جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم الاقتصادية والتجارية
وعلوم التسييـر

مجال العلوم الاقتصادية والتسيير
والعلوم التجارية *LMD-SEGC*
السنــة الأولــى

سلسلة التمــارين رقم 04 في الإحصــاء الرياضي

التوزيعات الاحتمالية الخاصة.

التمرين الأول:

لدينا 2000 عائلة، لكل منها 4 أطفال. إذا افترضنا أن X متغير عشوائي يمثل عدد الأطفال الذكور في العائلة، وأن احتمال ميلاد طفل ذكر يعادل احتمال ميلاد طفل أنثى.

المطلوب:

I. سحبنا عائلة عشوائيا. أحسب احتمال أن يكون فيها:

1. ولد على الأقل. 2. بنتان اثنتان. 3. ولد أو بنتان. 4. ولا بنت. 5. على الأكثر بنت.
6. أحسب العدد المحتمل من العائلات الموافق لكل احتمال من الاحتمالات السابقة من مجموع العائلات.

II. أحسب عدد الذكور المتوقع في كل عائلة.

التمرين الثاني: تنافس أحمد مع منافس له. لنفرض أن لكلا المتنافسين القوة نفسها.

المطلوب: أيهما أكبر احتمالا:

1. أن يفوز أحمد في 3 مباريات من أصل 4 مباريات، أو أن يفوز في 5 مباريات من أصل 8 مباريات؟
2. أن يفوز أحمد في 3 مباريات على الأقل من أصل 4 مباريات، أو أن يفوز في 5 مباريات على الأقل من أصل 8 مباريات؟

التمرين الثالث:

إذا عُلِم أن المتغير العشوائي X -الذي يمثل عدد الوحدات التي تستهلكها أسرة ما من سلعة معينة خلال الشهر- يخضع لتوزيع "بواسون"، بمتوسط 3 وحدات شهريا.

المطلوب:

1. أحسب الاحتمالات الآتية:
- احتمال أن تستهلك الأسرة وحدتين خلال الشهر.
- احتمال أن تستهلك الأسرة وحدة واحدة على الأقل خلال الشهر.
- احتمال أن تستهلك الأسرة 3 وحدات على الأكثر خلال الشهر.

2. حدد معلمة هذا التوزيع، واحسب الانحراف المعياري لعدد الوحدات المستهلكة.

التمرين الرابع:

يتكون تقرير كتابي من 100 صفحة، بها 110 خطأً طِباعيا موزعة على عشوائيا على صفحاته. لنفتح التقرير عشوائيا على إحدى صفحاته.

1. كم تتوقع عدد الأخطاء فيها؟
2. ما هو احتمال أن تكون خالية من الأخطاء؟

التمرين الخامس:

أوجد المساحة تحت المنحنى الطبيعي المعياري المحصورة بين:

1. Z= 0 et Z=1,20
2. Z= (- 0,68) et Z=0
3. Z= (- 0,46) et Z=2,21
4. Z= 0,81 et Z=0,94
5. إلى يمين Z=(- 1,28)

التمرين السادس:

حدد قيمة العدد b في كل من الحالات الآتية:

1. $p(0 < Z < b) = 0,19$ 2. $P(Z < b) = 0,95$ 3. $P(Z < b) = 0,05$

التمرين السابع:

في صف معين في كلية الاقتصاد، يحصل 10 % من الطلبة الأفضل على تقدير "جيد" في مقياس الإحصاء الرياضي. فإذا وُجد أن نقاط الطلبة في أحد امتحانات هذا المقياس تخضع للتوزيع الطبيعي بمتوسط 10.5 درجات، وانحراف معياري 1.5 درجة.

المطلوب:

1. أوجد أدنى علامة تستحق التقدير "جيد".
2. أحسب احتمال أن تتراوح نقطة طالب معين ما بين:

أ. 9 و 12.

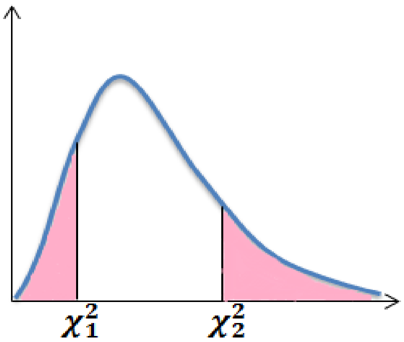
ب. 7.5 و 13.5

ج. 6 و 15

د. أقل من 6.

ه. أكبر من 15.

التمرين الثامن:



يبين الشكل الآتي الرسم البياني لتوزيع "χ^2" بخمس درجات حرية. أوجد قيمة كل من χ_1^2 و χ_2^2 في الحالات الآتية:

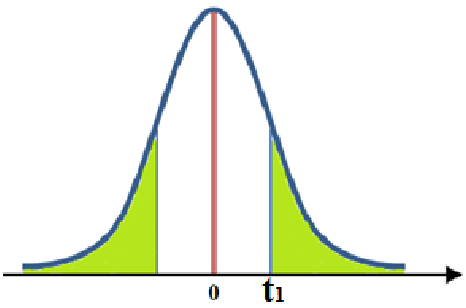
1. المساحة المضللة إلى اليمين تساوي 0.05
2. المساحة المضللة الكلية تساوي 0.05
3. المساحة المضللة إلى اليسار تساوي 0.10
4. المساحة المضللة إلى اليمين تساوي 0.01

ملاحظة: نفرض أن المساحتين المضللتين متساويتان.

التمرين التاسع:

أوجد قيم χ^2 التي تكون من أجلها مساحة الجانب الأيمن من توزيع χ^2 مساوية لــ 0.05 ، إذا كان عدد درجات الحرية مساويا لــ: أ. 15 درجة. ب. 21 درجة. ج. 56 درجة.

التمرين العاشر:



يبين الشكل الآتي الرسم البياني لتوزيع "ستودنت" بتسع درجات حرية.

أوجد قيمة t_1 التي من أجلها:

1. المساحة المضللة إلى اليمين تساوي 0.05
2. المساحة المضللة الكلية تساوي 0.05
3. المساحة الكلية غير المضللة تساوي 0.99
4. المساحة المضللة إلى اليسار تساوي 0.01
5. المساحة إلى يسار t_1 تساوي 0.90

التمرين الحادي عشر:

1. أوجد قيم t التي تكون من أجلها مساحة الجانب الأيمن لتوزيع t تساوي 0.05 إذا كانت درجات الحرية تساوي: 16 درجة. ب. 27 درجة. ج. 200 درجة.

التمرين الثاني عشر:

1. باستخدام جدول توزيع "فيشر" أوجد قيم F في الحالات الآتية:

أ. $F_{0.95}^{10,15}$ ب. $F_{0.99}^{15,9}$ ج. $F_{0.05}^{8,30}$ د. $F_{0.01}^{15,9}$

حلول سلسلة التمــارين رقم 04 في الإحصــاء الرياضي.

التمرين الأول: لدينا X يمثل عدد الذكور وهو متغير عشوائي خاضع للتوزيع الثنائي، ذي المعلمتين $N=4$ و $p=0.50$.

$$X \sim B(N=4,\ p=0.5)$$

سحبنا عائلة عشوائيا. أحسب احتمال أن يكون فيها:

1. ولد على الأقل.

$$p(X \geq 1) = p(X=1) + p(X=2) + p(X=3) + p(X=4)$$
$$= 1 - p(X<1) = 1 - p(X=0)$$
$$= 1 - C_4^0 (0.5)^0 (0.5)^4 = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16} = 0{,}9375$$

2. بنتان اثنتان. أي ولدان اثنان:

$$p(X=2) = C_4^2 (0.5)^2 (0.5)^2 = \frac{6}{16}$$

3. ولد أو بنتان. أي ولد أو ولدان:

$$p(X=1) + p(X=2) = C_4^1 (0.5)^1 (0.5)^3 + C_4^2 (0.5)^2 (0.5)^2 = \frac{4}{16} = \frac{6}{16} = \frac{10}{16}$$

4. ولا بنت. أي 4 أولاد:

$$p(X=4) = C_4^4 (0.5)^4 (0.5)^0 = {}^{1}\!/_{16}$$

5. على الأكثر بنت واحدة. أي 3 أولاد أو 4 أولاد:

$$p(X=3) + p(X=4) = C_4^3 (0.5)^3 (0.5)^1 + C_4^4 (0.5)^4 (0.5)^0 = \frac{4}{16} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$$

6. حساب العدد المحتمل من العائلات الموافق لكل احتمال من الاحتمالات السابقة من مجموع العائلات.

- العدد المحتمل من العائلات التي فيها ولد على الأقل هو:

مجموع العائلات × الاحتمال = 2000 × 0.9375 = 1875 عائلة.

وبالطريقة نفسها نحسب الأعداد المحتملة لبقية الأسر.

أحسب عدد الذكور المتوقع في كل عائلة. أي حساب التوقع الرياضي:

$$\mu = N \times p = 4 \times 0.5 = 2$$

التمرين الثاني : لنفرض X متحولا عشوائيا يمثل عدد المباريات التي فاز فيها أحمد.

1. أن يفوز أحمد في 3 مباريات من أصل 4 مباريات، أو أن يفوز في 5 مباريات من أصل 8 مباريات.

حساب الاحتمال الأكبر من بين هاتين الحالتين.

في الحالة الأولى: نحسب احتمال فوز أحمد في 3 مباريات من أصل 4. نلاحظ أن X خاضع للتوزيع الثنائي ذي المعلمتين $N=4$ و $p=0.50$ أي $X \sim B(N=4,\ p=0.5)$ (لأن للمتنافسين القوة نفسها)

$$p(X=3) = C_4^3 (0.5)^3 (0.5)^1 = 0.25$$

في الحالة الثانية: نحسب احتمال فوز أحمد في 5 مباريات من أصل 8. نلاحظ أن X خاضع للتوزيع الثنائي ذي المعلمتين *N=8* و *p=0.50* أي $X \sim B(N = 8,\ p = 0.5)$

$$p(X = 5) = C_8^5 (0.5)^5 (0.5)^3 = 0.22$$

وعليه فإن أن يفوز أحمد في 3 مباريات من أصل 4 مباريات أكبر من احتمال أن يفوز في 5 مباريات من أصل 8.

2. أن يفوز أحمد في 3 مباريات على الأقل من أصل 4 مباريات، أو أن يفوز في 5 مباريات على الأقل من أصل 8 مباريات. حساب الاحتمال الأكبر من بين هاتين الحالتين.

في الحالة الأولى: نحسب احتمال فوز أحمد في 3 مباريات على الأقل من أصل 4. نلاحظ أن X خاضع للتوزيع الثنائي ذي المعلمتين *N=4* و *p=0.50* أي $X \sim B(N = 4,\ p = 0.5)$

$$p(X \geq 3) = p(X = 3) + p(X = 4) = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16} = 0{,}31$$

في الحالة الثانية: نحسب احتمال فوز أحمد في 5 مباريات على الأقل من أصل 8. نلاحظ أن X خاضع للتوزيع الثنائي ذي المعلمتين *N=8* و *p=0.50* أي $X \sim B(N = 8,\ p = 0.5)$

$$p(X \geq 5) = p(X = 5) + p(X = 6) + p(X = 7) + p(X = 8) = 0{,}36$$

وعليه فإن احتمال أن يفوز أحمد على الأقل في 5 مباريات من أصل 8 أكبر من احتمال فوزه على الأقل في 3 من أصل 4.

التمرين الثالث:

نعلم أن $X \sim P(\lambda = 3)$

1. نوع المتغير العشوائي X هو متغير عشوائي متقطع.
2. كتابة قانونه الاحتمالي:

$$p(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \times \lambda^k}{k!} = \frac{e^{-3} \times 3^k}{k!}$$

3. أحسب الاحتمالات الآتية:

- احتمال أن تستهلك الأسرة وحدتين خلال الشهر.

$$p(X = 2) = \frac{e^{-3} \times 3^2}{2!} = 0.22$$

- احتمال أن تستهلك الأسرة وحدة واحدة على الأقل خلال الشهر.

$$p(X \geq 1) = 1 - p(X < 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \frac{e^{-3} \times 3^0}{0!} 1 - 0.049 = 0.95$$

- احتمال أن تستهلك الأسرة 3 وحدات على الأكثر خلال الشهر.

$$p(X \leq 3) = p(X = 3) + p(X = 2) + p(X = 1) + p(X = 0) = 0.64$$

4. تحديد معلمة هذا التوزيع، واحسب الانحراف المعياري لعدد الوحدات المستهلكة.

من المعطيات، معلمة هذا التوزيع هي التوقع الرياضي وتساوي 3.

الانحراف المعياري: نعلم أن : $\mu = \lambda = \sigma^2 = 3$ ومنه:

$$\sigma = \sqrt{\lambda} = \sqrt{3} = 1.73$$

التمرين الرابع:

1. عدد الأخطاء المتوقع في الصفحة المختارة.

لدينا 100 صفحة، بها 110 خطأً طِباعيا، وعليه فالصفحة الواحدة يُتوقع أنّ بها $1.1 = \frac{110}{100}$

أي حوالي خطأ واحد في كل صفحة.

2. احتمال أن تكون الصفحة المختارة خالية من الأخطاء.

ليكن X متحولا عشوائيا يمثل عدد الأخطاء الطباعية في كل صفحة:

نلاحظ أن X خاضع لتوزيع بواسون لأن:

$$\begin{cases} N = 100 \geq 50 \\ Np = \lambda = 1.1 < 5 \end{cases} \Rightarrow X \sim P(\lambda = 1.1)$$

$$p(X = 0) = \frac{e^{-1.1} \times 1.1^0}{0!} = e^{-1.1} = 0.33$$

التمرين الخامس:

إيجاد المساحة تحت المنحنى الطبيعي المعياري: (من جدول التوزيع الطبيعي المعياري الملحق 2)

1- $\mathrm{P}(0 < Z < 1.20) = \boxed{0.3849}$

2- $\mathrm{P}(-0.68 < Z < 0) = \mathrm{P}(0 < Z < 0.68) = \boxed{0.2518}$

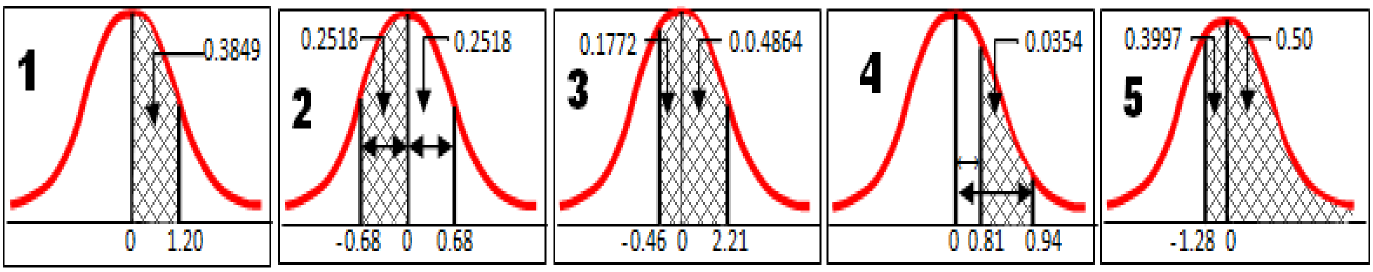
3- $\mathrm{P}(-0.46 < Z < 2.21) = \mathrm{P}(0 < Z < 0.46) + \mathrm{P}(0 < Z < 2.21) = 0.1772 + 0.4864 = \boxed{0.6636}$

4- $\mathrm{P}(0.81 < Z < 0.94) = \mathrm{P}(0 < Z < 0.94) - \mathrm{P}(0 < Z < 0.81) = 0.3264 - 0.2910 = \boxed{0.0354}$

5- إلى يمين $(z = -1.28)$:

$$P(z > -1.28) = \mathrm{P}(0 < Z < 1.28) + \mathrm{P}(Z > 0) = 0.3997 + 0.5 = \boxed{0.8997}$$

-رسم توضيحي:



التمرين السادس:

تحديد قيمة b في كل حالة:

1- $P(0 < Z < b) = 0.19 \Rightarrow b = \boxed{0.495}$

من جدول التوزيع الطبيعي المعياري نجد أن المساحة 0.19 محصورة بين المساحتين 0.1915 و 0.1879 أي أن b محصورة بين 0.50 و 0.49 و بذلك نأخذ القيمة الوسطية 0.495 ($\frac{0.50+0.49}{2} = 0.495$)

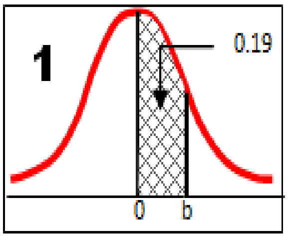
2- $P(Z < b) = 0.95 \Rightarrow P(0 < Z < b) = 0.45 \Rightarrow b = \boxed{1.645}$

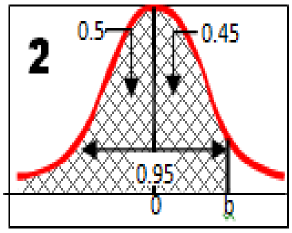
من جدول التوزيع الطبيعي المعياري نجد أن المساحة 0.45 محصورة بين المساحتين 0.4495 و0.4505 أي أن b محصورة بين 1.64 و 1.65 و بذلك نأخذ القيمة الوسطية 1.645 ($\frac{1.64+1.65}{2} = 1.645$)

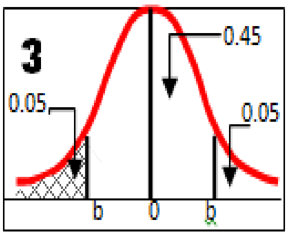
3- $P(Z < b) = 0.05 \Rightarrow P(0 < Z < b) = 0.45 \Rightarrow b = \boxed{1.645}$

من جدول التوزيع الطبيعي المعياري نجد أن المساحة 0.45 محصورة بين المساحتين 0.4495 و0.4505 أي أن b محصورة بين 1.64 و 1.65 و بذلك نأخذ القيمة الوسطية 1.645 ($\frac{1.64+1.65}{2} = 1.645$)

-رسم توضيحي:





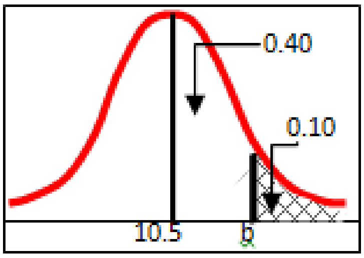


التمرين السابع:

$$X \sim \mathbb{N}(\mu = 10.5\,, \delta = 1.5)$$

1- أدنى علامة تستحق التقدير "جيد": نرمز لها بـ b

$$P(X \geq b) = 0.10 \Rightarrow P\left(Z \geq \frac{b-\mu}{\delta}\right) = 0.10 \Rightarrow P\left(Z \geq \frac{b-10.5}{1.5}\right) = 0.10$$
$$\Rightarrow P\left(0 < Z < \frac{b-10.5}{1.5}\right) = 0.5 - 0.10 = 0.40$$



من جدول التوزيع الطبيعي المعياري نجد أن المساحة 0.40 محصورة بين المساحتين 0.3997 و0.4015 أي أن $\left(\frac{b-10.5}{1.5}\right)$ محصورة بين 1.28 و 1.29 و بذلك نأخذ القيمة الوسطية 1.285 ($\frac{1.28+1.29}{2} = 1.285$)

و بذلك:

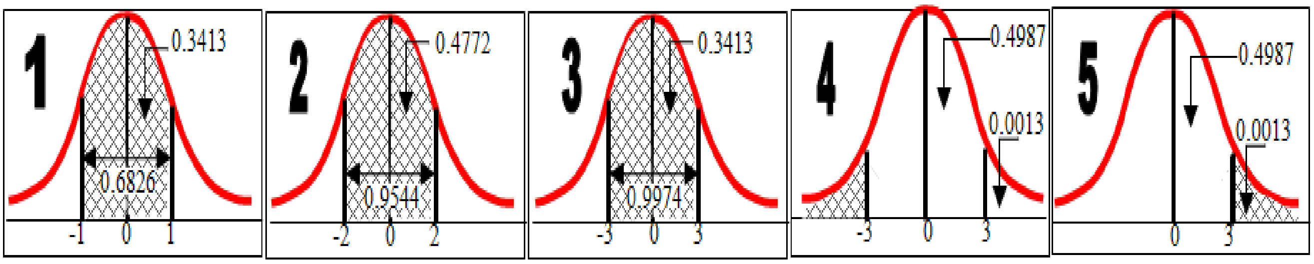
$$\frac{b-10.5}{1.5}=1.285 \implies b=(1.5*1.285)+10.5=\boxed{12.43}$$

وعليه أدنى علامة تستحق التقدير جيد هي: 12.5

2- حساب الاحتمالات التالية:

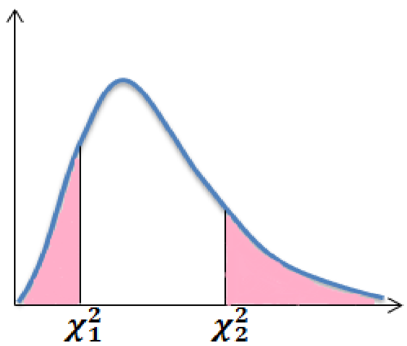
- $P(9<X<12)=P\left(\frac{9-10.5}{1.5}<Z<\frac{12-10.5}{1.5}\right)=P(-1<Z<1)=2P(0<Z<1)=$ $2(0.3413)=\boxed{0.6826}$
- $P(7.5<X<13.5)=P\left(\frac{7.5-10.5}{1.5}<Z<\frac{13.5-10.5}{1.5}\right)=P(-2<Z<2)=2P(0<Z<2)=$ $2(0.4772)=\boxed{0.9544}$
- $P(6<X<15)=P\left(\frac{6-10.5}{1.5}<Z<\frac{15-10.5}{1.5}\right)=P(-3<Z<3)=2P(0<Z<3)=$ $2(0.4987)=\boxed{0.9974}$
- $P(X<6)=P\left(Z<\frac{6-10.5}{1.5}\right)=P(Z<-3)=P(Z>3)=0.5-P(0<Z<3)=0.5-$ $0.4987=\boxed{0.0013}$
- $P(X>15)=P\left(Z>\frac{15-10.5}{1.5}\right)=P(Z>3)=0.5-P(0<Z<3)=0.5-0.4987=\boxed{0.0013}$

-رسم توضيحي:



التمرين الثامن:

1- مساحة المنطقة المظللة إلى اليمين =0.05:



إذا كانت المساحة إلى يمين $\chi_2^2=0.05$ فالمساحة على يسارها = 0.95 و تمثل χ_2^2 المئينة الـ 95 $(\chi^2_{0.95})$، بالرجوع إلى الملحق E نجد قيمة $\chi^2_{0.95}$ التي تقابل $V=5$ هي 11.1

بما ان المساحتين المضللتين متساويتان، فإن المساحة المضللة على يسار χ_1^2= 0.05

بالرجوع إلى الملحق E نجد قيمة $\chi^2_{0.05}$ التي تقابل $V=5$ هي 1.15

2- المساحة المظللة الكلية =0.05:

المساحة إلى يمين $\chi_2^2=0.025$ ، و تكون بذلك على يسارها =0.975 أي أن χ_2^2 تمثل المئينة الـ 97.5 $(\chi^2_{0.975}=$ 12.8)من الجدول، و χ_1^2 تمثل المئينة الـ 2.5 نجد $(\chi^2_{0.025}=0831)$ من الجدول أيضا.

3- المساحة المظللة إلى يسار 0.1: χ_1^2 تمثل المئينة العاشرة $(\chi^2_{0.1}=1.61)$.

4- المساحة المظللة إلى يمين0.01: المساحة إلى يسار χ_2^2 هي 0.99 $(\chi^2_{0.99}=15.1)$.

التمرين التاسع:

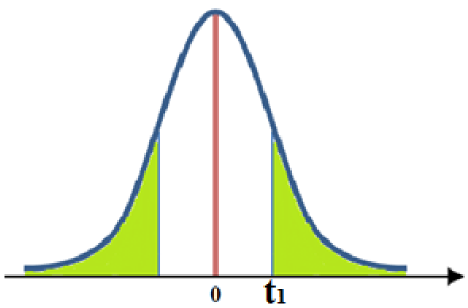
إذا كانت مساحة الجانب الأيمن =0.05 يعني أن الجانب الأيسر مساحته =1-0.05 =0.95 أي نبحث عن $\chi^2_{0.95}$ من أجل:

$$V = 15 \Longrightarrow \chi^2_{0.95} = 25$$

$$V = 21 \Longrightarrow \chi^2_{0.95} = 32.7$$

$$V = 56 \Longrightarrow \chi^2_{0.95} = 67.5$$

التمرين العاشر:



إيجاد قيم t_1 عند درجة حرية 9:

1- المساحة المظللة إلى اليمين تساوي0.05:

المساحة إلى اليسار =0.95 و منه t_1 تمثل المئينة الـ 95، $t_{0.95} = 1.83$ ، من الملحق.

2- المساحة المظللة الكلية تساوي 0.05

بالتناظر المساحة إلى يمين $t_{0.95} = 0.025$ و على يساره =0.975 و نجد من الملحق: $t_{0.975} = 2.26$

3- المساحة الكلية غير المظللة تساوي 0.99: المظللة =0.01 أي $t_{0.995} = 3.25$

4- المساحة المظللة إلى اليسار تساوي 0.01: $t_{0.99} = 2.82$

5- المساحة إلى يسار t_1 تساوي 0.90 أي $t_{0.9} = 1.38$

التمرين الحادي عشر:

مساحة الجانب الأيمن 0.05 أي الأيسر 0.95 و عليه نجد $t_{0.95}$ من أجل:

$$V = 16 \Longrightarrow t_{0.95} = 1.75$$

$$V = 27 \Longrightarrow t_{0.95} = 1.70$$

$$V = 200 \Longrightarrow t_{0.95} = 1.645$$

التمرين الثاني عشر:

من جدول فيشر نجد القيم:

أ. $F^{10,15}_{0.95} = 2.54$

ب. $F^{15,9}_{0.99} = 4.96$

ج. $F^{8,30}_{0.05} = \dfrac{1}{F^{30;8}_{0.95}} = \dfrac{1}{3.08} = 0.325$

د. $F^{15,9}_{0.01} = \dfrac{1}{F^{9;15}_{0.99}} = \dfrac{1}{3.89} = 0.257$

انتهى...