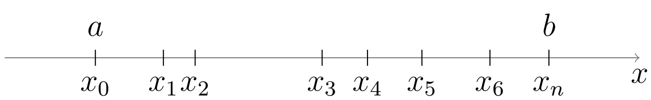
الفصل الأوّل

التكامــلات البسيطة والمضاعفة

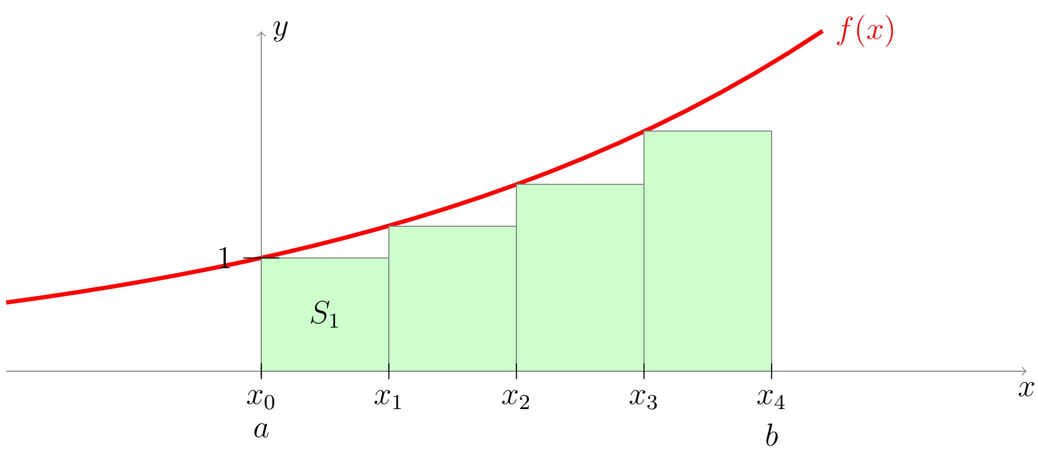
1.1 تكامل ريمان، التكامل المحدود

تعريف 1.1.1 : لتكن $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ دالة معرفة على المجال $[a,b]$. نقسم المجال $[a,b]$ الى n جزء كيفي، ولتكن ξ_k نقطة كيفية حيث

$$\xi_k \in \left[x_{k-1}, x_k\right], 1 \le k \le n.$$



ولتكن S_n مجموع مساحات المستطيلات التي طول كل منها $f\left(\xi_k\right)$ وعرض كل منها $(x_k - x_{k-1})$.



$$S_n = \sum_{k=0}^{n} f\left(\xi_k\right)\left(x_k - x_{k-1}\right)$$

إذا كان للمجموع S_n نهاية محدودة لا تتعلق بطريقة تقسيم المجال $[a,b]$ عندما $n \to \infty$، فإننا نرمز لهذه النهاية بالرمز

$$\int_a^b f\left(x\right) dx.$$

و نسمى هذه النهاية بتكامل ريمان للدالة f على المجال $[a,b]$. و نقول أن f قابلة للتكامل حسب ريمان على المجال $[a,b]$. ونكتب

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b f\left(x\right) dx.$$

1.1.1. خواص

الخصائص الرئيسية الثلاثة للتكامل هي علاقة شال $Chasles$ ، الإيجابية والخطية.

علاقة شال

اقتراح 1 : ليكن $a < c < b$. إذا كانت f قابلة للتكامل على المجال $[a,c]$ و المجال $[c,b]$ فإن f قابلة للتكامل على المجال $[a,b]$ ونكتب

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx.$$

لدينا أيضا

$$\int_a^a f(x)\ dx = 0 \qquad \text{ومن أجل} \quad a < b \quad \int_b^a f(x)\ dx = -\int_a^b f(x)\ dx.$$

إجابية التكامل

اقتراح 2 : لتكن $a \leq b$ عددين حقيقيين و f و g دالتين قابلتين للتكامل على المجال $[a,b]$. اذا كانت $f \leq g$ فإن

$$\int_a^b f(x)\ dx \leq \int_a^b g(x)\ dx.$$

على وجه الخصوص ، تكامل الدالة الموجبة موجب: إذا كان $f \geq 0$ فإن

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$$

خطية التكامل

اقتراح 3 : لتكن f, g دالتين قابلتين للتكامل على المجال $[a,b]$.

1) $f+g$ دالة قابلة للتكامل و لدينا

$$\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

2) من أجل كل λ ، λf قابلة للتكامل ولدينا

$$\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx.$$

ومنه لدينا خطية التكامل أي من أجل كل λ, μ

$$\int_a^b \big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx$$

3) $f \times g$ دالة قابلة للتكامل على المجال $[a,b]$

لكن على العموم لدينا

$$\int_a^b (fg)(x)\,dx \neq \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_a^b g(x)\,dx\right).$$

4) $|f|$ دالة قابلة للتكامل على المجال $[a,b]$ و لدينا

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b \big|f(x)\big|\,dx$$

مثال 1 :

$$\int_0^1 \left(7x^2 - e^x\right)dx = 7\int_0^1 x^2\,dx \;-\; \int_0^1 e^x\,dx = 7\frac{1}{3} \;-\; (e-1) = \frac{10}{3} - e$$

استخدمنا الحسابات التي رأيناها قبلا : $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$ و $\int_0^1 e^x\,dx = e-1$.

مثال 2 : ليكن $I_n = \int_1^n \frac{\sin(nx)}{1+x^n}\, dx$. أثبت أن $I_n \to 0$ عندما $n \to +\infty$.

$$|I_n| = \left|\int_1^n \frac{\sin(nx)}{1+x^n}\, dx\right| \leq \int_1^n \frac{|\sin(nx)|}{1+x^n}\, dx \leq \int_1^n \frac{1}{1+x^n}\, dx \leq \int_1^n \frac{1}{x^n}\, dx$$

يبقى فقط حساب هذا التكامل الأخير:

$$\int_1^n \frac{1}{x^n}\, dx = \int_1^n x^{-n}\, dx = \left[\frac{x^{-n+1}}{-n+1}\right]_1^n = \frac{n^{-n+1}}{-n+1} - \frac{1}{-n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

لأن ($n^{-n+1} \to 0$ و $\frac{1}{-n+1} \to 0$).

ملاحظة 1 : لاحظ أنه بالرغم من أن $f \times g$ قابل للتكامل لدينا بشكل عام

$$\int_a^b (fg)(x)\, dx \neq \left(\int_a^b f(x)\, dx\right)\left(\int_a^b g(x)\, dx\right).$$

على سبيل المثال ، ليكن $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ الدالة المحددة بواسطة $f(x) = 1$ إذا كان $x \in [0, \frac{1}{2}[$ و $f(x) = 0$ من أجل $x \notin [0, \frac{1}{2}[$. لتكن $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ الدالة المعرفة بـ $g(x) = 1$ إذا كان $x \in [\frac{1}{2}, 1[$ و $g(x) = 0$ من أجل $x \notin [\frac{1}{2}, 1[$.

ومنه $f(x)g(x) = 0$ من أجل كل $x \in [0,1]$ و $\int_0^1 f(x)g(x)\, dx = 0$ حيث $\int_0^1 f(x)\, dx = \frac{1}{2}$ و $\int_0^1 g(x)\, dx = \frac{1}{2}$.

2.1 حساب الدوال الأصلية

تعريف 1.2.1 : ليكن $I = [a, b]$ مجال في $\mathbb{R}$ والتكن f دالة حيث

$$f : I \to \mathbb{R}$$

نقول أن F دالة أصلية للدالة f حيث

$$F : I \to \mathbb{R}$$

إذا تحقق ما يلي

1- F قابلة للإشتقاق على المجال المفتوح I.

$(-2$

$$\forall x \in I, \quad F'(x) = f(x)$$

نظرية 1.2.1 : كل دالة مستمرة $f : I \to \mathbb{R}$ تقبل دالة أصلية

نظرية 2.2.1 : لتكن الدالة $f : I \to \mathbb{R}$ حيث f تقبل دالة أصلية

مجموعة الدوال الأصلية للدالة f هي

$$\{F + c, c \in \mathbb{R}\}$$

حيث F دالة أصلية خاصة للدالة f.

نرمز بـ $\int f(t)dt$ للدالة الأصلية للدالة f ونكتب:

$$F(x) = \int f(x)dx$$

1.2.1. التكامل المحدود

لتكن الدالة $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ و المستمرة على المجال $[a,b]$ حيث $b \geq a$.

يمكن تعريف التكامل بطريقة أخرى أكثر استعمالا في ايجاد قيم ثابتة للتكاملات من خلال النظرية التالية:

نظرية 3.2.1 : لتكن الدالة $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ المعرفة

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

هي دالة أصلية للدالة f يعني أن الدالة F قابلة للإشتقاق وتحقق :

$$F'(x) = f(x), \forall x \in [a,b]$$

تعريف 2.2.1 : نسمي التكامل المحدود للدالة f الذي نرمز له بالرمز

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

العدد الحقيقي $F(b)-F(a)$ حيث F هي الدالة الأصلية للدالة f و نكتب

$$\int_a^b f\left(x\right)dx=F\left(b\right)-F\left(a\right).$$

مثال 1 : لنحسب التكاملات التالية:

1- **من أجل** $f(x)=e^x$ **لتكن** $F(x)=e^x$ **دالة أصلية لها، ومنه**

$$\int_0^1 e^x\ dx=\left[e^x\right]_0^1=e^1-e^0=e-1.$$

2- **من أجل** $g(x)=x^2$ **لتكن** $G(x)=\frac{x^3}{3}$ **دالة أصلية لها، ومنه**

$$\int_0^1 x^2\ dx=\left[\tfrac{x^3}{3}\right]_0^1=\tfrac{1}{3}.$$

3-

$$\int_a^x \cos t\ dt=\left[\sin t\right]_{t=a}^{t=x}=\sin x-\sin a$$

دالة أصلية للدالة $\cos x$.

4- إذا كانت دالة فردية تكون دالتها الأصلية دالة زوجية (نبرهن لاحقا) ونستنتج أن

$$\int_{-a}^{a} f(t)\ dt=0.$$

2.2.1. طرق التكامل

التكامل بالتجزئة

نظرية 4.2.1 : **لتكن** u **و** v **دالتين من الفئة** C^1 **المعرفتين على المجال** $[a,b]$ **فإن** :

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\ dx=\left[uv\right]_a^b-\int_a^b u'(x)\,v(x)\ dx$$

صيغة التكامل بالتجزئة للدالة الأصلية هي نفسها ولكن بدون حدود:

$$\int u(x)v'(x)\ dx=[uv]-\int u'(x)v(x)\ dx.$$

مثال 2 : لحساب التكامل

$$\int_0^1 xe^x \, dx$$

نضع $u(x) = x$ **و** $v'(x) = e^x$.

نعلم أن الدالة $u'(x) = 1$ **هي الدالة المشتقة للدالة** $u(x)$ **و الدالة** $v(x) = e^x$ **هي الدالة الأصلية للدالة** v' **و باستعمال صيغة التكامل بالتجزئة نجد:**

$$\begin{aligned} \int_0^1 xe^x dx &= \int_0^1 u(x)v'(x) \, dx \\ &= [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u'(x)v(x) \, dx \\ &= [xe^x]_0^1 - \int_0^1 1 \cdot e^x \, dx \\ &= (1 \cdot e^1 - 0 \cdot e^0) - [e^x]_0^1 \\ &= e - (e^1 - e^0) \\ &= 1 \end{aligned}$$

مثال 3 : لحساب التكامل

$$\int_1^e x \ln x \, dx.$$

نضع هذه المرة $u(x) = \ln x$ **و** $v'(x) =$.

و منه الدالة $u' = \dfrac{1}{x}$ **هي الدالة المشتقة للدالة** $u(x)$ **و الدالة** $v = \frac{x^2}{2}$ **هي الدالة الأصلية للدالة** v' **و باستعمال صيغة التكامل بالتجزئة نجد:**

$$\begin{aligned} \int_1^e \ln x \cdot x \, dx = \int_1^e uv' = [uv]_1^e - \int_1^e u'v = \left[\ln x \cdot \frac{x^2}{2}\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x}\frac{x^2}{2} \, dx \\ = \left(\ln e \frac{e^2}{2} - \ln 1 \frac{1^2}{2}\right) - \frac{1}{2}\int_1^e x \, dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e \\ = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2+1}{4} \end{aligned}$$

مثال 4 : لحساب التكامل

$$\int \arcsin x \, dx$$

لإيجاد دالة أصلية للدالة $\arcsin(x)$ نجعلها من شكل جداء حيث نضع $u(x) = \arcsin(x)$ و $v'(x) = 1$، حيث لدينا $u'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ و $v(x) = x$، ثم نطبق صيغة التكامل بالتجزئة فنجد

$$\begin{aligned}\int 1 \cdot \arcsin(x)dx &= [x\arcsin(x)] - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\ &= [x\arcsin(x)] - \left[-\sqrt{1-x^2}\right] \\ &= x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + c\end{aligned}$$

مثال 5 : حساب التكامل

$$\int x^2 e^x dx.$$

نضع $u(x) = x^2$ و $v'(x) = e^x$.

نعلم أن الدالة $u'(x) = 2x$ هي الدالة المشتقة للدالة $u(x)$ و الدالة $v(x) = e^x$ هي الدالة الأصلية للدالة $v'(x)$ و باستعمال صيغة التكامل بالتجزئة نجد:

$$\int x^2 e^x\,dx = \left[x^2 e^x\right] - 2\int x e^x\,dx$$

نعيد التكامل بالتجزئة للمرة الثانية على الجزء الثاني من المساوات السابقة نجد:

$$\int x e^x\,dx = [xe^x] - \int e^x\,dx = (x-1)e^x + c$$

في الأخير نجد

$$\int x^2 e^x\,dx = (x^2 - 2x + 2)e^x + c.$$

التكامل بتغيير المتغير

نظرية 5.2.1 : إذا كانت f دالة معرفة على المجال $I = [a,b]$ و ليكن التقابل $\varphi : J \to I$ من الفئة $\mathcal{C}^1$. من أجل كل $a, b \in J$ لدينا:

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt$$

إذا كانت F دالة أصلية للدالة f فإن $F \circ \varphi$ هي الدالة الأصلية للدالة $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$. بصفة أخرى

$$\left(\int f(x)\,dx\right) \circ \varphi = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

أي أن الدالة الأصلية للدالة $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ تنتج من تركيب كل من الدالة f و φ.

العبارة $\int f(x)\ dx = \int f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)\ dt$ تمثل فعلا تغيير للمتغير، أو بصيغة مبسطة نضع $x = \varphi(t)$ ومنه نجد بعدها بالإشتقاق $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$ أي $dx = \varphi'(t)\ dt$ ما يعطينا :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

مثال 6 : حساب التكامل

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos(x)\,dx$$

بوضع

$$\sin(x) = t \Longrightarrow \sin(x)' = \cos(x) = dt$$

ومنه تتغير حدود التكامل من x الى t كما يلي

$$\begin{aligned} x &= 0 \Longrightarrow t = \sin(0) = 0 \\ x &= \frac{\pi}{2} \Longrightarrow t = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{aligned}$$

ومنه نجد

$$\begin{aligned} x &= 0 \Longrightarrow \sin(0) = 0 \\ x &= \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos(x)\,dx &= \int_0^1 t^2 dt \\ &= \left.\frac{1}{3}t^3\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

3.1 تذكير بالدوال ذات عدة متغيرات

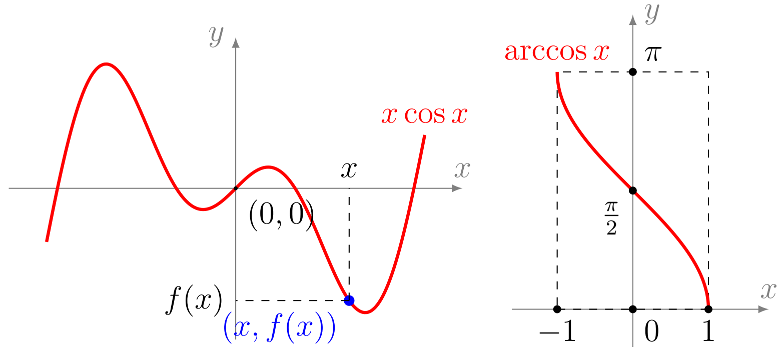
في هذا الجزء سوف ندرس الدوال ذات المتغيرات المتعددة المعرفة على $\mathbb{R}^2$ أو $\mathbb{R}^3$ ، ويمكن أيضا دراستها في الإطار العام أي على $\mathbb{R}^n$ وبالتالي ستكون هذه الدوال من النموذج

$$f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

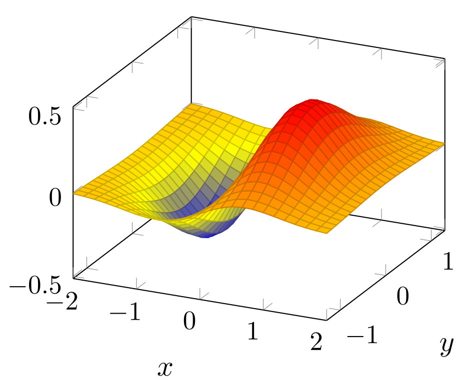
حيث $n \geq 1$ عدد طبيعي

بعبارة أخرى ، ستكون عناصر مجموعة البداية E أشعة من الشكل $x = (x_1, \ldots, x_n)$، وستكون عناصر المجموعة النهائية أعداد حقيقية.

مثال 1 : 1) $n = 1$، $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: وهي أبسط حالة، $x \mapsto f(x)$. فيما يلي الرسوم البيانية للدوال $x \mapsto x\cos x$ و $x \mapsto \arccos x$:



2) $n = 2$، $f : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. نرمز إلى المتغيرات بالرمز (x, y). الدوال $(x, y) \mapsto f(x, y)$، يتم تمثيلها، على سبيل المثال، من خلال الأسطح :



منحنى يمثل الدالة $(x, y) \mapsto -x \cdot e^{-x^2-y^2}$.

بمجرد أن يكون $n > 2$ ، من الصعب جدا الحصول على رؤية رسومية للدوال ذات عدة متغيرات.

1.3.1. النهايات

يمكن تعميم مفهوم النهايات والاستمرار للدوال ذات متغير واحد على الدوال ذات عدة متغيرات دون تعقيد، يكفي استبدال القيمة المطلقة بالمعيار الإقليدي.

لتكن f دالة $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ معرفة في جوار النقطة $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ماعدى النقطة x_0.

تعريف 1.3.1 : الدالة تقبل كنهاية العدد الحقيقي ℓ عندما x يؤول الى x_0 اذا كان:

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in E : \quad 0 < \|x - x_0\| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \epsilon$$

ونكتب

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \qquad \text{أو} \qquad f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell$$

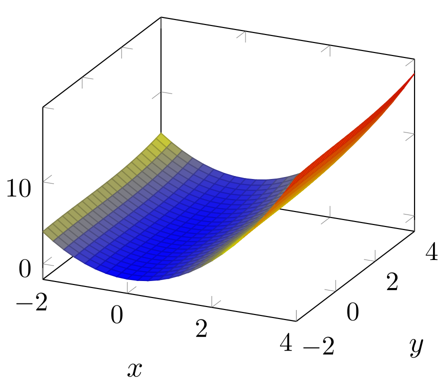
بنفس الطريقة نعرف النهاية في اللانهاية $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ كمايلي :

$$\forall A > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in E : \quad 0 < \|x - x_0\| < \delta \implies |f(x)| > A$$

مثال 2 : لتكن الدالة f المعرفة كما يلي

$$f(x, y) = x^2 + y \sin(x + y^2).$$

1) لنثبت أن f تؤول إلى 0 لما $(x, y) \to (0, 0)$.



الدالة $f(x, y)$ محدودة باستعمال $|\sin(t)| \leq 1$: نجد

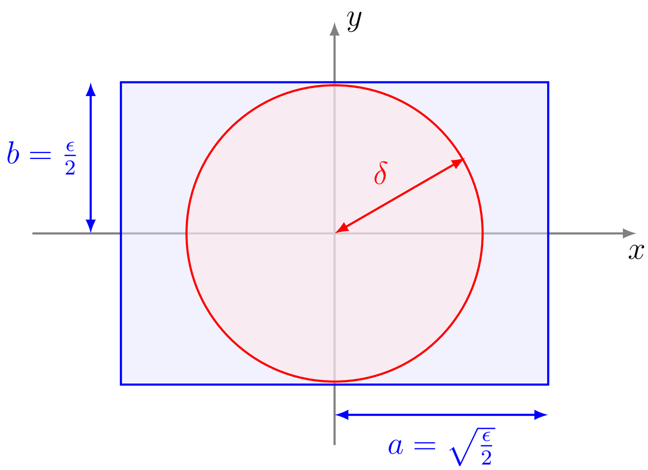
$$\left|f(x, y)\right| = \left|x^2 + y \sin(x + y^2)\right| \leq x^2 + |y| \left|\sin(x + y^2)\right| \leq x^2 + |y|$$

نأخذ $0<\epsilon<1$، $a=\sqrt{\frac{\epsilon}{2}}$ و $b=\frac{\epsilon}{2}$، إذاً من أجل $x\in]-a,a[$، لدينا $x^2<\frac{\epsilon}{2}$، من أجل $y\in]-b,b[$ لدينا $|y|<\frac{\epsilon}{2}$.
ومنه من أجل $(x,y)\in]-a,a[\times]-b,b[$ نجد:

$$\left|f(x,y)\right|\leq x^2+|y|<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon$$

أحد قيم δ التي تحقق النهاية هي $\delta=\frac{\epsilon}{2}$ حقيقةً، إذا كان $\|(x,y)\|<\delta$ فإن $|x|<\delta=\frac{\epsilon}{2}\leq\sqrt{\frac{\epsilon}{2}}$ و $|y|<\delta=\frac{\epsilon}{2}$ ومنه $|f(x,y)|<\epsilon$. نستنتج : f تقبل نهاية 0، لما (x,y) تؤول إلى $(0,0)$.

2) نبحث عن U مجال مفتوح يحتوي على 0 بحيث من أجل كل $(x,y)\in U$ يكون لدينا $|f(x,y)|<\frac{1}{100}$.
من أجل $\epsilon=\frac{1}{100}$ لدينا $a=\frac{1}{\sqrt{200}}$ و $b=\frac{1}{200}$. من أجل كل (x,y) من المجال $]-a,a[\times]-b,b[$، لدينا $|f(x,y)|<\frac{1}{100}$.



عمليات على النهايات

نادرا ما يستخدم التعريف في حساب النهايات و بدلاً من ذلك ، نستخدم النظريات العامة: من عمليات على النهايات على الدوال ذات عدة متغيرات، فلا توجد أي صعوبة أو حداثة في ذلك.

اقتراح 1 : لتكن $f,g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ معرفتين في جوار $x_0\in\mathbb{R}^n$ حيث f و g تقبل نهاية عند x_0. لدينا

الخواص التالية

$$\lim_{x_0}(f+g) = \lim_{x_0} f + \lim_{x_0} g, \qquad \lim_{x_0}(fg) = \lim_{x_0} f \lim_{x_0} g$$

$$\lim_{x_0} \frac{1}{g} = \frac{1}{\lim_{x_0} g}, \qquad \lim_{x_0} \frac{f}{g} = \frac{\lim_{x_0} f}{\lim_{x_0} g}$$

4.1 التكامل المضاعف

لتكن $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ **دالة معرفة على المجموعة المحدودة** $D \subset \mathbb{R}^2$.

تعريف 1.4.1 : **من أجل كل** $\delta > 0$، نسمي **تجزئة للمجموعة** D المجموعة $\mathcal{S}_\delta$ **من المربعات** K_i **من** جنب δ التي تغطي **أو تشمل** D **في أي** خطوة سياج δ. نعتبر التجزئتين الجزئيتين:

- $\mathcal{S}_\delta^{ext}$ تعني **تغطية شاملة (من الخارج)**،
- $\mathcal{S}_\delta^{int}$ تعني **غطاء صارم (من الداخل)**.

ولأن D محدود ، تحتوي التجزئة الجزئية على عدد محدود من المربعات ، ولدينا $\mathcal{S}_\delta^{int} \subset \mathcal{S}_\delta^{ext}$.
في الواقع ، المربعات الموجودة في المجموعة $\mathcal{S}_\delta^{int} \setminus \mathcal{S}_\delta^{ext}$ تغطي الحافة بالضبط ∂D لـ D.
لأي اختيار من النقاط $(x_i, y_i) \in K_i \cap D$، نسمي **مجموع ريمان** f **المرافق للتجزئة الجزئية** $\mathcal{S}_\delta^{ext/int}$ **و في النقاط** $\{(x_i, y_i)\}$ **المجاميع**

$$R_\delta^{ext/int}(f, \{(x_i, y_i)\}) = \sum_{K_i \in \mathcal{S}_\delta^{ext/int}} f(x_i, y_i)\ \delta^2,$$

حيث أي حد $f(x_i, y_i)\ \delta^2$ **يمثل الحجم الجبري من القاعدة المتوازية** K_i **ذو الارتفاع** $f(x_i, y_i)$ **مع إشارة** $\pm$ **التي هي إشارة** f **عند** (x_i, y_i).

تعريف 2.4.1 : **إذا كانت النهايات**

$$\lim_{\delta \to 0} R_\delta^{ext/int}(f; \{(x_i, y_i)\})$$

موجودة ، فهي مستقلة عن اختيار النقاط $(x_i, y_i) \in K_i \cap D$ **فهم متطابقن. في هذه الحالة نسمي** **التكامل الثنائي لـ** f **على** D **هذه النهاية:**

$$\iint_D f(x, y)\ dx\ dy = \lim_{\delta \to 0} R_\delta^{ext/int}(f; \{(x_i, y_i)\}).$$

نقول أنه **تكامل** f **على** D **حسب ريمان** إذا كان التكامل $\iint_D f(x,y)\ dx\ dy$ منته (عدد حقيقي وليس $\pm\infty$).
حالة خاصة إذا كانت الدالة f مستمرة فإن D يكون محدود.

تعريف 3.4.1 : التكامل الثنائي هو أحد أنواع التكامل المحدد الموسع ليشمل الدوال المعرفة ذات متغيرين ، فاذا كانت الدالة $f(x,y)$ معرفة في $\mathbb{D}$ من المستوي (xOy) فان

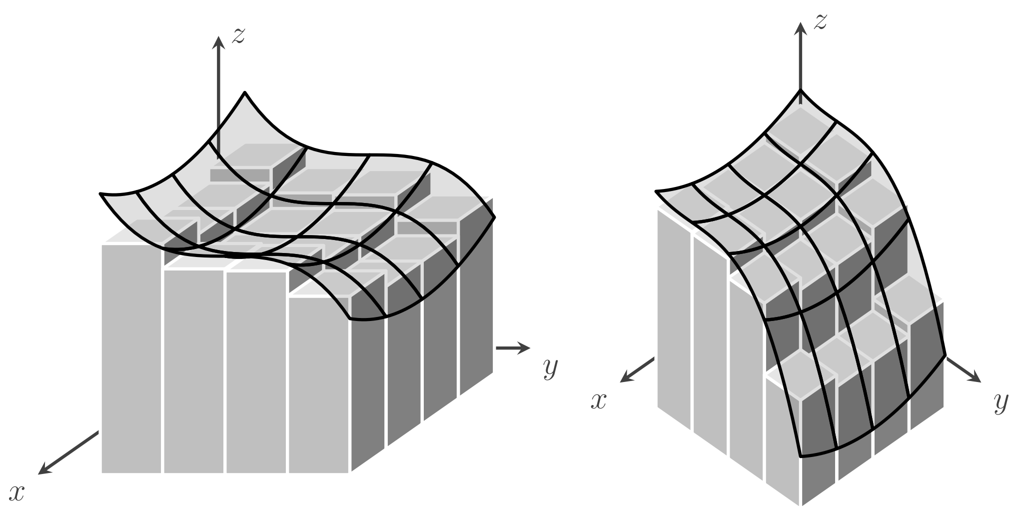
$$\iint_{\mathbb{R}} f\left(x,y\right) dxdy$$

يسمى التكامل الثنائي أو التكامل المضاعف للدالة $f(x,y)$ في $\mathbb{D}$.

وتكمن أهمية التكاملات الثنائية في إيجاد مساحة السطوح وإيجاد المراكز المتوسطة وعزم القصور الذاتي للسطوح المستوية وإيجاد الحجم الواقع تحت سطح التكامل الثنائي وفي الكهرومغناطيسية والحرارة والموجات الصوتية والميكانيك ومواضيع اخرى .

ومن اجل حل التكامل الثنائي المبين في الصيغة أعلاه، نبدأ أولا بالتكامل الداخلي والذي نكامله بالنسبة لـ x حيث نعتبر المتغير y ثابتا ثم نجد قيمة التكامل الخارجي والذي نكامله بالنسبة لـ y.

المعنى الهندسي للتكامل الثنائي



نتيجة 1 : 1) القيمة $\iint_D f(x,y)\ dx\ dy$ هي الحجم الجبري للجزء المحصور بين الرسم البياني لـ f والمستوى xOy.

2) بينما $dx\ dy$ $\iint_D |f(x,y)|$ هو حجم جزء الحيز الموجود بين الرسم البياني لـ f والمستوى xOy.

مثال 1 : حجم الكرة

$$B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1\right\}$$

هو ضعف حجم نصف الكرة

$$B^+ = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ y \geq 0\right\},$$

المحصورة بين منحنى الدالة $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ والمحور xOy . لدينا إذا

$$Volume(B) = 2\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy, \qquad \text{حيث} \qquad D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\right\}.$$

لحساب التكاملات الثنائية، نستخدم الخصائص التالية و طريقتين محددتين.

حساب التكامل الثنائي نظرية فيبيني

في الحالة الأولى: لتكن $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ **دالة مستمرة و معرفة على المستطيل** $D=[a,b]\times[c,d]$.

نظرية 1.4.1 : $\iint_D f(x,y)\ dx\ dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\ dy\right)\ dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\ dx\right)\ dy.$

نتيجة 2 :

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f_1(x)\,f_2(y)\ dx\ dy = \int_a^b f_1(x)\ dx\ \int_c^d f_2(y)\ dy.$$

ملاحظة 1 : يمكننا أيضا كتابة العبارة:

$$\int_a^b dx \int_c^d dy\ f(x,y) = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\ dy\right)\ dx.$$

مثال 2 : .

1) لنحسب التكامل الثنائي التالي

$$\begin{aligned}\iint_{[0,1]\times[0,\pi/2]} x\cos y\ dx\ dy &= \int_0^1 x\ dx\ \int_0^{\pi/2} \cos y\ dy\\ &= \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 [\sin y]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

2) لنحسب التكامل:

$$\begin{aligned}\iint_{[-1,1]\times[0,1]} (x^2y-1)\,dx\,dy &= \int_{-1}^{1} dx \int_{0}^{1} (x^2y-1)\ dy \\ &= \int_{-1}^{1} dx\ \left[\frac{1}{2}x^2y^2-y\right]_{y=0}^{y=1} \\ &= \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{2}x^2-1\right)\ dx \\ &= \left[\frac{1}{6}x^3-x\right]_{-1}^{1} = -\frac{5}{3}.\end{aligned}$$

الحالة الثانية: لتكن $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ **دالة مستمرة معرفة على المجموعة المحدودة** D **الكيفية، ومنه:**

1) **من أجل كل** $(x,y)\in D$ **توجد القيم** $a,b\in\mathbb{R}$ **حيث** $a\le x\le b$

2) **من أجل كل** $x\in[a,b]$ **توجد القيم** $c(x),d(x)\in\mathbb{R}$ **حيث** $c(x)\le y\le d(x)$

على النحو الذي يكون فيه

$$D=\left\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in[a,b],\ y\in[c(x),d(x)]\,\right\}.$$

نلاحظ أن المنحنيين

$$\partial D^-=\left\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in[a,b],\ y=c(x)\,\right\}$$

و

$$\partial D^+=\left\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in[a,b],\ y=d(x)\,\right\}$$

يشمل كل حافة D**. بالمقابل:**

1) **من أجل كل** $(x,y)\in D$ **توجد القيم** $c,d\in\mathbb{R}$ **حيث** $c\le y\le d$

2) **من أجل كل** $y\in[c,d]$**، توجد القيم** $a(y),b(y)\in\mathbb{R}$ **حيث** $a(y)\le x\le b(y)$

على النحو الذي يكون فيه

$$D=\left\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\in[c,d],\ x\in[a(y),b(y)]\,\right\}.$$

في هذه الحالة ، هذان هما المنحنيان

$$\partial D^- = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [c,d],\ x = a(y) \right\}$$

و

$$\partial D^+ = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [c,d],\ x = b(y) \right\}$$

اللذان يشملان كل حافة D.

بناءً على الخيار الذي سوف نعتمده لوصف D ، لدينا بعد ذلك النظرية التالية:

نظرية 2.4.1 :

$$\iint_D f(x,y)\ dx\ dy = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\ dy \right)\ dx = \int_c^d \left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\ dx \right)\ dy$$

.

مثال 3 : لنفرض أن D هو الجزء من المستوى xOy محددا بقوس القطع المكافئ $y = x^2$ في الأسفل ، والخط $y = 1$ في الأعلى. يمكننا بعد ذلك وصف D على أنه المجموعة

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1,1],\ y \in [x^2, 1] \right\}.$$

لذلك لدينا:

$$\begin{aligned}
\iint_D x^2 y\ dx\ dy &= \int_{-1}^{1} x^2 dx \int_{x^2}^{1} y\ dy \\
&= \int_{-1}^{1} x^2 \left[\frac{1}{2} y^2\right]_{x^2}^{1} dx \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(x^2 - x^4)\ dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\right]_{x=-1}^{x=1} = \frac{2}{15}.
\end{aligned}$$

حساب التكامل الثنائي ، تغير المتغير

ليكن التكامل الثنائي

$$\iint_D f(x,y)\ dx\ dy$$

وتغيير المتغير

$$(x,y)=h(u,v)=\big(x(u,v),y(u,v)\big)$$

. **من أجل أن نعبر عن التكامل بواسطة الدالة** $\tilde{f}(u,v)=f\big(x(u,v),y(u,v)\big)$ **يجب أن نعبر عن** D **و الجداء** $dx\ dy$ **بواسطة** (u,v)**: ومنه**

1) **نحول المنطقة** D **إلى المنطقة**

$$\tilde{D}=h^{-1}(D)=\big\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \mid (x,y)=h(u,v)\in D\big\}.$$

2) **العناصر** dx **و** dy **تتحول الى**

$$J_h(u,v)=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix} \quad \text{حيث} \quad \begin{pmatrix} dx\\ dy\end{pmatrix}=J_h(u,v)\begin{pmatrix} du\\ dv\end{pmatrix} \quad \text{أي} \quad \begin{cases} dx=\frac{\partial x}{\partial u}\ du+\frac{\partial x}{\partial v}\ dv\\ \\ dy=\frac{\partial y}{\partial u}\ du+\frac{\partial y}{\partial v}\ dv\end{cases}$$

هي المصفوفة اليعقوبية لتغيير الإحداثيات.

ويكفي تبني الصيغة التالية ، مع القيمة المطلقة للعامل اليعقوبي:

$$\boxed{dx\ dy=\left|\frac{\partial x}{\partial u}\ \frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\ \frac{\partial y}{\partial u}\right|\ du\ dv=\left|\det J_h(u,v)\right|\ du\ dv.}$$

على وجه الخصوص ، تغيير المتغير في حالة الإحداثيات القطبية لدينا:

$$\boxed{dx\ dy=\rho\ d\rho\ d\varphi}.$$

نصل أخيرًا إلى النظرية التالية:

نظرية 3.4.1 :

$$\iint_D f(x,y)\ dx\ dy=\iint_{h^{-1}(D)} f\left(x(u,v),y(u,v)\right)\ \left|\det J_h(u,v)\right|\ du\ dv.$$

مثال 4 : من أجل

$$B=\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2\le 1\big\}$$

نحسب

$$D=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 1\big\} \qquad \text{حيث} \qquad Volume(B)=2\iint_D\sqrt{1-x^2-y^2}\ dx\ dy,$$

مع تغيير المتغيرات في الإحداثيات القطبية،

$$(x, y) = h(\rho, \varphi) = (\rho \cos\varphi, \rho \sin\varphi).$$

لأن $x^2 + y^2 = \rho^2$ لدينا:

$$\sqrt{1 - x^2 - y^2} = \sqrt{1 - \rho^2} \quad \text{و}$$
$$h^{-1}(B) = \{(\rho, \varphi) \in [0, \infty[\times[0, 2\pi[\mid \rho \leq 1\} = [0, 1]\times[0, 2\pi[$$

ومنه، علما أن $dx\, dy = \rho\, d\rho\, d\varphi$ و نستعمل نظرية فيبيني لفصل المتغيرات، ينتج لدينا:

$$Volume(B) = 2 \iint_{[0,1]\times[0,2\pi[} \sqrt{1 - \rho^2}\ \rho\, d\rho\, d\varphi = 2 \int_0^1 \sqrt{1 - \rho^2}\ \rho\, d\rho\ \int_0^{2\pi} d\varphi.$$

التكامل في φ هو بسيط : $\int_0^{2\pi} d\varphi = [\varphi]_0^{2\pi} = 2\pi$. من أجل الجزء الآخر ، إذا وضعنا $t = 1 - \rho^2$ لدينا

$$\rho = 0 \implies t = 1 \quad \text{و} \quad \rho = 1 \implies t = 0,$$
$$\sqrt{1 - \rho^2} = \sqrt{t} = t^{1/2},$$
$$dt = -2\rho\, d\rho \implies \rho\, d\rho = -\frac{1}{2}\, dt,$$

وأخيراً نحصل على:

$$Volume(B) = -\frac{2}{2}\ 2\pi \int_1^0 t^{1/2}\ dt = 2\pi \int_0^1 t^{1/2}\ dt = 2\pi \left[\frac{1}{\frac{1}{2} + 1}\ t^{\frac{1}{2}+1}\right]_0^1 = 2\pi\ \frac{2}{3}\left[t^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{4\pi}{3}.$$

مثال 5 : أحسب قيمة التكامل الثنائي

$$\iint_{\mathbb{D}} \left(3y^2 - x\right) dxdy$$

إذا علمت أن

$$\mathbb{D} = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$$

ومنه

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathbb{D}} \left(3y^2 - x\right) dxdy &= \int_1^2 \left(\int_0^2 \left(3y^2 - x\right) dx\right) dy \\
&= \int_1^2 3xy^2 - \frac{1}{2}x^2\Big|_0^2 dy \\
&= \int_1^2 \left(6y^2 - 2\right) dy \\
&= 2y^3 - 2y\big|_1^2 \\
&= 12
\end{aligned}$$

مثال 6 : أحسب قيمة التكامل الثنائي

$$\int_1^2 \int_y^{y^2} dxdy.$$

ومنه

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \int_y^{y^2} dxdy &= \int_1^2 x\big|_y^{y^2} dy \\
&= \int_1^2 \left(y^2 - y\right) dy \\
&= \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{2}y^2\Big|_1^2 \\
&= \frac{5}{6}.
\end{aligned}$$

مثال 7 : أحسب قيمة التكامل الثنائي

$$\int_0^{\pi} \int_0^{x} x \sin y dy dx$$

ومنه

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi}\int_0^{x} x\sin y dy dx &= \int_0^{\pi}\left(\int_0^{x} x\sin y dy\right)dx \\
&= \int_0^{\pi} -x\cos y|_0^x \, dx \\
&= \int_0^{\pi} -x\left(\cos x - 1\right)dx \\
&= \left.\frac{1}{2}x^2 - x\sin x - \cos x\right|_0^{\pi} \\
&= \frac{\pi^2}{2}+2.
\end{aligned}$$

5.1 التكامل الثلاثي

لتكن $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ **دالة ذات ثلاث متغيرات** (x,y,z) **ولتكن** $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ **مجموعة محدودة المعرفة عليها الدالة** f.

تعريف 1.5.1 : نعرف التكامل الثلاثي للدالة f على Ω نهاية مجموع ريمان المرفق للتجزئة $\mathcal{S}_\delta$ لـ Ω على المكعبات الصغيرة K_i ذات الأبعاد δ^3 حيث δ ينتهي للصفر:

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\; dx\; dy\; dz = \lim_{\delta\to 0}\sum_{K_i\in\mathcal{S}_\delta} f(x_i,y_i,z_i)\,\delta^3,$$

أيا كان إختيار النقاط $(x_i,y_i,z_i)\in K_i$.

هذا التعريف هو نظير تعريف التكاملات الثنائية في البعد 3. وبالتالي ، فإن التكاملات الثلاثية لها نفس خصائص التكاملات المزدوجة تماماً، ونفس نظريات الوجود (f يستمر على Ω محدود).

لمعنى الهندسي للتكامل الثلاثي أكثر تجريدية: عن طريق القياس ، يصبح الحجم (الجبري) لجزء المسافة بين الرسم البياني لـ f والمستوى xOy الحجم الرباعي (الجبري) لجزء من المسافة الرباعية بين الرسم البياني لـ f والفضاء $Oxyz$.

حساب التكامل الثلاثي نظرية فيبيني

نظرية 1.5.1 : 1) إذا كان $\Omega = [a,b][c,d][e,g]$ متوازي السطوح ، فإن:

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^g dz\, f(x,y,z)$$

بالترتيب الذي نريده .

2) إذا كان

$$\Omega = \Big\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\big|\; x \in [a,b],\; y \in [c(x), d(x)],\; z \in [e(x,y), g(x,y)] \Big\}$$

هي أي مجموعة محدودة ، إذن:

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b dx \int_{c(x)}^{d(x)} dy \int_{e(x,y)}^{g(x,y)} dz\, f(x,y,z)$$

ترتيب قسري .

مثال 1 : 1) لنحسب التكامل

$$\begin{aligned}
\iiint_{[0,1]\times[1,2]\times[2,3]} (x^2-2yz)\;dx\;dy\;dz &= \int_2^3 dz\;\int_1^2 dy \int_0^1 dx\;(x^2-2yz) \\
&= \int_2^3 dz\;\int_1^2 dy\;\left[\frac{1}{3}x^3 - 2xyz\right]_{x=0}^{x=1} \\
&= \int_2^3 dz\;\int_1^2 dy \left(\frac{1}{3} - 2yz\right) \\
&= \int_2^3 \left[\frac{1}{3}y - y^2 z\right]_{y=1}^{y=2} dz = \int_2^3 \left(\frac{2}{3} - 4z - \frac{1}{3} + z\right)\; dz \\
&= \int_2^3 \left(\frac{1}{3} - 3z\right) dz = \left[\frac{1}{3}z - \frac{3}{2}z^2\right]_2^3 \\
&= \frac{3}{3} - \frac{27}{2} - \frac{2}{3} + \frac{12}{2} = \frac{1}{3} - \frac{15}{2} \\
&= -\frac{43}{6}.
\end{aligned}$$

2) إذا كان Ω هي الاسطوانة الكاملة ، قاعدتها القرص $D = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \le 1,\; z=0\big\}$ ذو الإرتفاع 3 نستطيع أن نكتب

$$\begin{aligned}
\Omega &= \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \mid x^2+y^2 \le 1,\; 0 \le z \le 3\big\} \\
&= \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \mid x \in [-1,1],\; y \in \Big[-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}\Big],\; z \in [0,3]\Big\}
\end{aligned}$$

ومنه

$$\begin{aligned}
\iiint_{\Omega}(1-2yz)\ dx\ dy\ dz &= \int_0^3 dz \iint_D (1-2yz)\ dx\ dy\\
&= \int_0^3 dz \int_{-1}^1 dx\ \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1-2yz)\ dy\\
&= \int_0^3 dz \int_{-1}^1 \left[y-y^2z\right]_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{1-x^2}}\ dx\\
&= \int_0^3 dz \int_{-1}^1 \left(\sqrt{1-x^2}-(1-x^2)z+\sqrt{1-x^2}+(1-x^2)z\right) dx\\
&= \int_0^3 dz \int_{-1}^1 2\sqrt{1-x^2}\ dx\\
&= 3\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\cos^2 t\ dt = 3\pi.
\end{aligned}$$

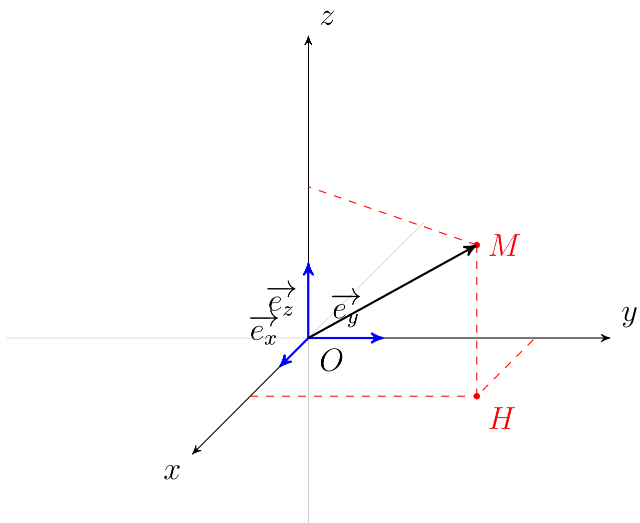
حساب التكامل الثلاثي تغير المتغير

نظرية 2.5.1 : **إذا كان** $(x,y,z)=h(u,v,w)$ **تغيير متغير فإن:**

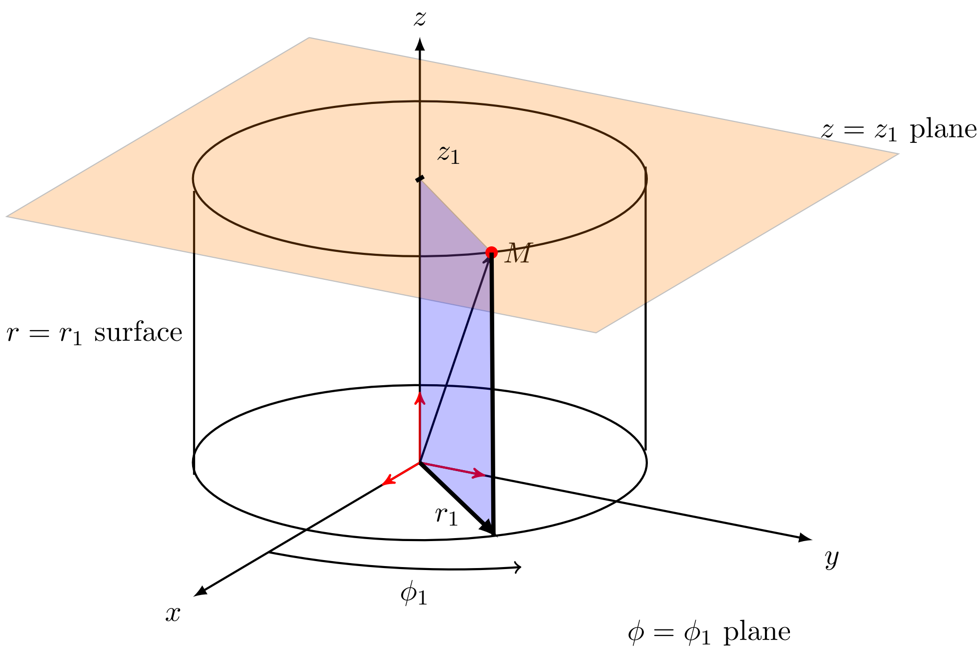
$$\begin{aligned}
&\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\ dx\ dy\ dz\\
=\ &\iiint_{h^{-1}(\Omega)} f\left(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)\right)\left|\det J_h(u,v,w)\right|\ dudvdw
\end{aligned}$$

على وجه الخصوص ، من أجل التغييرات للإحداثيات **الأسطوانية** أو **إحداثيات الكروية** لدينا :

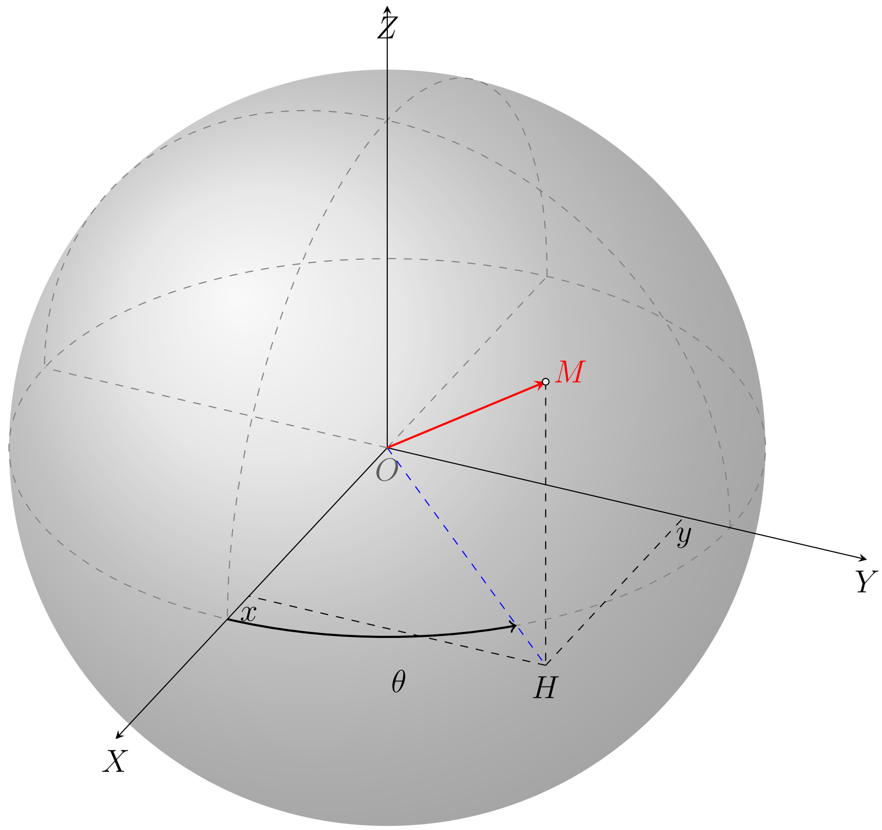
$$\boxed{dx\ dy\ dz=\rho\ d\rho\ d\varphi\ dz \quad = r^2\sin\theta\ dr\ d\varphi\ d\theta.}$$



z
M
y
O
H
x



z
$z = z_1$ plane
z_1
M
$r = r_1$ surface
r_1
y
x
ϕ_1
$\phi = \phi_1$ plane



مثال 2 : لنتذكر مرة أخرى تكامل الدالة $f(x,y,z) = 1 - 2yz$ على الاسطوانة الكاملة $Omega$ التي قاعدتها القرص $D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq 1,\ z=0\right\}$ ذو الإرتفاع 3. في الإحداثيات الأسطوانية ، لدينا:

$$\begin{aligned}\Omega &= \left\{\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 3\right\}\\ &= \left\{\ (\rho,\varphi,z) \mid \rho \in [0,1],\ \varphi \in [0,2\pi[,\ z \in [0,3]\ \right\}\end{aligned}$$

وبالتالي، لأن

$$dx\ dy\ dz = \rho\, d\rho\ d\varphi\ dz$$

ينتج لدينا:

$$\begin{aligned}
\iiint_{\Omega}(1-2yz)\ dx\ dy\ dz &= \int_0^3 dz \iint_D (1-2yz)\ dx\ dy\\
&= \int_0^3 dz \int_0^1 \rho\, d\rho\ \int_0^{2\pi}(1-2\rho\sin\varphi z)\ d\varphi\\
&= \int_0^3 dz \int_0^1 \rho\, d\rho\ \ [\varphi+2\rho\cos\varphi z]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\\
&= \int_0^3 dz \int_0^1 (2\pi+2\rho z-2\rho z)\ \ \rho\, d\rho\\
&= \int_0^3 dz \int_0^1 2\pi\ \rho\, d\rho = 3\ \pi\ \left[\rho^2\right]_0^1 = 3\pi.
\end{aligned}$$

سلسلة التمارين رقم 1

تمرين 1 : أحسب التكاملات التالية

$$1)\int \sqrt{3x}\log x dx \qquad 3)\int x^2e^x dx$$

$$2)\int_0^1 \left(7x^2-e^x\right)dx \qquad 4)\int x\sqrt{x^2+1}dx$$

تمرين 2 : أدرس قيم التكامل التالي

$$I_n=\int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{x+n}\ dx,$$

من أجل كل $n>0$.

1– أثبت أن $0\leq I_{n+1}\leq I_n$

2– أثبت أن $I_n\leq \ln\frac{n+1}{n}$ ثم استنتج أن $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

3– أحسب قيمة التكامل

$$\lim_{n\to+\infty} nI_n.$$

تمرين 3 : أحسب النهايات التالية

$$1)\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2} \qquad 3)\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$$

$$2)\lim_{\substack{x\to0\\y\to2}}\frac{\sin xy}{x^2+y^2} \qquad 4)\lim_{\substack{x\to\infty\\y\to k}}\left(1+\frac{y}{x}\right)^x k\in\mathbb{R}$$

تمرين 4 : أدرس استمرارية الدالة f عند النقطة $(x_0,y_0)=(0,0)$

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

ثم الدالة g عند النقطة $(x_0, y_0) = (0, 1)$ $(x_0, y_0) = (0, 0)$

$$g(x,y) = \begin{cases} x+y, & (x,y) \neq (0,1) \\ 0, & (x,y) = (0,1) \end{cases}$$

تمرين 5 : أدرس قيم التكامل التالي

$$I_n = \int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{x+n}\, dx,$$

من أجل كل $n > 0$.

1- أثبت أن $0 \leq I_{n+1} \leq I_n$

2- أثبت أن $I_n \leq \ln \frac{n+1}{n}$ ثم استنتج أن $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

3- أحسب قيمة التكامل

$$\lim_{n\to+\infty} nI_n.$$

الحـــل

1- إثبات أن $0 \leq I_{n+1} \leq I_n$: من أجل كل $0 \leq x \leq 1$، لدينا $0 < x+n \leq x+n+1$ و $\sin(\pi x) \geq 0$، ومنه ، نجد

$$0 \leq \frac{\sin(\pi x)}{x+n+1} \leq \frac{\sin(\pi x)}{x+n}$$

بتطبيق خاصية إيجابية التكامل.

2- من خلال $0 \leq \sin(\pi x) \leq 1$ لدينا

$$\frac{\sin(\pi x)}{x+n} \leq \frac{1}{x+n}$$

نجد

$$0 \leq I_n \leq \int_0^1 \frac{1}{x+n}\, dx = [\ln(x+n)]_0^1 = \ln\frac{n+1}{n} \to 0.$$

3- حساب قيمة التكامل

$$\lim_{n\to+\infty} nI_n.$$

لنجري تكامل بالتجزئة، حيث نضع $u(x)=\dfrac{1}{x+n}$ و $v'(x)=\sin(\pi x)$ ومنه $u'(x)=-\dfrac{1}{(x+n)^2}$ و $v(x)=-\dfrac{1}{\pi}\cos(\pi x)$ نجد

$$\begin{aligned} nI_n &= n\int_0^1 \frac{1}{x+n}\sin(\pi x)\,dx \\ &= -\frac{n}{\pi}\left[\frac{1}{x+n}\cos(\pi x)\right]_0^1-\frac{n}{\pi}\int_0^1\frac{1}{(x+n)^2}\cos(\pi x)\,dx \\ &= \frac{n}{\pi(n+1)}+\frac{1}{\pi}-\frac{n}{\pi}J_n \end{aligned}$$

يبقى لنا إيجاد قيمة

$$J_n=\int_0^1\frac{\cos(\pi x)}{(x+n)^2}dx.$$

$$\begin{aligned} \left|\frac{n}{\pi}J_n\right| \le \frac{n}{\pi}\int_0^1\frac{|\cos(\pi x)|}{(x+n)^2}\,dx \le \frac{n}{\pi}\int_0^1\frac{1}{(x+n)^2}\,dx \\ = \frac{n}{\pi}\left[-\frac{1}{x+n}\right]_0^1=\frac{n}{\pi}\left(-\frac{1}{1+n}+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{n+1}\to 0. \end{aligned}$$

ومنه:

$$\lim_{n\to+\infty} nI_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\pi(n+1)}+\frac{1}{\pi}-\frac{n}{\pi}J_n=\frac{2}{\pi}.$$

سلسلة التمارين رقم 2

تمرين 6 : أحسب التكاملات المضاعفة التالية:

$$
\begin{array}{lll}
1) & \iint_D \left(xy + y^2 + 1\right) dxdy & D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3\} \\
2) & \iint_D \left(xye^{x+y}\right) dxdy & D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq a, 1 \leq y \leq b\} \\
3) & \iint_D \left(xe^{xy}\right) dxdy & D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\} \\
4) & \iint\limits_{[0,1][0,1]} \dfrac{1}{x+y+1} dxdy &
\end{array}
$$

تمرين 7 : أحسب التكامل الثنائي التالي

$$\iint_D \left(xye^{x+y}\right) dxdy, \qquad D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

تمرين 8 : أحسب مساحة Δ المعرفة كمايلي:

$$\Delta = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x}{a^2} + \frac{x}{b^2} \leq 1\right\}, (a,b) \neq (0,0)$$

تمرين 9 : أحسب التكامل الثلاثي التالي:

$$\iiint\limits_D x^a y^b z^c dxdydz, \qquad (a,b,c) \ \in \ \left(\mathbb{R}_+^*\right)^3$$

$$D \ = \ \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq xy\right\}$$

تمرين 10 : أحسب التكامل الثلاثي التالي:

$$\iiint\limits_V x \ y \ z \ dx \ dy \ dz,$$

$$V \ = \ \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\right\} (a,b,c) \neq (0,0,0)$$