Pour examiner la stabilité d'un système donné, on peut penser à chercher les racines de l'équation caractéristique, c'est-à-dire les pôles du système. Ensuite, après avoir examiné toutes les parties réelles des racines, on peut conclure sur la stabilité.

Exemple 1: Etude de la stabilité d'un système de second ordre

Considérons par exemple le système linéaire tel que représenté à la figure 1 avec

$$G(p) = \frac{1}{p^2+5*p+5} \quad \text{et H(p)=1}$$

L'équation caractéristique correspondante est :

$$1 + T(p) = p^2 + 5 * p + 6 = 0$$

Cette équation est un polynôme du 2^{eme} ordre dont les deux racines sont -2et-3.

C'est-à-dire (p + 2)(p + 3)=0 . Les deux raciner sont toutes à partie réelle négative et, par conséquent, on peut dire que le système en question est bien stable.

Une telle technique n'est utilisable que lorsque le degré de l'équation caractéristique est faible, c'est-à-dire d'ordre inférieur ou égal à 3 ; plus l'ordre de l'équation caractéristique augmente et plus la méthode ne devient lourde et presque impossible sans moyen de calcul.

D'autres techniques s'imposent alors pour contourner la résolution de l'équation caractéristique. Quelque méthodes ont été développées pour répondre à ce besoin, parmi lesquelles on trouve : **Le critère algébrique de Routh-Hurwitz** et **le critère géométrique de Nyquist**. Le critère géométrique de Nyquist est lié à la réponse en fréquence.

2.2. Critère algébrique de Routh-Hurwitz

Ce critère nous renseigne principalement sur le nombre de racines de l'équation caractérisation du système qui ont une partie réelle positive. Ce nombre est égal au nombre de changement de signe dans la première colonne du tableau de Routh-Hurwitz. Le principe de ce critère consiste à :

- Remplir le tableur de Routh-Hurwitz ;
- Voir le nombre de changement de signe de la première colonne d'une ligne à une autre de ce tableau ;
- Conclure sur la stabilité en se basant sur la première colonne.

Soit un système linéaire possédant l'équation caractéristique suivante :

$$1 + T(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + a_{n-2} p^{n-2} + \cdots + a_1 p + a_0 = 0 \qquad (3)$$

Avec $a^n > 0$

Ceci est la forme générale d'une équation caractéristique se traduisant par un polynôme de degré n à coefficients réels constants. Ce polynôme possède n racines, qui peuvent être soit réelles, soit complexes.

L'étude de stabilité de ce système requiert la connaissance de ces n racines .Mais le critère de Routh-Hurwitz est une technique d'étude de stabilité qui ne nécessite pas la connaissance de ces racines, et qui consiste principalement à remplir le tableau (6.1) en utilisant seulement les coefficients du polynôme caractéristique du système.

p^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	....
p^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	....
p^{n-2}	b_1	b_2	b_3	....
p^{n-3}	c_1	c_2	c_3	....
p^{n-4}	d_1	d_2	d_3	....
	.	.	.	.
P^n	.	.	.	.

Tableau 1 : Tableau de Routh-Hurwitz

Les termes b_k, k = 1, 2, ….., dans ce tableau sont calculés comme suit :

$$b_1 = -\frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-1}\, a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$$

$$b_2 = -\frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-1}\, a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

.

.

.

$$b_k = -\frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2k} \\ a_{n-1} & a_{n-(2k+1)} \end{vmatrix}}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-1}\, a_{n-2k} - a_n a_{n-(2k+1)}}{a_{n-1}}$$

Les termes c_k, k = 1, 2,…, se calculent à partir des termes b_k comme suit :

$$c_1 = -\frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1} = \frac{b_1\, a_{n-3} - a_{n-1}\, b_2}{b_1}$$

$$c_2 = -\frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{b_1} = \frac{b_1\, a_{n-5} - b_3 a_{n-1}}{b_1}$$

.

.

.

$$c_k = -\frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-(2k+1)} \\ b_1 & b_{k+1} \end{vmatrix}}{b_1} = \frac{b_1\, a_{n-(2k+1)} - a_{n-1} b_{k+1}}{b_1}$$

Routh a démontré que le nombre de " pôles instables " (c'est-à-dire le nombre de pôles à partie réelle positive) de la fonction de transfert en boucle fermée est égal au nombre de changement de signe que comporte la 1ère colonne, lue de haut en bas.

Si ce nombre est différent de zéro, alors le système est instable.

Remarques :

Cette méthode a l'avantage d'être rapide est exacte, mais elle ne donne pas une mesure de la stabilité comme les autres critères ; car elle se borne à dire si le système est stable ou non. De plus, elle est inapplicable si on ne connaît pas l'expression mathématique de la fonction de transfert.

Le critère de Routh est intéressant pour connaître le nombre de racines réelles positives, mais il est incapable de donner des renseignements sur l'amortissement du système quand celui-ci est stable.

La méthode est cependant en défaut dans les 2 cas suivants :

- Si tous les coefficients d'une ligne sont nuls.
- Si un terme de la 1ere colonne de gauche est nul à l' exclusion des autres termes de la même ligne.

Exemple 2

On cherche la stabilité du système linéaire dont l'équation caractéristique est donnée par :

$$\mathbf{S^3 + 6s^2 + 12s + 8 = 0}$$

Ce système représente l'asservissement de position d'un moteur à courant continu qui entraine une charge donnée.

Le tableau de Routh-Hurwitz correspondant est donné par :

$$\begin{array}{c|cc} p^3 & 1 & 12 \\ p^2 & 6 & 8 \\ \hline p^1 & \dfrac{72-8}{6} & 0 \\ p^0 & 8 & \end{array}$$

La première colonne associée est :

1
6
$\frac{32}{3}$
8

Le nombre de changement de signe dans la première colonne est égal à 0. Par conséquent, le nombre de racines à partie réelle positive de l'équation caractéristique est nul. II en résulte que toutes les racines du système en boucle fermée sont à partie réelle négative. Le système est stable.

Les racines obtenues sont $p_{1,2}$ = - 2.00001= j0.00002 et p_3 = - 1.99998. ce qui confirme que le système est bien stable.

Exemple 3

Etudions la stabilité du système dont l'équation caractéristique est :

$$p^3 + 3p^2 + 3p + 11 = 0$$

Cette équation caractéristique correspond à l'asservissement de l'orientation d'un satellite.

Le tableau de Routh-Hurwitz associé à cette équation caractéristique est :

$$\begin{array}{c|cc} p^3 & 1 & 2 \\ p^2 & 3 & 11 \\ \hline p^1 & \dfrac{-2}{3} & 0 \\ p^0 & 11 & 0 \end{array}$$

La première colonne de ce tableau est :

1
3
$\frac{-2}{3}$
11

On constate qu'il y a deux changements de signe, ce qui correspond à l'existence de deux racines à parties réelles positives. Le système est instable.
On obtient comme pôles $S_{1,2} = 0.077 + j\ 1.87$ et $S_3 = -3.15$ Ce qui confirme le résultat précédent.

Exemple 4

Dans cet exemple, nous allons voir que le critère de Routh-Hurwitz peut être utilisé pour choisir la plage de variation des paramètres du système asservi. Nous cherchons dans cet exemple à déterminer les conditions que doit vérifier le gain K_p du correcteur proportionnel utilisé pour que le système en boucle fermée soit stable.
Le système en boucle ouverte est stable car ses trois racines – 200,-62.5,0 sont toutes situées dans le demi-plan gauche du plan complexe. La présence du pole à l'origine place le système en boucle ouverte à la frontière de stabilité.

L'équation caractéristique de ce système est donnée par l'expression suivante :

$$p^3 + 262.5p^2 + 12500p + 250k_p = 0$$

Et le tableau de Routh-Hurwitz s'écrit :

p^3	1	12500
p^2	262.5	$250k_p$
p^1	b_1	0
p^0	c_1	0

Où $b_1 = \frac{(12500)(265.5)-250k_p}{262.5}$ et $C_1 = 250k_p$

D'après le critère de Routh-Hurwitz, la stabilité de ce système exige qu'il n'y ait pas de changement de signe dans la première colonne. Ceci correspond aux conditions suivantes :

$$b_1 > 0 \qquad c_1 > 0$$

la seconde condition ($c_1 > 0$) donne $k_p > 0$. Par contre, la première condition (b1 > 0) peut s'écrire comme suit :

$$\frac{(12500)(262.5) - 250k_p}{262.5} > 0$$

Ce qui correspond à :

$$(12500)(262.5) - 250k_p > 0$$

Finalement, on obtient la condition suivante :

$$k_p < \frac{(12500)(262.5)}{250} = 13125$$

Pour avoir alors la stabilité du système, il faut choisir le paramètre k_p de manière à satisfaire la condition suivante :

$$0 < k_p < 13125$$

Les racines obtenues sont p_1 = - 200.89, p_2 = - 59.51 et p_3 = - 2.09. Ainsi, le système est bien stable.

Exemple 5: système à deux paramètres variables

Considérons maintenant la commande d'un système de deuxième ordre par un correcteur PI. L'équation caractéristique de ce système est donnée par :

$$p^3 + 2p^2 + (5 + 5k_p)p + 5k_I = 0$$

Le tableau de Routh-Hurwitz associé s'écrit :

$$\begin{array}{c|cc} p^3 & 1 & 5+5k_p \\ p^2 & 2 & 5K_I \\ \hline p^1 & \dfrac{10 + 10k_p - 5k_I}{2} & 0 \\ p^0 & 5k_I & 0 \end{array}$$

Pour que le système en boucle fermée soit stable, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées :

$$5k_I > 0$$

$$\frac{10 + 10k_p - 5k_I}{2} > 0$$

Ces deux conditions sont équivalentes aux suivantes :

$$k_I > 0 \qquad\qquad k_I - 2k_p < 2$$

Les racines obtenues sont $p_{1,2}$= - 0.73 = j2.95 et p_3 = - 0.54 . ce qui confirme le résultat.

3. LIMITES DE LA METHODE DE ROUTH-HURWITZ

Le critère de Routh-Hurwith est un critère qui a certaines limites, parmi lesquelles on peut citer :

1. Le critère algébrique est valable uniquement quand le polynôme traduisant l'équation caractéristique est à coefficients réels constants.

2. Le critère est non valable pour les systèmes avec retard, c'est-à-dire des systèmes de la forme : $F(p) = e^{-\tau p} \frac{N(p)}{D(p)}$
3. Le critère cesse d'être applicable lorsque le pivot est égal à zéro.
4. Le critère cesse d'être applicable lorsque tous les termes d'une ligne sont nuls.

Les limites énoncées ci-dessus constituent des cas particuliers que nous étudierons dans le cas des exemples suivants :

Exemple 6: un zéro sur la première colonne.

Etudions la stabilité du système dont l'équation caractéristique est :

$$p^4 + 2p^2 + p + 4 = 0$$

Le tableau de Routh-Hurwitz est donné par :

$$\begin{array}{c|ccc} p^4 & 1 & 2 & 4 \\ p^3 & 0 & 1 & 0 \\ \hline p^2 & \frac{0-1}{0} = \infty & 0 & \end{array}$$

Si le premier élément de la ligne est nul, la ligne suivante ne pourra pas être calculée car il y aurait une division par zéro. Pour éviter cela. Trois techniques peuvent être utilisées pour résoudre la question.

- Remplacer la variable p par (1/x) dans l'équation caractéristique. Suite à cette transformation, on obtient une nouvelle équation qui est la nouvelle équation caractéristique qui sert de base au critère de Routh-Hurwitz .
- Remplacer le zéro à la première colonne par un $\varepsilon>0$ (suffisamment petit) pour appliquer la règle. pour trouver le changement de signe dans la première colonne, on procède par passage à la limite, c'est-à-dire qu'on fait tendre ε vers 0.
- Multiplier l'équation caractéristique initiale par $(p + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ (ε doit être petit ; par exemple $\varepsilon = 1$). La nouvelle équation sert de base au critère.

Si nous appliquons la troisième méthode à l'exemple précédent, nous obtenons :

$$(p+1)(p^4+2p^2+p+4) = p^5+p^4+2p^3+ 3p^2+5p+4 = 0$$

Cette nouvelle équation caractéristique donne le tableau de Routh-Hurwitz suivant :

$$
\begin{array}{c|ccc}
p^5 & 1 & 2 & 5 \\
p^4 & 1 & 3 & 4 \\
p^3 & \frac{2-3}{1} & \frac{5-4}{1} & 0 \\
 & -1 & 1 & 0 \\
p^2 & \frac{-3-1}{-1} & 4 & \\
 & 4 & 4 & \\
 & 1 & 1 & \text{(division par 4)} \\
p^1 & 2 & 0 & \\
p^0 & 1 & &
\end{array}
$$

Comme il y a des changements de signe dans la première colonne, le système est bien instable.

Les racines obtenues sont $p_{1,2}= +0.72\pm j1.37$ et $p_{3,4} = -0.72\pm j1.08$ et $p_5=-1.0$.

En appliquant la première méthode au même exemple précédent, on remplace par (1/x) dans l'équation caractéristique, et on obtient la nouvelle équation de base suivante.

$$\left(\frac{1}{x}\right)^4 + 2\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \left(\frac{1}{x}\right) + 4 = \frac{1}{x^4} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} + 4 = 0$$

En multipliant cette équation par x^4, on obtient :

$$1 + 2x^2 + x^3 + 4\,x^4 = 0$$

De cette équation, on déduit le tableau de Routh-Hurwitz suivant :

$$
\begin{array}{c|ccc}
p^4 & 4 & 2 & 1 \\
p^3 & 1 & 0 & 0 \\
p^2 & \frac{-1}{2} & 0 & \\
p^1 & -1 & 0 & \\
p^0 & 1 & &
\end{array}
$$

En examinant la première colonne, on constate qu'il y a deux changements de signe, donc le système considéré est instable.

Les racines obtenues sont $p_{1,2} = -0.43 \pm j0.64$ et $p_{3,4} = 0.30 \pm j0.57$.

Par les deux méthodes, on constate que deux racines du système sont à partie réelle positive, ce qui confirme que le système est bien instable.

Exemple 7

Dans cet exemple, on étudie la stabilité du système linéaire dont l'équation caractéristique est donnée par :

$$p^4 + 2\,p^3 + 4\,p^2 + 8p + 10 = 0$$

En appliquant la deuxième méthode, on obtient :

p^4	1	4	10
p^3	2	8	0
p^2	ε	10	
p^1	B_1	$B_2=0$	
p^0	C_1		

Avec $B_1 = \frac{8\varepsilon - 20}{\varepsilon}$, $B_2 = 0$ et $C_1 = 10$

En procédant par le passage à la limite, on obtient :

$$B_1 = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{8\varepsilon - 20}{\varepsilon} = \frac{-20}{0} = -\infty$$

En examinant la première colonne, on constate qu'il y'a deux changements de signe, donc le système est bien instable.

Les racines obtenues sont $p_{1,2} = -0.42 \pm j1.86$ et $p_{3,4} = -1.42 \pm j0.86$. on constate que deux racines sont à partie réelle positive, ce qui confirme que le système est bien instable.

Comme deuxième limite du critère de Routh Hurwitz, considérons le cas ou tous les termes d'une ligne donnée sont nuls. La méthode que l'on peut utiliser pour contourner ce problème consiste à former une équation auxiliaire à partir de la ligne précédente (juste au dessus de la lige à zéros), dont la dérivée remplace la ligne qui a tous ses termes nuls. Ceci est illustré par le tableau suivant :

i	x	x	x	x	(équation auxiliaire)
i+1	0	0	0	0	(dérivée de l'équation auxiliaire par rapport à p)

Ou toutes les composantes de la (i+1)^e ligne sont nulles. L'équation auxiliaire dans ce cas sera formée à partir de la i^e ligne. Les coefficients de la dérivée de cette équation vont remplacer les zéros de la (i+1)^e ligne.

Exemple 8

Etudions la stabilité du système linéaire dont l'équation caractéristique est donnée par :

$$s^3 + 3s^2 + 4s + 12 = 0$$

Le tableau de Routh-Hurwitz associé est donné par :

p^3	1	4	
p^2	3	12	
p^1	0	0	Ligne qui répond au 2^e cas
p^0			

Ce tableau possède une ligne ou tous les termes sont nuls. Le critère ne s'applique pas. Nous devons alors former l'équation auxiliaire correspondante, qui s'écrit :

$$3p^2 + 12 = 0$$

La dérivée de cette équation est 6p. Le tableau est :

p^3	1	4
p^2	3	12
p^1	6	0
p^0	12	

En examinant la première colonne, on constate qu'il n y'a pas de changements de signe, donc le système est stable.
Les racines obtenues sont $p_1 = --3$ et $p_2 = -j2$ et $p_3 = +j2$ on constate qu'il n'ya pas de racines à partie réelle positive, ce qui confirme que le système est bien à la limite de la stabilité.

4. STABILITE DES SYSTEMES LINEAIRES AVEC RETARD PUR

Il existe des systèmes dont la réponse à une excitation donnée prend du temps pour se manifester. De tels systèmes s'appellent des systèmes avec retard. Pour étudier la stabilité de ces systèmes linéaires comprenant un retard, on utilise l'une des approximations suivantes :

1. **Développement en série de Taylor de $e^{-\tau p}$**

$$e^{-\tau p} = 1 - \tau p + \frac{\tau^2 p^2}{2!} - \frac{\tau^3 p^3}{3!} + \cdots$$

Qu'on arrête par exemple à :

$$e^{-\tau p} = 1 - \tau p + \frac{\tau^2 p^2}{2!}$$

2. **Deuxième possibilité d'approximation de $e^{-\tau p}$**

$$e^{-\tau p} = \frac{1}{1 + \tau p + \frac{\tau^2 p^2}{2!}}$$

3. **Troisième possibilité : consiste à utiliser l'approximation de Padé de $e^{-\tau p}$**

$$e^{-\tau p} = \frac{1-\frac{\tau p}{2}}{1+\frac{\tau p}{2}}$$

Evidement, par ces méthodes, nous faisons une approximation de la stabilité.

Exemple 9 : Commande d'un système avec retard pur

La fonction de transfert du système commandé est donnée par $e^{-\tau p}$ donnée par

$$G(p) = \frac{K_p e^{-\tau p}}{p(p^2+2p+2)}$$

En utilisant l'approximation de $e^{-\tau p}$ donnée par :

$$e^{-\tau p} = 1 - \tau p + \frac{\tau^2 p^2}{2!} = \frac{2-2\tau p+\tau^2 p^2}{2}$$

L'équation caractéristique du système en boucle fermée s'écrit

$$1+T(p) = 2p^3 + \left(4+k_p\tau^2\right)p^2 + \left(4-2k_p\tau\right)p + 2k_p$$

En supposant que $k_p > 0$ et que$(4-2k_p\,\tau) > 0$, c'est-à-dire $k_p \in \left[0, \frac{2}{\tau}\right]$ le tableau de Routh associé est :

$$\begin{array}{c|ll} p^3 & 2 & 4-2kp\,\tau \\ p^2 & 4+k_p\tau^2 & 2k_p \\ \hline p & b_1 & \\ p^0 & 2k_p & \end{array}$$

Ou $b_1 = \frac{(4+k_p\tau^2)(4-2kp\,\tau)-4k_p}{4+k_p\tau^2}$

La stabilité exige que : $b_1 > 0 \qquad k_p > 0$

Ces relations traduisent le domaine de stabilité

Exemple 10

En utilisant cette fois ci l'approximation de Padé $e^{-\tau p}$ de donnée par :

$$e^{-\tau p} = \frac{1-\frac{\tau p}{2}}{1+\frac{\tau p}{2}}$$

L'équation caractéristique du système en boucle fermée s'écrit :

$$1+T(p) = \frac{\tau}{2}p^4 + (1+\tau)p^3 + (2+\tau)p^2 + \left(2-\frac{k_p\tau}{2}\right)p + k_p = 0$$

En supposant que $k_p > 0$ et que $2-\frac{k_p\tau}{2} > 0$, c'est-à-dire $k_p \in \left[0, \frac{4}{\tau}\right]$, le tableau de Routh associé est :

p^4	$\frac{\tau}{2}$	$2+\tau$	k_p
p^3	$1+\tau$	$2-\frac{\tau}{2}k_p$	
p^2	b_1	b_2	
p^1	c_1		
p^0	d_1	0	

Ou $b_1 = \frac{(1+\tau)(2+\tau)-\frac{\tau}{2}(2-\frac{\tau}{2}k_p)}{1+\tau}$, $\quad b_2 = k_p,$

$c_1 = \frac{b_1(2-\frac{\tau}{2}k_p)(k_p(1+\tau)}{b_1}$, $d_1 = b_2$

La stabilité exige que :$b_1 > 0,\ b_2 > 0$, et $c_1 > 0$, ces relation traduisent le domaine de stabilité.

5. CRITERE DE HURWITZ

Pour appliquer ce critère, il faut d'abord construire une matrice carrée de dimension *n*.

Elle contient les coefficients du polynôme dès le deuxième, en ordre décroissant disposés dans la diagonale principale. Dans une colonne, les termes supérieurs au terme de la diagonale contiennent les coefficients suivants du polynôme en ordre décroissant. Les termes inférieurs à la diagonale contiennent les coefficients suivants du polynôme en ordre croissant.

$$\begin{matrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & & & 0 & & \vdots \\ \vdots & a_n & & \ddots & & a_0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & & & \ddots & a_1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & & & a_2 & a_0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & a_4 & a_2 & a_0 \end{matrix}$$

Le système linéaire d'ordre *n* est stable si les *n* déterminants contenant le premier terme de la matrice de Hurwitz sont positifs. Si on calcule explicitement les déterminants jusqu'à l'ordre 4, on retrouve les conditions de stabilité.

On constate que ces critères ne donnent qu'une réponse binaire: *stable* ou *instable*, mais pas d'information sur la qualité de la stabilité, contrairement aux critères décrits aux sections suivantes. Dans une situation où on dispose sur ordinateur d'outils mathématiques performants pour le calcul des racines de polynômes ou les tracés de réponse harmonique, ces critères algébriques, dont la mise en œuvre augmente rapidement en volume de calcul avec l'ordre du système, ont perdu considérablement de leur actualité au profit de critères, donnant des réponses plus complètes.

Nous venons de présenter un critère algébrique simple qui permet d'analyser la stabilité des systèmes linéaires invariants.

En notant bien que :

- **Le critère renseigné sur l'effectif des racines à partie réelle positive ;**
- **Le critère ne donne aucune information sur le degré de stabilité ;**
- **Le critère ne donne aucune information sur la façon de stabiliser un système instable.**

II. STABILITE DE NYQUIST

1. INTRODUCTION

L'analyse de Nyquist, méthode ayant trait (portée) à la réponse fréquentielle consiste essentiellement en un procédé graphique de détermination de la stabilité absolue et relative des systèmes de commande en boucle fermée.
Il y a plusieurs raisons pour choisir la méthode de Nyquist pour accueillir des renseignements sur la stabilité d'un système.

- La méthode de Routh et Hurwitz, ne conviennent souvent pas parce que, à quelques exceptions près, on ne peut les employer que pour établir la stabilité
- On ne peut les appliquer qu'a des systèmes dont l'équation caractéristique est un polynôme fini en P (exemple : signal est retardé de T) en cherche l'approximation. La méthode de Nyquist s'applique à des systèmes de retards de parcours sans qu'on ait besoin de faire des approximations, et par conséquent donne des résultats exacts sur la stabilité….

2. CRIT`ERE DE NYQUIST

Le critère de Nyquist est un critère fondamental à la base de diverses variantes pour l'analyse de stabilité. Son application est basée sur le tracé dans le diagramme de Nyquist du lieu de la réponse harmonique en boucle ouverte. Pour déterminer le lieu il faut tout d'abord définir le contour de Nyquist C_N. Il s'agit d'une courbe du plan complexe comprenant l'axe des imaginaires et dont les extrémités sont reliées à l'infini par un demi-cercle centré à l'origine et situé dans le demi-plan droit (voir figure 7.1). Le contour est orienté selon le sens anti-trigonométrique, c'est-`a-dire selon les ω croissants sur l'axe imaginaire. Si la FTBO possède des pôles sur l'axe imaginaire, le contour doit ˆêtre modifié´e de façon à les exclure. La figure 7.1 donne une illustration de ce que peut ˆêtre le contour de Nyquist dans le cas général et dans le cas ou le système possède une paire de pôles complexes conjugués en $\pm j\omega_1$. Quand un point d'affixe $p = \sigma + j\omega_1$ parcourt le contour de Nyquist, la FTBO du système parcourt le lieu de Nyquist complet N. Ce lieu est symétrique par rapport à l'axe réel et l'on peut se contenter de calculer d'abord la partie correspondant aux points du contour de Nyquist à partie imaginaire positive. On rend ensuite symétrique le lieu par rapport à l'axe réel.

Le tracé du lieu de Nyquist permet de déterminer la stabilité du système en boucle fermée en examinant la façon dont le lieu de Nyquist entoure le point critique, d'affixe -1.

2.1. Théorème : Critère de Nyquist.

L'intérêt du critère de Nyquist, c'est de déterminer le nombre de pôles à partie réelle positive de la fonction de transfert en boucle fermée, sans avoir à les calculer, car ce n'est pas toujours possible. En effet, alors qu'il est souvent assez simple d'identifier la fonction de transfert en boucle ouverte, il est plus délicat de connaître la fonction de transfert en boucle fermée.

2.2. Courbes en polaires

On peut représenter une fonction de transfert F(p) dans le domaine des fréquences sous la forme d'une fonction de transfert sinusoïdale, en remplaçant p par (j ω) dans l'expression de F(p). la forme qui en résulte F(jω) est une fonction complexe de la seule variable ω. Ainsi on peut en faire le graphique à deux dimensions en prenant ω comme paramètre et l'écrire sous l'une des deux formes équivalentes suivantes :

Forme polaire :

$$F(j\omega) = |F(j\omega)| \quad \phi(\omega)$$

Forme d'Euler :

$$F(j\omega) = |F(j\omega)|(\cos\phi(\omega) + j\sin\phi(\omega))$$

$|F(j\omega)|$Est le module de la fonction complexe $F(j\omega)$ *et*) $\phi(\omega)$ est son angle de phase, ArgF(jω)

$|F(j\omega)|\cos\phi(\omega)$ est la partie réelle et $|F(j\omega)|\sin\phi(\omega)$ est la partie imaginaires de $F(j\omega)$

3. LE CONTOUR D'EXCLUSION DE NYQUIST

Le contour d'exclusion de Nyquist est un contour fermé du plan de p qui enferme complètement le demi-plan droit du plan de p (DPD)

Le diagramme de Nyquist est l'image par H(p) du contour fermé appelé contour d'exclusion de Nyquist. Ce contour entoure tous les pôles et zéros de H(p) à partie réelle strictement positive.

SiH(p) a des pôles nuls ou imaginaires purs, le contour d'exclusion les évite par des demi-cercles de rayon ε→0.

On représente le contour d'exclusion de Nyquist généralisé par le contour du plan des p.

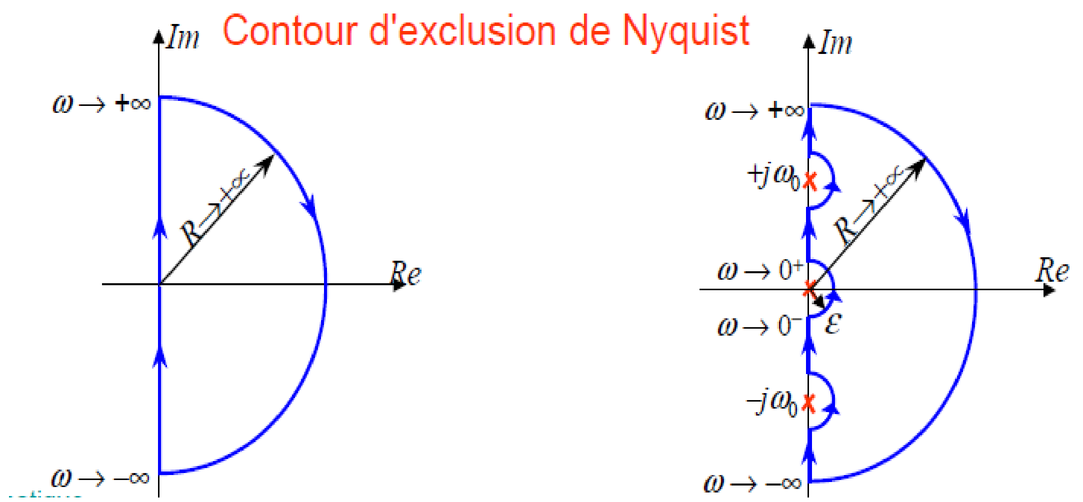


Figure 7.1 – Contour de Nyquist

On voit que tous les pôles et les zéros de H(p) situés dans le DPD sont enfermés par le contour d'exclusion de Nyquist quand on l'applique dans le plan de H(p).

On peut décrire analytiquement les différentes portions du contour d'exclusion de Nyquist de la manière suivante :

Chemin ab : p=jω $0<\omega<\omega_0$

Chemin bc : $p = \lim_{\rho\to 0}(j\,\omega_0 + \rho e^{j\theta})$ -90° $\leq \theta \leq +90°$

Chemin cd : p=jω $\omega_0 <\omega< \infty$

Chemin def :$p = \lim_{R\to\infty}(Re^{j\theta})$ $+90° \leq \theta \leq -90°$

Chemin fg : p=jω $-\infty <\omega< -\omega_0$

Chemin gh : $p = \lim_{\rho\to 0}(-j\,\omega_0 + \rho e^{j\theta})$ -90° $\leq \theta \leq +90°$

Chemin hi : p=jω $-\omega_0 <\omega< 0$

Chemin ija : $p = \lim_{\rho\to 0}(\rho e^{j\theta})$ -90° $\leq \theta \leq +90°$

4. DIAGRAMME DE STABILITE DE NYQUIST

Le diagramme de stabilité de Nyquist est une application du contour d'exclusion de Nyquist en entier dans le plan de H(p). On le construit en utilisant les propriétés des équations précédentes.

La relation :

$$\mathbf{Z = P - N}$$

donne le nombre Z de zéros instables de l'équation caractéristique1 + FTBO(p) = 0 et donc de pôles instables de la FTBF(p), avec :

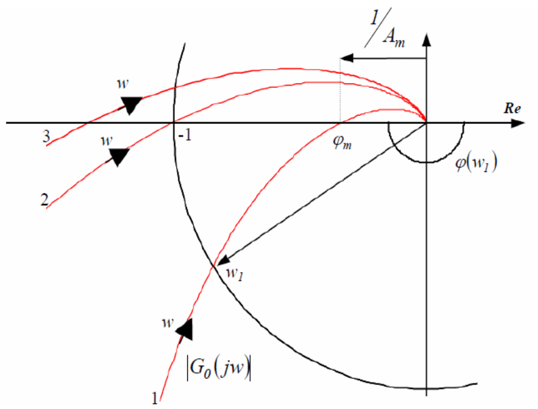
- P : Nombre de pôles instables de la FTBO(p),
- N : Nombre de tours que fait le lieu complet de Nyquist (ω variant de –∞ à +∞) autour du point critique (–1,0) dans le sens trigonométrique (sens anti-horaire).

En particulier, le système asservi est stable, à condition que : Z = 0 → P = N On notera P et Z les nombres respectifs de pôles et de zéros.

Ainsi, le système est stable en boucle fermée si le lieu de Nyquist complet fait P tours autour du point critique.

En pratique, on retiendra les étapes suivantes pour appliquer le critère de Nyquist :

- Etudier la stabilité de la FTBO → P: nombre de pôles instables de la FTBO.
- Tracer le lieu de Nyquist complet de la FTBO (ω variant de –∞ à +∞).
- Calculer le nombre de tours (comptes algébriquement dans le sens trigonométrique), soit N, que fait le lieu complet de Nyquist (ω variant de –∞ à +∞), autour du point critique (-1,0).
- En déduire Z = P – N = nombre de pôles instables de la FTBF.



1 Système stable

2 Système en limite de stabilité

3 Système instable

Exemple :

Soit un système asservi a retour unitaire dont la FTBO est : G(p) =$G(p) = \frac{K}{1 - T * p}$ $(T > 0)$

Discutons sa stabilité suivant les valeurs de K.

K > 0 • La FTBO(p) a un pole instable p = +1/T. →P= 1 • Le nombre de tours autour du point (-1,0) est : →N = 0 Z = P – N = 1 ≠ 0 1 pole instable de la FTBF →Systeme instable en boucle fermee. → Ce système est instable en boucle ouverte et instable en boucle fermée