الفهرس

الفصل الثاني

الدوال الحقيقية ذات المتغير الحقيقي

1.2 الدالة العددية

تعريف 1.1.2 : لتكن E و F مجموعتان و f علاقة من المجموعة E نحو المجموعة F . نقول عن f أنها دالة إذا أرفقت بكل عنصر من E عنصرا على الأكثر من F ونكتب:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} f: \ E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) = y. \end{array}}$$

تطبيق

تعريف 2.1.2 : نقول أن f دالة عددية إذا وفقط إذا كان :

$$f: \begin{array}{c} E \subset \mathbb{R} \to F \subset \mathbb{R} \\ x \to f(x) \end{array}$$

تطبيق

بمعنى أن f دالة عددية إذا وفقط إذا كان لكل عنصر x من E صورة على الأكثر في $F \in \mathbb{R}$.

مثال 1 : الدالة مقلوب x :

$$\begin{array}{rcl} f:]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x}. \end{array}$$

1.1.2. مجموعة التعريف

تعريف 3.1.2 : نعرف مجموعة تعريف دالة عددية f كما يلي :

$$\boxed{D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R}\}}$$

مجموعة التعريف تمثل مجموعة انطلاق الدالة حتى يكون $f(x) \in \mathbb{R}$.

$$f : \begin{array}{ccc} D_f \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

مثال 2 : لتكن الدالة f المعرفة كما يلي

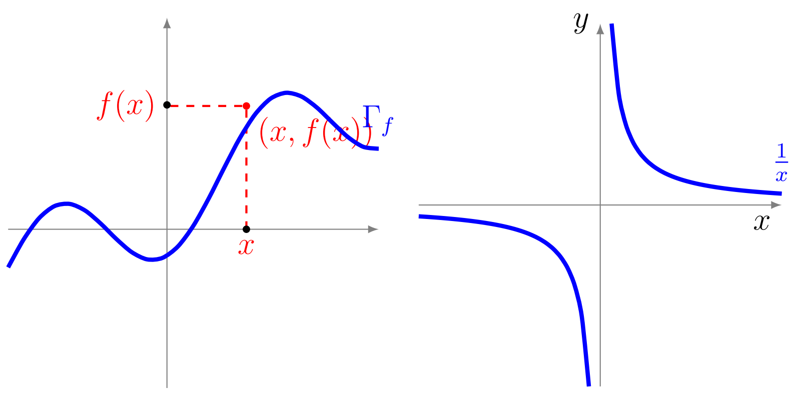
$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{1}{(x^2-1)}. \end{array}$$

f معرفة $\Longleftrightarrow x^2 - 1 \neq 0$

$$\begin{aligned} x^2 - 1 &= 0 \Longleftrightarrow (x-1)(x+1) = 0 \\ &\Longleftrightarrow x = 1 \wedge x = -1 \\ &\Longleftrightarrow D_f = \mathbb{R}_{-\{1,-1\}} \\ &\Longleftrightarrow D_f =]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[\end{aligned}$$

تعريف 4.1.2 : منحنى الدلة $f : U \to \mathbb{R}$ هو المجموعة الجزئية Γ_f من $\mathbb{R}^2$ المعرفة كما يلي

$$\boxed{\Gamma_f = \big\{(x, f(x)) \mid x \in U\big\}.}$$



يمينا منحنى الدالة $1/x$ ويسارا منحنى الدالة $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x + \sin\left(\frac{3(x-1)}{2}\right)$.

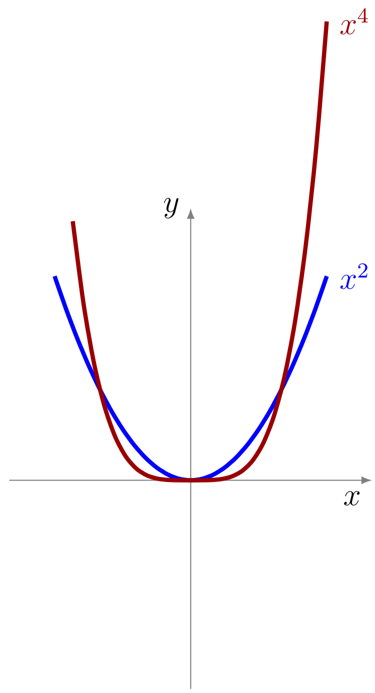
2.2 الدوال الزوجية، الفردية و الدورية

1.2.2. الدالة الزوجية

تعريف 1.2.2 : نقول أن f دالة زوجية إذا كان :

$$\boxed{\forall x \in D_f : f(x) = f(-x).}$$

مثال 1 : الدوال المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ كما يلي $x \mapsto x^n$ حيث $(n \in \mathbb{N})$ زوجي



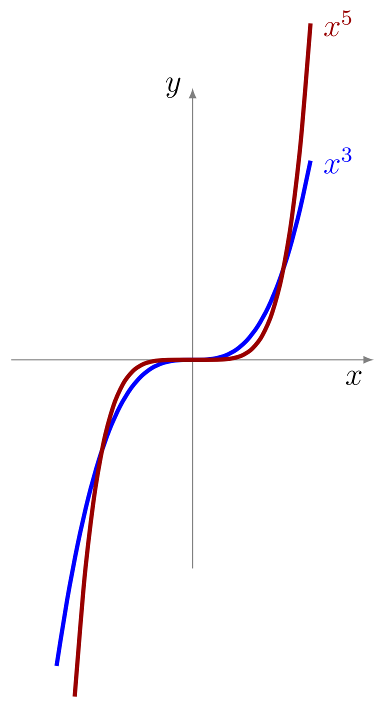
ذا كانت الدالة f فردية فإن النقطة $M(x_0, f(x_0))$ و $M'(-x_0, f(-x_0))$ متناظرتان بالنسبة للمبدأ.

2.2.2. الدالة الفردية

تعريف 2.2.2 : نقول أن f دالة فردية إذا كان :

$$\boxed{\forall x \in D_f : f(x) = -f(-x).}$$

مثال 2 : الدوال المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ كما يلي $x \mapsto x^n$ حيث $(n \in \mathbb{N})$ فردي

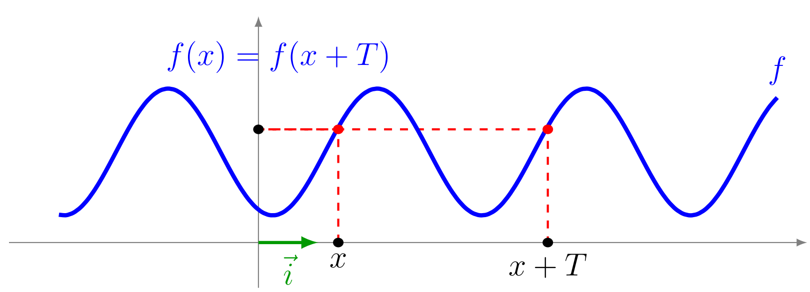


إذا كانت الدالة f زوجية فإن النقطة $M\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ و $M'\left(-x_0, f\left(-x_0\right)\right)$ متناظرتان بالنسبة لمحور التراتيب.

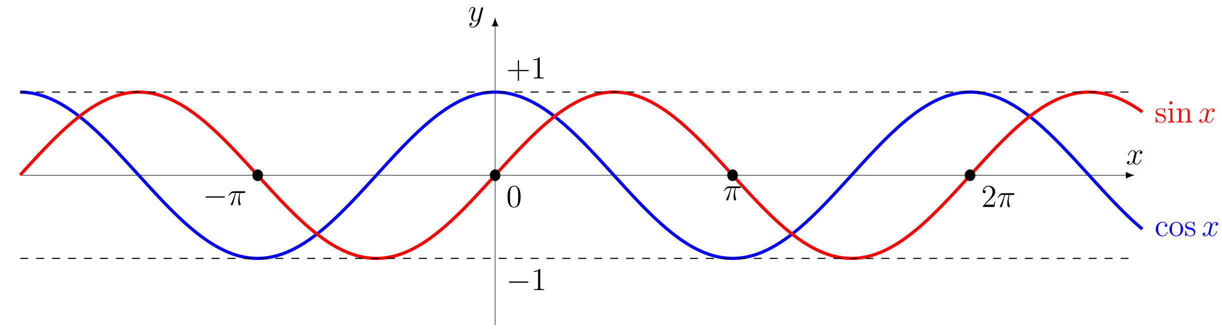
3.2.2. الدالة الدورية

تعريف 3.2.2 : نقول أن f دالة دورية إذا وجد $k > 0$ حيث :

$$\boxed{\forall x \in D_f : f\left(x+k\right) = f\left(x\right).}$$



مثال 3 : الدوال *sinus* و *cosinus* دوال دورية دورها 2π والدالة *tangente* دالة دورية دورها π.



4.2.2. الدوال الموجبة و الدوال السالبة

لتكن f دالة عددية معرفة على مجموعة تعريفها D_f. وليكن Δ مجالا من D_f.

تعريف 4.2.2 : تكون الدالة f موجبة (تماما) على Δ إذا كان

$$\boxed{\forall x \in \Delta : f(x) \geq 0 \quad (f(x) > 0).}$$

و تكون الدالة f سالبة (تماما) على Δ إذا كان

$$\boxed{\forall x \in \Delta : f(x) \leq 0 \quad (f(x) < 0).}$$

ملاحظة 1 : إذا كانت الدالة f موجبة فإن منحناها يكون فوق محور الفواصل والعكس بالنسبة لمنحنى الدالة السالبة
إذا كانت الدالة f موجبة تماما أو سالبة تماما فإن منحناها لا يتقاطع ابدا مع محور الفواصل.

5.2.2. العمليات الجبرية على الدوال

لتكن $f : U \to \mathbb{R}$ و $g : U \to \mathbb{R}$ دالتين معرفتين على نفس الجزء U من المجموعة $\mathbb{R}$. ومنه نستطيع تعريف الدوال التالية:

1) مجموع الدالتين f و g هو الدالة $f + g : U \to \mathbb{R}$ المعرفة كما يلي

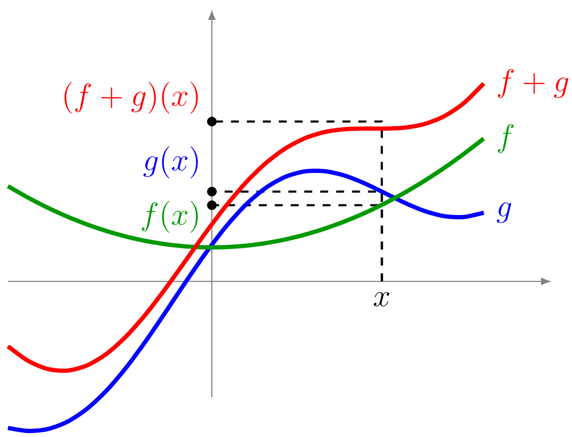
$$\forall x \in U, (f+g)(x) = f(x) + g(x).$$

2) جداء الدالتين f و g هو الدالة $f \cdot g : U \to \mathbb{R}$ المعرفة كما يلي

$$\forall x \in U, (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$

3) الجداء بسلمي $\lambda \in \mathbb{R}$ والدالة f هو الدالة $\lambda \cdot f : U \to \mathbb{R}$ المعرفة كما يلي

$$\forall x \in U, (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x).$$



6.2.2. مقارنة دالتين

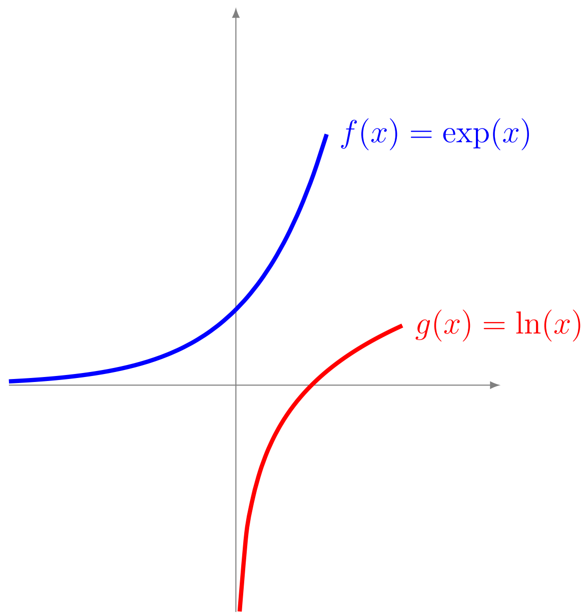
لتكن f و g دالتين معرفتين على نفس الجزء $\Delta \subset D_f \cap D_g$. ومنه :
نقول أن f أصغر من أو يساوي g ونكتب

$$\boxed{f \leq g \text{ إذا كان } \forall x \in \Delta, f(x) \leq g(x).}$$

و نقول أن f أكبر من أو يساوي g ونكتب

$$\boxed{f \geq g \text{ إذا كان } \forall x \in \Delta, f(x) \geq g(x).}$$

ملاحظة 2 : إذا كانت الدالة f أكبر من أو يساوي g فإن منحنى الدالة f يكون فوق منحنى الدالة g .



7.2.2. رتابة دالة

لتكن f دالة معرفة على مجموعة تعريفها D_f. وليكن I مجالا من D_f.

تعريف 5.2.2 : نقول أن f متزايدة على I إذا وفقط إذا كان :

$$\boxed{\forall (x,y) \in I^2 : x > y \implies f(x) \geq f(y).}$$

تعريف 6.2.2 : نقول أن f متزايدة تماما على I إذا وفقط إذا كان :

$$\boxed{\forall (x,y) \in I^2 : x > y \implies f(x) > f(y).}$$

تعريف 7.2.2 : نقول أن f متناقصة على I إذا وفقط إذا كان :

$$\boxed{\forall (x,y) \in I^2 : x > y \implies f(x) \leq f(y).}$$

تعريف 8.2.2 : نقول أن f متناقصة تماما على I إذا وفقط إذا كان :

$$\boxed{\forall (x,y) \in I^2 : x > y \implies f(x) < f(y).}$$

8.2.2. الدالة المحدودة

تعريف 9.2.2 : لتكن f دالة عددية مجموعة تعريفها D_f.

1) نقول أن f محدودة من الأعلى إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي M بحيث :

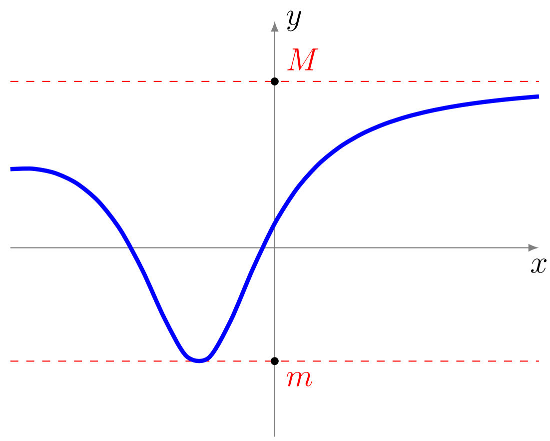
$$\boxed{\forall x \in D_f \quad f(x) \leq M.}$$

2) نقول أن f محدودة من الأسفل إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي m بحيث :

$$\boxed{\forall x \in D_f \quad m \leq f(x).}$$

3) نقول أن f محدودة إذا وفقط إذا وجد عددان حقيقيان m و M بحيث :

$$\boxed{\forall x \in D_f \quad m \leq f(x) \leq M.}$$



9.2.2. القيم القصوى والدنيا لدالة

لتكن f دالة عددية مجموعة تعريفها D_f و ليكن $x_0 \in D_f$ و I مجال من D_f.

تعريف 10.2.2 : .

1) نقول أن العدد $f(x_0)$ أنه القيمة القصوى المطلقة للدالة f عند النقطة x_0 إذا كان

$$\boxed{\forall x \in D_f : \quad f(x) \leq f(x_0).}$$

2) نقول أن العدد $f(x_0)$ أنه قيمة قصوى نسبية للدالة f عند النقطة x_0 في المجال I إذا كان $x_0 \in I$ و

$$\boxed{\forall x \in I \quad f(x) \leq f(x_0).}$$

3) نقول أن العدد $f(x_0)$ أنه القيمة الدنيا المطلقة للدالة f عند النقطة x_0 إذا كان

$$\boxed{\forall x \in D_f \quad f(x) \geq f(x_0).}$$

4) نقول أن العدد $f(x_0)$ أنه قيمة دنيا نسبية للدالة f عند النقطة x_0 في المجال I إذا كان $x_0 \in I$ و

$$\boxed{\forall x \in I \quad f(x) \geq f(x_0).}$$

3.2 النهايـــات

1.3.2. تعاريــف

النهاية عند نقطة

تعريف 1.3.2 : نقول أن المجموعة الجزئية V من $\mathbb{R}$ أنه جوار النقطة x_0 إذا كانت تحتوي على مجال مفتوح يحوي النقطة x_0

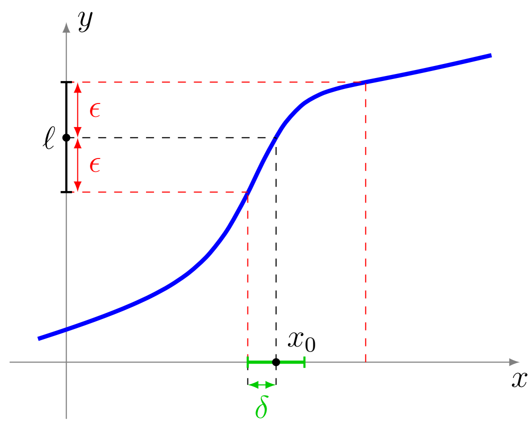
لتكن $f : I \to \mathbb{R}$ دالة معرفة على المجال I من $\mathbb{R}$. ولتكن $x_0 \in \mathbb{R}$ نقطة من المجال I.

تعريف 2.3.2 : نقول أن الدالة f المعرفة في جوار النقطة x_0 (ربما تكون غير معرفة عند النقطة x_0) أنها تقبل نهاية $\ell \in \mathbb{R}$ عند النقطة x_0 اذا كان:

$$\boxed{\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \epsilon.}$$

ونقول أن الدالة $f(x)$ تؤول إلى ℓ لما x يؤول الى x_0 و نكتب :

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \text{ أو } \lim_{x_0} f = \ell.}$$



مثال 1 : لتكن $f(x) = 3x - 2$ المطلوب إيجاد النهاية عند النقطة $x_0 = 1$.
لدينا

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}(3x-2) = 1$$

وباستعمال التعريف نجد

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \epsilon$$

$$\begin{aligned} |x-1| < \delta \quad &\implies \quad |3x-2-1| < \epsilon \\ &\implies \quad |3x-3| < \epsilon \\ &\implies \quad |3(x-1)| < \epsilon \\ &\implies \quad 3|(x-1)| < \epsilon \\ &\implies \quad |(x-1)| < \frac{\epsilon}{3} \end{aligned}$$

يعني يكفي أن نأخذ القيمة $\delta = \frac{\epsilon}{3}$ لكي نجد أن

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 1.$$

لتكن f دالة معرفة على المجموعة من الشكل $]a, x_0[\cup]x_0, b[$.

تعريف 3.3.2 : .

1) نقول أن الدالة f تقبل نهاية $+\infty$ عند النقطة x_0 إذا كان

$$\boxed{\forall A > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \implies f(x) > A.}$$

ونكتب

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty.}$$

2) نقول أن الدالة f تقبل نهاية $-\infty$ عند النقطة x_0 إذا كان

$$\boxed{\forall A > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \implies f(x) < -A.}$$

ونكتب

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty.}$$

لتكن الدالة $f : I \to \mathbb{R}$ المعرفة على مجموعة من الشكل $I =]a, +\infty[$.

تعريف 4.3.2 : .

1) ليكن $\ell \in \mathbb{R}$ نقول أن الدالة f تقبل النهاية ℓ عند $+\infty$ إذا كان

$$\boxed{\forall \epsilon > 0 \quad \exists B > 0 \quad \forall x \in I \quad x > B \implies |f(x) - \ell| < \epsilon.}$$

ونكتب

$$\boxed{\lim_{x\to +\infty} f(x) = \ell \ \text{ أو } \ \lim_{+\infty} f = \ell.}$$

2) ونقول أن الدالة f تقبل النهاية $+\infty$ عند $+\infty$ إذا كان

$$\boxed{\forall A > 0 \quad \exists B > 0 \quad \forall x \in I \quad x > B \implies f(x) > A.}$$

ونكتب

$$\boxed{\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty.}$$

بنفس الطريقة نعرف النهاية عند $-\infty$ إذ كانت الدالة معرفة على مجموعة من الشكل $]-\infty, a[$.

2.3.2. العمليات على النهايات

لتكن الدالتين f و g. لتكن النقطة x_0 حيث $x_0 = \pm\infty$.

اقتراح 1 : إذا كان

$$\lim_{x_0} f = \ell \in \mathbb{R} \text{ و } \lim_{x_0} g = \ell' \in \mathbb{R}$$

فإن :

- من أجل كل $\lambda \in \mathbb{R}$ فإن $\lim_{x_0}(\lambda \cdot f) = \lambda \cdot \ell$
- $\lim_{x_0}(f+g) = \ell + \ell'$
- $\lim_{x_0}(fg) = \ell\ell'$
- إذا كان $\ell \neq 0$، ومنه $\lim_{x_0} \frac{1}{f} = \frac{1}{\ell}$

إذا كان أيضا $\lim_{x_0} f = +\infty$ (أو $-\infty$) فإن $\lim_{x_0} \frac{1}{f} = 0$.

4.2 الإستمرار

1.4.2. الإستمرار عند نقطة

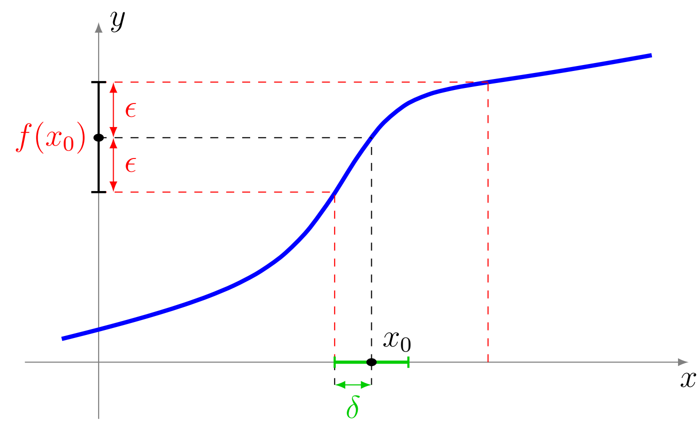
تعريف 1.4.2 : . لتكن $f : I \to \mathbb{R}$ دالة معرفة على المجال I من $\mathbb{R}$. ولتكن $x_0 \in \mathbb{R}$ نقطة من المجال I.

نقول أن الدالة f مستمرة عند النقطة x_0 إذا تحقق مايلي :

$$\boxed{\forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in I, \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.}$$

ونكتب

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).}$$



مثال 1 : الدالة $f(x) = e^x$ مستمرة عند النقطة $x_0 = 0$ لأن

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to 0} e^x = e^0 = 1 = f(x_0).$$

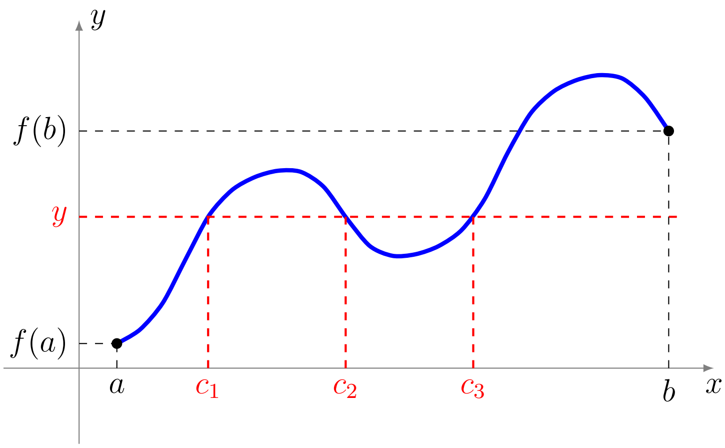
2.4.2. الإستمرار على مجال

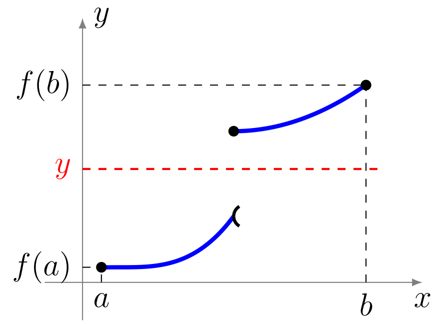
تعريف 2.4.2 : لتكن $f : I \to \mathbb{R}$ دالة معرفة على المجال I من $\mathbb{R}$.
نقول أن الدالة f مستمرة على المجال I إذاكانت مستمرة على جميع نقاط المجال I. نرمز لمجموعة الدوال المستمرة على مجال I بالرمز $\mathscr{C}(I)$.

نظرية القيم المتوسطة

نظرية 1.4.2 : (Théorème des valeurs intermédiaires) لتكن الدالة $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ المستمرة على القطعة المستقيمة $[a, b]$. ومنه من أجل كل عدد حقيقي y محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ فإنه يوجد عدد حقيقي $c \in [a, b]$ حيث $f(c) = y$.

(في الشكل الأيسر) ، فإنالعدد الحقيقي c ليس بالضرورة فريداً. من ناحية أخرى، إذا لم تكن الدالة مستمرة، فلن تعد النظرية صحيحة (الشكل على اليمين).





3.4.2. الإمتداد بالإستمرار

تعريف 3.4.2 : ليكن المجال I و لتكن x_0 النقطة من I و $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ دالة.

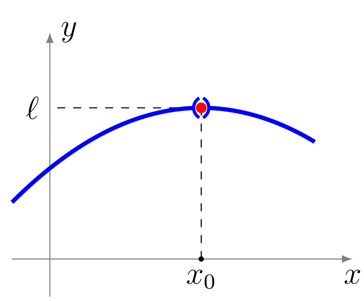
1) نقول أن الدالة f قابلة للتمديد بالإستمرار عند النقطة x_0 إذا كانت f تقبل نهاية منتهية عند x_0. ونكتب:

$$\ell = \lim_{x_0} f.$$

2) نعرف حينها الدالة التي نرمز لها بالرمز $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$ من أجل كل $x \in I$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{إذا كان } \; x \neq x_0 \\ \ell & \text{إذا كان } \; x = x_0. \end{cases}$$

ومنه الدالة $\tilde{f}$ مستمرة عند النقطة x_0 ونسمي تمديد الدالة f بالإستمرار عند النقطة x_0.



مثال 2 : لتكن الدالة المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}^*$ كما يلي

$$f(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

هل f تقبل التمديد بالإستمرار عند 0 ؟
لدينا من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$ فإن $|f(x)| \leq |x|$، نستنتج أن f تؤول لـ 0 عند 0. أي أنها قابلة للتمديد بالإستمرار عند 0 وتمديدها هو الدالة $\tilde{f}$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{إذا كان } x \neq 0 \\ 0 & \text{إذا كان } x = 0. \end{cases}$$

4.4.2. العمليات على الدوال المستمرة

العمليات الأولية على الاستمرارية هي نتائج فورية للقضايا المماثلة على النهايات.

اقتراح 1 : لتكن الدالتين $f, g : I \to \mathbb{R}$ لتكن النقطة $x_0 \in I$. ومنه

- $\lambda \cdot f$ مستمرة عند x_0 (من أجل كل $\lambda \in \mathbb{R}$)،
- $f + g$ مستمرة عند x_0،
- fg مستمرة عند x_0،
- إذا كان $f(x_0) \neq 0$، ومنه $\frac{1}{f}$ مستمرة عند x_0.

اقتراح 2 : لتكن $f : I \to \mathbb{R}$ و $g : J \to \mathbb{R}$ دالتين حيث $f(I) \subset J$. إذا كانت f مستمرة عند النقطة $x_0 \in I$ و إذا كانت g مستمرة عند النقطة $f(x_0)$ فإن الدالة تركيب $g \circ f$ مستمرة عند النقطة x_0.

5.2 الإشتقاق

1.5.2. المشتق في نقطة

ليكن I مجال مفتوح من $\mathbb{R}$ و $f : I \to \mathbb{R}$ دالة. ولتكن $x_0 \in I$.

تعريف 1.5.2 : نقول أن الدالة f قابلة للإشتقاق عند النقطة x_0 إذا كانت نسبة التزايد

$$\boxed{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

تقبل نهاية ثابتة لما x يؤول للقيمة x_0.
نسمى هذه النهاية العدد المشتق أو قيمة المشتق للدالة f عند القيمة x_0 و نرمز له بالرمز $f'(x_0)$.
ونكتب

$$\boxed{f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.}$$

تعريف 2.5.2 : نقول أن الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال I إذا كانت قابلة للإشتقاق على كل نقطة $x_0\in I$.
الدالة $x\mapsto f'(x)$ نسمى دالة المشتق نرمز لها بالرمز f' أو $\frac{df}{dx}$.

مثال 1 : الدالة المعرفة $f(x)=x^2$ قابلة للإشتقاق عند كل نقطة $x_0\in\mathbb{R}$. ولدينا:

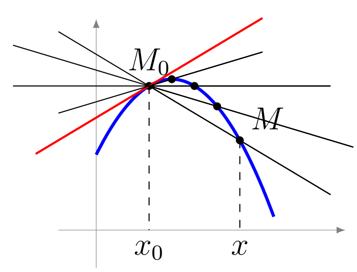
$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x^2-x_0^2}{x-x_0}=\frac{(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0}=x+x_0\xrightarrow[x\to x_0]{}2x_0.$$

حتى أنه أثبتنا أن العدد المشتق للدالة f عند x_0 هو $2x_0$، أو أيضا يمكننا كتابة : $f'(x)=2x$.

2.5.2. التفسير الهندسي للمشتق

الخط المستقيم الذي يمر عبر نقاط مميزة $(x_0,f(x_0))$ و $(x,f(x))$ له معامل توجيه القيمة $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. في النهاية نجد أن معامل توجيه الظل هو القيمة $f'(x_0)$.
معادلة المماس في النقطة $(x_0,f(x_0))$ هي

$$\boxed{y=(x-x_0)f'(x_0)+f(x_0).}$$



اقتراح 1 : .

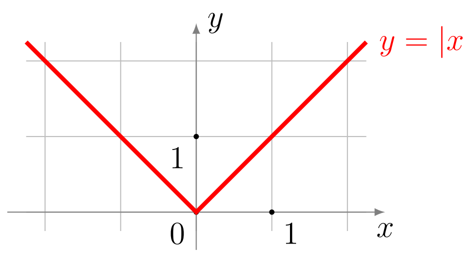
- f قابلة للإشتقاق عند x_0 إذا وفقط إذا كان $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ موجودة ومنتهية.
- f قابلة للإشتقاق عند x_0 إذا وفقط إذا وجد $\ell \in \mathbb{R}$ (الذي يساوي $f'(x_0)$) و دالة $\epsilon : I \to \mathbb{R}$ حيث $\epsilon(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$ مع

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\ell + (x - x_0)\epsilon(x).$$

اقتراح 2 : ليكن المجال I المفتوح و $x_0 \in I$ ولتكن $f : I \to \mathbb{R}$ دالة.

- إذا كانت f قابلة للإشتقاق عند x_0 فإن f مستمرة عند x_0.
- إذا كانت f قابلة للإشتقاق على I فإن f مستمرة على I.

ملاحظة 1 : العكس خاطئ: على سبيل المثال ، دالة القيمة المطلقة $f(x) = |x|$ مستمر في 0 ولكنه غير قابلة الإشتقاق عند 0.



وبالفعل، فإن معدل الزيادة عند $x_0 = 0$ يحقق :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} +1 & \text{إذا كان } x > 0 \\ -1 & \text{إذا كان } x < 0 \end{cases}.$$

3.5.2. حساب المشتق

اقتراح 3 : لتكن $f, g : I \to \mathbb{R}$ دالتين قابلتين للإشتقاق على المجال I. ومنه من أجل كل $x \in I$ لدينا:

- $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$ حيث λ عدد حقيقي ثابت

- $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- $\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$ (إذا كان $f(x) \neq 0$)
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$ (إذا كان $g(x) \neq 0$)

ملاحظة 2 : من الأسهل حفظ المساواة التالية:

$$\boxed{(f+g)' = f' + g' \qquad (\lambda f)' = \lambda f' \qquad (fg)' = f'g + fg'}$$

$$\boxed{\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2} \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}}$$

مشتق بعض الدوال المألوفة

الجدول الموجود على اليسار هو ملخص للصيغ الرئيسية التي يجب معرفتها ، x متغير. الجدول الموجود على اليمين هو جدول التراكيب ، u يمثل وظيفة $x \mapsto u(x)$.

الدالة	المشتق
u^n	$nu'u^{n-1} \qquad (n \in \mathbb{Z})$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\sqrt{u}$	$\frac{1}{2}\frac{u'}{\sqrt{u}}$
u^α	$\alpha u' u^{\alpha-1} \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$
e^u	$u'e^u$
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
$\cos u$	$-u' \sin u$
$\sin u$	$u' \cos u$
$\tan u$	$u'(1+\tan^2 u) = \frac{u'}{\cos^2 u}$

الدالة	المشتق
x^n	$nx^{n-1} \qquad (n \in \mathbb{Z})$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1} \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

اقتراح 4 : إذا كانت f دالة قابلة للإشتقاق عند x و g دالة قابلة للإشتقاق عند $f(x)$ فإن التركيب $g \circ f$ دالة قابلة للإشتقاق عند x ومشتقها من الشكل:

$$\boxed{\big(g \circ f\big)'(x) = g'\big(f(x)\big) \cdot f'(x).}$$

مثال 2 : لنحسب مشتق الدالة $\ln(1+x^2)$. لدينا $g(x) = \ln(x)$ مع $g'(x) = \frac{1}{x}$ و $f(x) = 1 + x^2$ مع $f'(x) = 2x$. و منه مشتق التركيب $\ln(1+x^2) = g \circ f(x)$ هو

$$\big(g \circ f\big)'(x) = g'\big(f(x)\big) \cdot f'(x) = g'\big(1 + x^2\big) \cdot 2x = \frac{2x}{1+x^2}.$$

4.5.2. المشتقات المتوالية

لتكن $f : I \to \mathbb{R}$ دالة قابلة للإشتقاق و ليكن f' مشتقها. إذا كانت الدالة المشتقة $f' : I \to \mathbb{R}$ أيضا دالة قابلة للإشتقاق فإن $f'' = (f')'$ المشتق الثاني للدالة f. بصفة عامة :

$$f^{(0)} = f, \quad f^{(1)} = f', \quad f^{(2)} = f'' \quad \text{و....} \quad f^{(n+1)} = \big(f^{(n)}\big)'$$

إذا كان المشتق $f^{(n)}$ من الدرجة n موجود، نقول f قابلة للإشتقاق n مرة.

نظرية 1.5.2 : (علاقة ليبنيتز)

$$\boxed{\big(f \cdot g\big)^{(n)} = f^{(n)} \cdot g + \binom{n}{1} f^{(n-1)} \cdot g^{(1)} + \cdots + \binom{n}{k} f^{(n-k)} \cdot g^{(k)} + \cdots + f \cdot g^{(n)}}$$

وبعبارة أخرى :

$$\boxed{\big(f \cdot g\big)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} \cdot g^{(k)}.}$$