الفصل الأول

المجموعات و العلاقات

1) المجموعات

تعريف المجموعة:- هي تجمع للأشياء تشترك في صفة أو خاصية على الأقل ونرمز لها بالحروف الكبيرة $(A, B, C, \dots)$ والأشياء التي تدخل في تكوين المجموعة تسمى العناصر نرمز لعناصر المجموعة بالحروف الصغيرة $(a, b, c, \dots)$ فاذا كان a عنصر في المجموعة A نرمز له بالرمز $a \in A$ واذا كان a ليس عنصرا في المجموعة A نرمز له بالرمز $a \notin A$.

تعريف المجموعة الجزئية:- لتكن A مجموعة يقال ان B مجموعة جزئية) من المجموعة A اذا كان كل عنصر في B موجود في A ويرمز لها بالرمز $A \subseteq B$ اي بعبارة اخرى $A \subseteq B$ اذا كان كل $x \in B$ فان $x \in A$. وتسمى B مجموعة جزئية فعلية من A إذا وجد $x \in A$ بحيث ان $x \notin B$ ويرمز لها بالرمز $B \subset A$ اما اذا كانت B ليس مجموعة جزئية من A فتكتب بالشكل $B \not\subseteq A$

مثال اذا كانت $\mathrm{A} = \{0,1,2,3\}$ وكانت B هي مجموعة الاعداد الطبيعية المحصوره بين 0,4 . هل ان B مجموعة جزئيه من A ؟ وهل ان B مجموعة جزئية فعلية من A ؟

الحل / $\mathrm{A} = \{0,1,2,3\} B = \{1,2,3\}$,

$1,2,3 \in B$ ∵ و $1,2,3 \in A$ اذن B مجموعة جزئيه من $\mathrm{A}(B \subseteq A)$

∵ $0 \in \mathrm{A}$ و $0 \notin B$ فان B مجموعة جزئية فعلية من $\mathrm{A}(B \subset A)$.

تعريف لتكن A و B مجموعتين فان

1- اتحاد ألمجموعه A مع المجموعة B والذي يرمز له بالرمز $A \cup B$ ويعرف بالشكل التالي:- $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$

2- تقاطع ألمجموعه A مع المجموعة B والذي يرمز له بالرمز $A \cap B$ ويعرف بالشكل التالي:- $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$

مثال لتكن A تمثل مجموعة الاعداد الطبيعية الاكبر من 3 ولتكن B تمثل مجموعة الاعداد الاولية الاصغر من 9 جد $A \cap B$, $A \cup B$

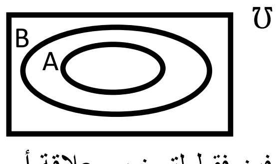
الحل/ $B = \{2,3,7\}, A = \{4,5,6, \dots\}$

$$A \cup B = \{2,3,4,5,6,7, \dots\}, \qquad A \cap B = \{5,7\}$$

مثال لتكن A تمثل مجموعة الاعداد الصحيحة الاكبر من -2 ولتكن B تمثل مجموعة الاعداد الاولية المحصوره بين -10 1

تعريف :- تسمى المجموعة التي لا تحتوي على عناصر بالمجموعة الخالية ونرمز لها يابرمز $\emptyset$

تمثيل المجموعات (مخططات فين) :- تعتبر مخططات فين من الطرق البسيطة لتوضيح العلاقة بين المجموعات حيث تتألف هذه المخططات من مستطيل ومنحنيات مغلقه داخل المستطيل حيث يكون كل منحني مغلق غير متقاطع مع نفسه فالمستطيل يمثل المجمعة الشاملة والمنحنيات تمثل المجموعات التي هي قيد البحث كما أن عناصر المجموعة الشاملة تمثل بنقاط داخل المستطيل وان عناصر المجموعات تمثل بنقاط داخل المنحنيات المغلقة فمثلا إذا كان B, A مجموعات جزئية من $\mho$ بحيث $A \subset B$ فان مخطط فين لتوضيح العلاقة بين B, A يكون بالشكل



ملاحظه :- تستخدم مخططات فين فقط لتوضيح علاقة أو خاصية في نظرية المجموعات ولا تعتبر برهان لتلك العلاقة أو الخاصية .

تعريف :لتكن B, A مجموعتين يقال ان B وA منفصلتين إذا كان $A \cap B = \emptyset$ ويقال ان $A = B$ إذا وفقط إذا كان $A \subseteq B$ و$B \subseteq A$.

تعريف : متممة المجموعة A ونرمز له بالرمز A^c يعرف بالشكل $A^c = \{x : x \in \mho \wedge x \notin A\}$

مبرهنه :- لتكن A و B مجموعتان فان

1- $A \subseteq A \cup B$ و $B \subseteq A \cup B$

2- $A \cap B \subseteq A$ و $A \cap B \subseteq B$

3- $A \subseteq B \leftrightarrow A \cup B = B$

4- $B \subseteq A \leftrightarrow A \cap B = A$

5- اذا كان $A \subseteq B$ فان $B^c \subseteq A^c$

البرهان :- 1- للبرهان ان $A \subseteq A \cup B$

ليكن $x \in A$ للبرهنه على ان $x \in A \cup B$

$\therefore$ العبارة صادقه $x \in A \vee x \in \;\; \Longrightarrow x \in A \;\because$

$$\therefore x \in A \cup B \Rightarrow A \subseteq A \cup B$$

وبنفس الطريقة نبرهن $B \subseteq A \cup B$

2- للبرهنه على ان $A \cap B \subseteq A$

ليكن $x \in A \cap B \rightarrow x \in A \wedge x \in B$

$$\rightarrow x \in A$$

$\therefore A \cap B \subseteq A$

وبنفس الطريقة نبرهن ان $A \cap B \subseteq B$

مثال :- أعطي مثالا لكل مما يأتي :-

1-$(A \cup B) - C \neq (A \cup C) - (A \cup B)$
2- $A \cap C = B \cap C \,, A \neq B$

الحل/

1- $A = \{1,2\} \,, B = \{4\} \,, C = \{2,3\}$

$$A \cup B = \{1,2,4\} \,, A \cup C = \{1,2,3\}$$

$$(A \cup B) - C = \{1,4\}$$

$$(A \cup C) - (A \cup B) = \{3\}$$

$$\therefore \{3\} \neq \{1,4\}$$

$$\therefore (A \cup B) - C \neq (A \cup C) - (A \cup B)$$

2- $A = \{1,2,3\}, B = \{1,4,6,3\}, C = \{1,3\}$

$$A \cap C = \{1,3\}, A \cap C = \{1,3\}$$

نلاحظ ان $A \cap C = B \cap C$

بحيث ان $A \neq B$

تعريف مجموعة الاجزاء :- لتكن A مجموعة فان مجموعة كل المجموعات الجزئية من A تسمى ب مجموعة الاجزاء ونرمز لها بالرمز $P(A)$ اي انه $P(A) = \{B: B \subseteq A\}$

مثال :- لتكن $A = \{2,3,4\}, B = \{5,6\}, C = \{1,2,3,4\}$ جد $P(A), P(B), P(C)$

الحل /

$P(A) = \{B: B \subseteq A\} = \{\emptyset, A, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}\}$

$P(B) = \{D: D \subseteq B\} = \{\emptyset, B, \{5\}, \{6\}\}$

$P(C) = \{K: K \subseteq C\}$
$= \{\emptyset, C, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{1,2,3\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,4\}\}$

ملاحظة :- 1- اذا كان n يمثل عدد عناصر المجموعة A و m تمثل عدد عناصر المجموعة $P(A)$ فان $m = 2^n$

مبرهنة :- اذا كانت A و B مجموعتين فان

1- $P(A) \subseteq P(B) \leftrightarrow A \subset B$

2- $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$