Introduction

Nous sommes constamment environnés de signaux : radio, télévision, téléphone portable (smartphone), photo numérique, ..., et le mode de vie contemporains repose chaque jour d'avantage sur la transmission de tels signaux. Ceci implique différentes opérations, à savoir, l'acquisition (souvent analogique), la numérisation (c'est-à-dire la discrétisation et l'encodage en langage binaire), la compression (les signaux sont de plus en plus volumineux), la transmission avec un minimum de distorsion, et enfin la réception et la reconstruction du signal avec niveau de fidélité acceptable. Parmi les techniques utilisées, l'analyse de Fourier et l'analyse en ondelettes.

Joeseph Fourier révéla sa fameuse théorie qui stipule que toute fonctions périodique peut être représentée par une série infinie de sinusoïdes. La transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$ et $L^2(\mathbb{R})$ est une généralisation des séries de Fourier sur la base exponentielle. L'analyse de Fourier présente des inconvénients majeurs qui ne permettent pas une analyse satisfaissante de toutes les sortes de signaux.

A cause de la manque de la localisation temporelle de l'analyse de Fourier, dans les années 1940, le physicien D.Gabor découvre la première forme de représentation temps-fréquence. Il obtient une analyse temporelle en découpant arbitrairement le signal en plages de longueur limitée, chaque plage centrée autour du paramètre μ de localisation en temps.

Les ondelettes ont été créées par J. Morlet et A. Grossmann comme une alternative à l'analyse de Fourier. Il s'agit d'une famille de fonctions déduites d'une même fonction (applée ondelette mère) par opérations de translations et de dilatatations. L'analyse par ondelettes donne une représentation des signaux permettant la mise en valeur simultanément des informations temporelles et fréquentielles (localisation temps-fréquence). Grâce à la notion d'analyse Multirésolution (AMR) introduite par S. Mallat et Y. Meyer, la théorie des bases d'ondelettes a pu être développée, notamment leur construction, leurs propriétés, et algorithmes associés.

Chapitre 1

Analyse de Fourier

Ce chapitre donne une explication théorique concernant l'analyse de Fourier. Nous rappelons les séries de Fourier et nous expliquons la théorie de la transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$ et $L^2(\mathbb{R})$.

1.1 Rappels sur les série de Fourier

1.1.1 Polynômes trigonométriques

Définition 1.1.1 *Une fonction f est dite périodique de période "a" avec $a \in \mathbb{R}_+^*$ si :*

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t+a) = f(t).$$

Définition 1.1.2 *On dit que la fonction p est un polynôme trigonométrique d'ordre N si elle s'écrit sous la forme suivante :*

$$p(t) = \sum_{n=-N}^{N} C_n e^{2i\pi n \frac{t}{a}}, C_n \in \mathbb{C}. \tag{1.1}$$

On note $e_n(t) = e^{2i\pi n \frac{t}{a}}$. Cette fonction est de période "a", il en est donc de même pour le polynôme p .

On peut écrire $p(t)$ sous forme d'une combinaison linéaire de sinus et cosinus :

$$p(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{N}(a_n \cos 2\pi n\frac{t}{a} + b_n \sin 2\pi n\frac{t}{a}).$$

avec

$$\begin{cases} a_n &= C_n + C_{-n} \\ b_n &= i(C_n - C_{-n}) \end{cases}.$$

Notons T_N l'espace des polynômes trigonométriques de degré inferieur ou égale à N définis par (1.1) quand les C_n varient. On munit cet espace vectoriel du produit scalaire :

$$(p, q) = \int_0^a p(t)\overline{q}\,(t)\,dt,$$

où $\bar{q}$ est le conjugué de q.

On a bien sûr

$$(e_n, e_m) = \begin{cases} a & \text{si} \quad n = m, \\ 0 & \text{si} \quad n \neq m. \end{cases}$$

Cela exprime le fait que les (e_n) sont orthogonales. Ces fonctions forment donc une famille libre, il est par ailleurs clair qu'elle est génératrice. C'est donc une base de l'espace T_N qui est par conséquent de dimension $2N + 1$.

Nous avons donc $(e_n, e_m) = 0$ si $n \neq m$ et $\|e_n\|_2 = \sqrt{a}$. Alors $(p, e_n) = aC_n$. Donc

$$C_n = \frac{1}{a}\int_0^a p(t)e^{-2i\pi n\frac{t}{a}}dt \text{ (formule de Fourier)}, \tag{1.2}$$

ce qui donne une expression des coefficients C_n en fonction de p. Pour la version réelle de la décomposition, on obtient :

$$\begin{cases} a_n &= \frac{2}{a}\int_0^a p(t)\cos(2\pi n\frac{t}{a})dt. \\ b_n &= \frac{2}{a}\int_0^a p(t)\sin(2\pi n\frac{t}{a})dt. \end{cases}$$

Remarque 1.1.1 *A cause de la périodicité de p, l'intégrale* $C_n = \frac{1}{a}\int_0^a p(t)e^{-2i\pi n\frac{t}{a}}dt$ *peut être prise sur tout intervalle de longueur a. Par exemple $[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]$. On a alors dans ce cas les propriétés suivantes :*

si p est paire alors pour tout n, $C_n = C_{-n}$ et donc pour tout n, $b_n = 0$.

si p est impaire alors pour tout n, $C_n = -C_{-n}$ et donc pour tout n, $a_n = 0$.

1.1.2 Séries de Fourier

Soit $f \in L^2_P(0,a)$ une fonction périodique de période "a", on peut approximer la fonction f par un polynôme trigonométrique f_N (N est un entier fixé) dans l'espace T_N c-à-d f_N est une solution du problème suivant :

$$\underset{x_n \in \mathbb{C}}{Min} \left\| f - \sum_{n=-N}^{N} x_n e_n \right\|_2 .$$

Le minimun est atteint lorsque $x_n = C_n$,et pour cette valeur seulement, alors

$$\begin{aligned} f_N(t) &= \sum_{n=-N}^{N} C_n(f) e^{\frac{2i\pi nt}{a}}, \\ &\text{ou} \\ f_N(t) &= \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos\tfrac{2i\pi nt}{a} + b_n \sin\tfrac{2i\pi nt}{a}). \end{aligned}$$

et on a le théorème suivant :

Théorème 1.1.1 *(voir [1]) Si $f \in L^2_P(0,a)$, la meilleure approximation f_N de f ,dans T_N :*

$$f_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} C_n e^{\frac{2i\pi nt}{a}},$$

où les C_n sont définis par (1.2), tend vers f dans $L^2_p(0,a)$ quand $N \longrightarrow +\infty$. Autrement dit :

$$\int_0^a \mid f(t) - f_N(t) \mid^2 dt \longrightarrow 0 \text{ quand } N \longrightarrow +\infty.$$

Si la fonction f n'est pas périodique, on utilise la transformation de Fourier qui est une généralisation des série de Fourier. La transformation de Fourier repose sur la décompositon de la fonction suivant une base continue de cosinus et sinus ou de l'expentielles imaginaires.

1.2 Transformation de Fourier

Cette section donne l'explication théorique de la transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$ et dans $L^2(\mathbb{R})$, et ses propriétés principales.

1.2.1 Transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$

Définition 1.2.1 *Etant donnée $f \in L^1(\mathbb{R})$, on pose :*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}f(\zeta) &= \hat{f}(\zeta) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{2i\pi\zeta t}{a}} f(t)dt, \\ \overline{\mathcal{F}}f(\zeta) &= \overline{\hat{f}}(\zeta) &= \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{2i\pi\zeta t}{a}} f(t)dt. \end{aligned}$$

$\mathcal{F}f$ est la transformée de Fourier (T.F) de f.

$\overline{\mathcal{F}}f$ est la transformée de Fourier conjuguée.

Théorème 1.2.1 (Théorème de Riemann_Lebesgue) $(Voir\,[1])$ *Etant donnée $f \in L^1(\mathbb{R})$, on a :*

1. $\mathcal{F}$ est une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}$
2. $\mathcal{F}$ est un opérateur linéaire continu de $L^1(\mathbb{R})$ dans $L^\infty(\mathbb{R})$ et

$$\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1.$$

3. $$\lim_{|\zeta|\to+\infty} \left|\hat{f}(\zeta)\right| = 0.$$

(de même pour $\bar{\mathcal{F}}$)

Théorème 1.2.2 (Inversion dans $L^1(\mathbb{R})$) *(Voir [1])Si f et $\hat{f}$ sont dans $L^1(\mathbb{R})$ on a $\overline{\mathcal{F}}\hat{f}(t) = f(t)$ en tout point t où f est continue.*

Proposition 1.2.1 *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Alors, on a les relations congugaison-parité :*

$$\begin{array}{rcl} \overline{\mathcal{F}(f)} & = & \overline{\mathcal{F}}(\bar{f}), \\ (\mathcal{F}(f))_\sigma & = & \overline{\mathcal{F}}(f) \quad = \quad \mathcal{F}(f_\sigma). \end{array}$$

On en déduit les propriétés de parité :

$$\begin{array}{lcl} \textit{Si } f \textit{ est paire (resp impaire)} & \Rightarrow & \hat{f} \textit{ est paire (resp impaire)}, \\ \textit{Si } f \textit{ est réelle paire(resp imaginaire impaire)} & \Rightarrow & \hat{f} \textit{ est réelle paire(resp imaginaire impaire)}. \end{array}$$

Proposition 1.2.2 *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Alors, on obtient :*

$$\begin{array}{rcl} \tau_a f(\zeta) & = & e^{-2i\pi a\zeta}\hat{f}(\zeta), \\ \tau_a \hat{f}(\zeta) & = & e^{\widehat{2i\pi at}f(t)}. \end{array}$$

Proposition 1.2.3 *1. Si $t^k f(t)$ est dans $L^1(\mathbb{R}), k = 0, 1, ...n$, $\hat{f}$ est un fois dérivable et on a pour*

$$k = 0, 1, ...n \qquad \hat{f}^{(k)}(\zeta) = (2i\widehat{\pi t)^k f}(t).$$

2. Si $f \in C^n(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ et si toutes les dérivées $f^{(k)}, k = 1, \ldots N$ sont dans $L^1(\mathbb{R})$ alors pour

$$k = 1, \ldots N, \qquad \widehat{f^{(k)}}(\zeta) = (2i\pi\zeta)^k \hat{f}(\zeta).$$

3. Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ est à support borné, alors $\hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R})$.

1.2.2 Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$

La transformée de Fourier de la fonction indicatrice $f = 1_{[-1,1]}$ vaut

$$\hat{f}(\zeta) = \int_{-1}^{1} e^{-2\pi i\zeta t} dt = 2\frac{\sin\zeta}{\zeta}.$$

Cette fonction n'est pas intégrable car f n'est pas continue, mais elle est de carré intégrable. Le théoreme 1.2.2 sur la transformée de Fourier inverse n'est pas applicable. Ceci conduit à étendre la transformée de Fourier à l'espace $L^2(\mathbb{R})$ des fonctions f d'énergie finie $\int_{-\infty}^{+\infty} \mid f(t) \mid^2 dt < +\infty$.

Théorème 1.2.3 (Parseval-Plancherel) *(Voir [1]) Si h ét f sont dans $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ alors :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\overline{h}(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\zeta)\overline{\hat{h}}(\zeta)d\zeta, \tag{1.3}$$

Pour $h = f$, on déduit :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mid f(t) \mid^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \mid \hat{f}(\zeta) \mid^2 d\zeta. \tag{1.4}$$

Théorème 1.2.4 *(Voir [1]) La transformation de Fourier $\mathcal{F}$ (respectivemet la transformation inverse $\overline{\mathcal{F}}$) se prolonge en une isométrie de $L^2(\mathbb{R})$ sur $L^2(\mathbb{R})$. Désignons toujours par $\mathcal{F}$ (resp $\overline{\mathcal{F}}$) ce prolongement on a :*

1.

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}) \quad \mathcal{F}\left(\overline{\mathcal{F}}f\right) = \overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}f) = f \quad p.p.$$

2.

$$\forall f, g \in L^2(\mathbb{R}) \quad \int_{\mathbb{R}} f(t)\bar{g}(t)dt = \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{F}f)(\zeta)\overline{(\mathcal{F}g)}(\zeta)d\zeta.$$

3.

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}) \quad \|f\|_2 = \|\mathcal{F}f\|_2.$$

Propriété 1.2.1 *(Voir [1])*

ii) Si $f \in L^2(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}(f)$ est la limite dans $L^2(\mathbb{R})$ de la suite $g_n$définie par

$$g_n(\zeta) = \int_{-n}^{+n} e^{-2i\pi\zeta t} f(t)dt.$$

iii) Si $f \in L^2(\mathbb{R}), \overline{\mathcal{F}}f$ est limite dans $L^2(\mathbb{R})$ de la suite h_n définie par :

$$h_n(\zeta) = \int_{-n}^{+n} e^{2i\pi\zeta t} f(t)dt.$$

1.2.3 L'inconvénient de la transformée de Fourier

Malgré son immense succès, cette technique a plusieurs défauts, en particulier son manque évident de localisation temporelle. En effet, l'analyse de Fourier permet de connaitre les différentes fréquences excitées dans un signal, c'est-à-dire son spectre, mais ne permet pas de savoir à quels instants ces fréquences ont été émises. Cette analyse donne une information globale et non locale, car les fonctions d'analyse utilisées sont des sinusoïdes qui oscillent indéfiniment sans s'amortir. Cette perte de localité n'est pas un inconvénient pour analyser des signaux dont la structure statistiquement stationnaires, mais devient un problème pour l'étude de signaux non stationnaires.

Bibliographie

[1] Gasquet C et Witomski P. Analyse de Fourier et applications : filtrage, calcul numérique et ondelettes. Dunod, 1990.

[2] Mallat S. Une exploration des signaux en ondelettes. Editions de l'école Polytechnique,2000.

[3] Meyer Y. Ondelettes et opérateurs. I : Ondelettes. Editions Hermann, 1990.

Annexe : Notations

Notations

$f_\sigma(x)$: La symetrisée f_σ de f est défini par $f_\sigma(x) = f(-x)$.

$\tau_a f(x)$: la translate de $\tau_a f(\zeta)$ de f est la fonction définie par $\tau_a f(x) = f(x-a)$.

$\mathcal{F}f(\zeta)$: Transformée de Fourier.

$\overline{\mathcal{F}}f(\zeta)$: Transformée de Fourier conjuguée.

$\hat{f}(\zeta)$: Transformée de Fourier $\mathcal{F}f(\zeta) = \hat{f}(\zeta)$.

T_N : L'ensemble des polynômes trigonométriques de dégrée $p \leq N$ défini par : $T_N = \left\{ \sum_{n=-N}^{N} C_n e^{2i\pi nt/a} : C_{n\in}\mathbb{C}, \forall n \in \{-N, ..., N\} \right\}$.

$L_p^2(0,a)$: $L_p^2(0,a) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ f \text{ de période } a \text{ et } \int_0^a |f(t)|^2 dt \leq \infty \right\}$. on le munit du produit scalaire $(f,g) = \int_0^a f(t)\,\bar{g}(t)\,dt$ et la norme associée $\|f\|_2 = \sqrt{(f,f)} = \left(\int_0^a |f(t)|^2 dt\right)^{1/2}$

$L^1(\mathbb{R})$: L'espace des fonctions intégrables : $L^1(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\,dt \leq \infty \right\}$.

$L^2(\mathbb{R})$: Espace desfonctions d'énergie finie : $L^2(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt \leq \infty \right\}$

$\left(\frac{d}{dx}\right)^k f(x)$: Dérivée de f à l'ordre k.