République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE
DÉPARTEMENT DE Biologie

Chapitre 01 :

Le 03/10/2021

Par
Prof : CHALA ADEL

Mathématiques-Statistique

2021-2022

Je dédie ce travail............
A mes parents ils m'ont tous,
avec leurs moyens, soutenu et donné
la force d'aller toujours
plus loin.
A ma chère femme Houda.
A l'esprit du professeur Bahlali Seid

Table des matières

Chapitre 1

Limites et continuité des fonctions réelles

1.1 Limite d'une fonction réelle

Définition 1 *On appelle une fonction réelle sur un ensemble E, tout application de E dans $\mathbb{R}$ et on écrit :*

$$f: \quad E \to \mathbb{R}, \\ x \longmapsto f(x).$$

Définition 2 *Domaine de définition d'une fonction f c'est l'ensemble où la fonction possède une image, et on le note par D_f.*

Proposition 3 *Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$, alors :*

1)f est dite pare si pour tout $x \in D_f$, on a $(-x) \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$.

2) f est dite impaire si pour tout $x \in D_f$ on a $(-x) \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$.

3) f est dite periodique de periode T si pour tout $x \in D_f$ on a $(x+T) \in D_f$ et $f(x+T) = f(x)$.

4) f est croissante si pour tout $x, y \in D_f$ avec $x < y$, alors $f(x) \leqslant f(y)$.

5) f est décroissante si pour tout $x, y \in D_f$ avec $x < y$, alors $f(x) \geqslant f(y)$.

6) f est constante si pour tout $x \in D_f$, alors $f(x) = a$.

7) f est nulle si pour tout $x \in D_f$, alors $f(x) = 0$.

8) f est majorée si existe $M \in \mathbb{R}$, et pour tout $x \in D_f$:alors $f(x) \leqslant M$.

9) f est minorée si existe $m \in \mathbb{R}$, et pour tout $x \in D_f$ alors $f(x) \geqslant m$.

10) f est bornée si existe $K \in \mathbb{R}^+$, et pour tout $x \in D_f$ alors $|f(x)| \leqslant K$.

1.1.1 Limite d'une fonction réelle

Notation 4 *On note par* $\lim\limits_{x\to x_0^+} f\left(x\right)$, *et* ($\lim\limits_{x\to x_0^-} f\left(x\right)$) *la limite à droite du point* x_0 *d'une fonction* f, *(la limite à gauche du point* x_0 *d'une fonction* f*) respectivement*

Proposition 5 *Soient* $f : D_f \to \mathbb{R}$, *et* $x_0 \in D_f$. *On dit que la fonction* f *admet une limite au point* x_0 *et on écrit* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ *si et seulement si* $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = l$.

Exemple 6 *:Soit* $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$, *donc* $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{(x-1)^2} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{(x-1)^2} = +\infty$, *alors on peut dire que* $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$.

Remarque 7 *Si* $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, *alors* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ *n'exist pas.*

Exemple 8 *Soit* $f(x) = \dfrac{1}{x}$, *donc* $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$, *alors* $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ *n'exist pas.*

1.1.2 Opérations sur les limites

Définition 9 *1) Soit* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ *et* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l$ *alors* $\lim\limits_{x\to x_0} (g\circ f)(x) = l$.*(* $\lim\limits_{x\to x_0} g\circ f = l$ *est vrai ssi* g *est continue).*

Définition 10 *Soient* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ *et* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l'$ *alors :*

1) $\lim\limits_{x\to x_0} \lambda f(x) = \lambda l \quad , \forall \lambda \in \mathbb{R}$.
2) $\lim\left[f(x) + g(x)\right] = l + l'$.
3) $\lim\limits_{x\to x_0} \left[f(x).g(x)\right] = \ l.l'$
4) $\lim\limits_{x\to x_0} \left[f(x)/g(x)\right] = l/l' \quad ,(l' \neq 0)$.
5) $\lim\limits_{x\to x_0} f^n(x) = l^{\ n}$ *, pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 11 *Soient* f *et* g *deux fonctions définits sur* $\mathbb{R}$ *ou bien une partie de* $\mathbb{R}$, *avec* $f \leqslant g$, *alors*

1) Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ *et* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l$. *Alors* $l \leqslant l'$.
2) Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$. *Alors* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$.
3) Si $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty$. *Alors* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$.
4) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ *, alors* f *est bornée au voisinage de* x_0.
5) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ *et* g *bornée (au voisinage de* x_0 *). Alors* $\lim\limits_{x\to x_0} \left[f(x).g(x)\right] = 0$.

Exemple 12 *:*

$$f(x) = \frac{(-1)^{x+1}}{\sqrt{x}}, \text{ alors}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(-1)^{x+1}}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \left[(-1)^{x+1} \frac{1}{\sqrt{x}}\right] = 0,$$

car : $g(x) = (-1)^{x+1}$ est borné et $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.

Proposition 13 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$, *alors* $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = |l|$.

Théorème 14 (d'encadrement) *Soient* f, g *et* h *trois fonctions définies au voisinage de* x_0 *telles que :* $f \leqslant h \leqslant g$, *si* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l$, *alors* $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = l$.

Théorème 15 *Soient* $f : I \to \mathbb{R}$ *et* $(x_n)_n$ *une suite quelconque telle que :* $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = x_0$, *si* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x_n) = l$ *si et seulement si* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$

1.1.3 Prolongement par continuité

Définition 16 *Si* f *n'est pas définie en point* x_0 *mais* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ *(existe et finie), alors on peut définir la fonction*

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & ,x \neq x_0, \\ l & ,x = x_0. \end{cases}$$

On l'appelle le prolongement par continuité de f *en* $x_0 \notin D_f$.

Exemple 17 *Soit* $f(x) = \dfrac{1}{\ln(x)+2}$, *avec* $D_f = \mathbb{R}_+$ *n'est pas définie en* $x_0 = 0$, *mais* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\ln(x)+2} = 0$ *(existe et finie), alors on peut prolongé* f *sur* $\mathbb{R}$, *telle que:*

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\ln(x)+2} & ,x > 0, \\ 0 & ,x = 0. \end{cases}$$

Alors $D_{\tilde{f}} = \mathbb{R}$.

1.1.4 Régle de l'Hôpital

Forme indéterminer :

$$\begin{array}{ll} (+\infty)-(+\infty) & (+\infty)+(-\infty), \\ 0.(+\infty) & 0.\ (-\infty), \\ \dfrac{\pm\infty}{\pm\infty} & \dfrac{0}{0}. \end{array}$$

Proposition 18 *Soient* $f : I \to \mathbb{R}$ *et* $g : I \to \mathbb{R}$ *deux fonctions dérivables et* $x_0 \in I \subset \bar{\mathbb{R}}$ [1], *on a*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \text{ alors } \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \quad , l \in \bar{\mathbb{R}}.$$

D'autre cas possibles Si : $\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ *ou* $\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$.

Exemple 19 *:1) Pour la fonction* $h(x) = \frac{\exp(x)}{x^2}$, *alors* $\lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(x)}{x^2} = \frac{+\infty}{+\infty}$, *on peut appliquer la formule d'Hôpital comme suite*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(x)}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(x)}{2x} = \frac{+\infty}{+\infty}.$$

Alors en appliquant pour la deuxième fois

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(x)}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(x)}{2} = +\infty.$$

2) Pour la fonction $h(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$, *alors*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \frac{0}{0}.$$

Alors

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x+1} = 1.$$

[1] $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\} = [-\infty, +\infty]$.

1.2 Fonctions continues

Définition 20 *Soit une fonction* $f : I \to \mathbb{R}$*, alors on dit que :*
f *est continue en* $x_0 \in I$ *si* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$*, c-à-d :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \lambda > 0, \forall x \in I : |x - x_0| < \lambda \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

f *est continue à droite en* $x_0 \in I$ *si* $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$*, c-à-d :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \lambda > 0, \forall x \in I : 0 \leqslant x - x_0 < \lambda \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

f *est continue à gauche en* $x_0 \in I$ *si* $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$*, c-à-d :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \lambda > 0, \forall x \in I : 0 \leqslant x_0 - x < \lambda \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Remarque 21 f *est continue en* x_0*si elle est continue à droite et continue à gauche en* x_0*, c-à-d :*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

Définition 22 f *est continue en toute point* $x_0 \in I$*, alors* f *est continue sur* I

Remarque 23 *Les fonctions elémentaires comme [les polynômes,* $sin\,(x)\,, ln\,(x)\,, exp\,(x)\,...$*] sont continues sur leurs domaines de définition.*

Théorème 24 f *est continue en* $x_0 \in I$ *si et seulement si*

$$\forall \{x_n\} \text{ de } I \text{ converge vers } x_0, \text{la suite } f(x_n) \text{ converge vers } f(x_0).$$

1.2.1 Opération sur les fonctions continues

Théorème 25 *Soient* f *et* g *deux fonctions continue sur* I *alors :* αf*,* $f \times g$*,* $f \pm g$*,* $|f|$ *et* $\left(\dfrac{f}{g}, g \neq 0\right)$ *sont des fonctions continue sur* I*.*

Théorème 26 *Soient* $f : I \to J$ *et* $g : J \to \mathbb{R}$*, alors* f *est continue sur* I *et* g *est continue sur* J *alors* $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ *est continue sur* I*.*

Chapitre 2

Fonctions dérivables

Définition 27 *Soit une fonction* $f : I \to \mathbb{R}$, *alors on dit que :*

1) f est dérivable en x_0 si :

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l \in \mathbb{R}.$$

2) f est dérivable à droite de x_0 si :

$$f'\left(x_0^+\right) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a \in \mathbb{R}.$$

3) f est dérivable à gauche de x_0 si :

$$f'\left(x_0^-\right) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = b \in \mathbb{R};$$

Théorème 28 *On dit que la fonction f est dérivable en x si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche de x_0, et $(a = b)$.*

Remarque 29 *f n'est pas dérivable en x_0 si l'une des conditions est vérifiée :*

1) $f'(x_0^+)$, et $f'(x_0^-)$ existent mais $f'(x_0^+) \neq f'(x_0^-)$.

2) $f'(x_0^+)$ ou $f'(x_0^-)$ n'existe pas.

3) $f'(x_0^+) = \pm\infty$ ou $f'(x_0^-) = \pm\infty$.

Exemple 30 *: Soit la fonction f definit par*

$$f(x) = \begin{cases} e^x, x \geq 0, \\ x \qquad , x < 0. \end{cases}$$

On remarque que e^x *est une fonction dérivable sur* $]0;+\infty[$, *et* x *est une fonction dérivable aussi sur* $]-\infty;0[$ *c-à-d* f *est dérivable sur* $\mathbb{R}-\{0\}$.

On étudier la derivabilité au point $x_0=0$.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{x}=\frac{0}{0}=1 \text{ (Hopital)}.$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{(x)-1}{x-1}=1.$$

Comme $f^{'}(0^-)=f^{'}(0^+)$, *alors* f *est dérivable en* 0, *ainsi* f *est dérivable sur* $\mathbb{R}$.

Exemple 31 *Soit la fonction* f *definit par*

$$f(x)=\begin{cases}\sin(x) & ,x>0\\ \cos(x) & ,x<0\end{cases}$$

On remarque que la fonction sinus est dérivable sur $]0;+\infty[$, *et cosinus est l'est aussi sur* $]-\infty;0[$ *c-à-d* f *est dérivable sur* $\mathbb{R}-\{0\}$.

On étudier la derivabilité au point $x_0=0$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(x)}{x}=1.$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\cos(x)-1}{x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0^-}(-\sin(x))=0.$$

Comme $f^{'}(0^-)\neq f^{'}(0^+)$, *alors* f *n'est pas dérivable en* 0. *Ainsi* f *est dérivable sur* $\mathbb{R}-\{0\}$.

Définition 32 *:Soit une fonction* $f:I\to\mathbb{R}$, f *est dérivable en tout point* x_0*de* I, *alors* f *est dérivable sur* I.

Proposition 33 *Si* f *est une fonction dérivable en* $x_0\in I$, *alors* f *est continue en ce pointe.*

Exemple 34 *:On considère la fonction suivante :*

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1} & ,x\neq 1,\\ 0 & ,x=1.\end{cases}$$

Alors

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}=\infty\neq 0=f(1).$$

Donc la fonction ainsi définie f *n'est pas continue en* $x=1$, *alors* f *n'est pas dérivable en* $x=1$

2.1 Opérations sur les fonctions dérivable.

Proposition 35 *Soient f et g deux fonctions dérivables en x_0, alors les fonctions suivantes sont dérivables en x_0 : avec*

1) $(\alpha f)^{'} = \alpha f^{'}$.

2) $(f.g)^{'} = f^{'}.g + f.g^{'}$.

3) $\left(\dfrac{f}{g}\right)^{'} = \dfrac{f^{'}.g - f.g^{'}}{g^2}$.

Proposition 36 *Soient $f : I \to I^{'}$ et $g : I^{'} \to \mathbb{R}$, f est dérivable en x_0, g est dérivable en $y_0 = f(x_0)$. Alors $(g \circ f)$ est dérivable en x_0, avec*

$$(gof)'(x_0) = f'(x_0)\, g'(f(x_0)).$$

Proposition 37 *Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, on suppose : f est strictement monotone, f est continue, et f est dérivable en x_0. Alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ avec*

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{(f)'(x_0)}.$$

2.1.1 Dérivée des fonctions usuelles.

– La dérivé d'une fonction puissance ;

$$(x^n)^{'} = nx^{n-1}.$$

– La dérivée d'une fonction inverse

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{'} = -\frac{1}{x^2}.$$

– La dérivée d'une fonction Logarithmique

$$(\ln x)^{'} = \frac{1}{x}, x > 0.$$

– La dérivée d'une fonction racine

$$\left(\sqrt{x}\right)^{'} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, x > 0.$$

– La dérivée d'une fonction exponentielle

$$[\exp(x)]^{'} = \exp(x).$$

– La dérivée d'une fonction cosinus

$$[\cos(x)]' = -\sin(x).$$

– La dérivée d'une fonction sinus

$$[\sin(x)]' = \cos(x).$$

– La dérivée d'une fonction tangente

$$[\tan(x)]' = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x).$$

2.2 Théorème de Rolle et des accroissements finis

Théorème 38 (de Rolle) *Soit une fonction* $f : [a; b] \to \mathbb{R}$*, on suppose que* f *est continue sur* $[a; b]$ *,* f *est dérivable sur* $]a; b[$ *, avec* $\underline{f(a) = f(b)}$*. Alors il exist* $c \in]a; b[$ *, telle que* $f(c) = 0$*.*

Exemple 39 *:On considère la fonction suivante* $f(x) = x^2 + 3x$*, il est clair que sa domaine de définition c'est* $D_f = \mathbb{R}$*.*

1) On suppose que $[a; b] = [-2; -1]$ *, on peut appliquer le théorème de Rolle car :* f *est continue sur* $[a; b] = [-2; -1]$ *,* f *est dérivable sur* $]a; b[=]-2; -1[$ *, avec* $f(-2) = f(1) = -2$*, alors il exist* $c \in]-2; -1[$ *, telle que* $f(c) = 0$*.*

2) Mais par contre si on suppose $[a; b] = [-2; 2]$ *,on ne peut pas appliquer le théorème de Rolle car :*$f(-2) = -2 \neq f(2) = 10$*.*

Théorème 40 (des accroissements finis) *:Soit une fonction* $f : [a; b] \to \mathbb{R}$*, On suppose que* f *est continue sur* $[a; b]$ *,* f *est dérivable sur* $]a; b[$ *. Alors il existe* $c \in]a; b[$ *tellque*

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(c).$$

Exemple 41 *On suppose que* $f(x) = \exp(x) + x$ *et de plus ,*$D_f = \mathbb{R}$*. avec* $[a; b] = [0; 1]$ *,on peut appliquer le théorem des accroissements finis. En effet* f *est continue sur* $[a; b] = [0; 1]$ *,* f *est dérivable sur* $]a; b[=]0; 1[$ *. Alors il existe* $c \in]0; 1[$ *tellque*

$$f(1) - f(0) = (1 - 0) f'(c).$$

Alors

$$f'(c) = \exp(1).$$

Exemple 42 *On considère la fonction suivante* $f(x) = \ln(x)$, $D_f = \mathbb{R}_+^*$, *soit* $[a; b] = [-1; 1]$ *,on ne peut pas appliquer le théorem des accroissements finis car* f *n'est pas continue sur* $[-1; 1]$.