التمرين01: لدينا المعطيات التالية:

$n=25$ ، $\mu=68kg$ ، $\sigma=3kg$ ، $N=3000$

1- حساب $\mu_{\overline{X}}$ و $\sigma_{\overline{X}}$:

$$\mu_{\overline{X}}=\mu=68kg$$

$$\sigma_{\overline{X}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{أو} \quad \sigma_{\overline{X}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

وعليه يجب أن نتحقق من الشرط التالي الذي يحدد الصيغة المستخدمة في حساب $\sigma_{\overline{X}}$

$$n\geq \%5\,N \Leftrightarrow 25\geq (0.05).(3000)$$

$$\Leftrightarrow 25<150$$

بما أن الشرط غير محقق فإننا لا نستخدم معامل التصحيح في حساب $\sigma_{\overline{X}}$ ، وبالتالي فإن :

$$\sigma_{\overline{X}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{3}{\sqrt{25}}=0.6kg$$

2- تحديد عدد العينات التي يكون فيها الوسط الحسابي محصور بين القيمتين: 66.8kg و 68.3kg

يجب أن نحدد أولا الاحتمال التالي: $P\left(66.8<\overline{X}<68.3\right)$

$$P\left(66.8<\overline{X}<68.3\right)=P\left(\frac{66.8-68}{0.6}<Z<\frac{68.3-68}{0.6}\right)$$

$$=P\left(-2<Z<0.5\right)$$

$$=P(0<Z\leq 0.5)+P(-2\leq Z<0)$$

$$=0.1915+0.4772=0.6687$$

ومنه فإن عدد العينات المطلوب هو:

$80.(0.6687)\approx 53$ عينة

التمرين02:

لدينا: $n=9$ ، $\sigma=0.005$ ، $\mu=5$

1- تحديد توزيع المعاينة لـ $\overline{X}$:

بما أن توزيع العملية الإنتاجية هو التوزيع الطبيعي، له متوسط قدره 5 سم وانحراف معياري 0.005 سم، فإن توزيع المعاينة لـ $\overline{X}$ يكون أيضا التوزيع الطبيعي بمتوسط قدره 5 سم وانحراف معياري قدره:

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0.005}{\sqrt{9}} = 0.00166$$

2- إيجاد الاحتمال التالي: $P(\overline{X} \geq 5.004)$

$$P(\overline{X} \geq 5.004) = P\left(Z > \frac{5.004-5}{0.00166}\right) = P(Z \geq 2.44)$$

$$= 0.5 - P(0 < Z \leq 2.44)$$

$$= 0.5 - 0.4918 = 0.0082$$

3- حساب حجم العينة إذا كان: $\sigma_{\overline{X}} = 0.001$

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0.001 \Leftrightarrow \frac{0.005}{\sqrt{n}} = 0.001$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{0.005}{0.001} = 5$$

$$\Rightarrow n = 25$$

4- يفضل الفاحص أو المفتش أن يكون الخطأ المعياري للوسط الحسابي يساوي 0.001 على أن يكون هذا الخطأ 0.00166، وهذا لأن الخطأ المعياري 0.001 هو أصغر من الخطأ المعياري 0.00166 وعليه لو أعدنا حساب الإحتمال في السؤال الثاني بهذا الخطأ فإن هذا الأخير سوف يكون أدق من الإحتمال في شكله الأول. حيث نجد أن الاحتمال الجديد يساوي:

$$P(\overline{X} \geq 5.004) = 0.0001$$

وهو احتمال ضئيل جدا مقارنة مع الاحتمال الذي حصلنا عليه من قبل، وبالتالي فإن هذا يعتبر سببا أكثر قناعة للتصديق بأن الانحراف عن $\mu = 5$ قد حدث فعلا. وفي حالة ما إذا كان هذا

الاحتمال كبير جدا فهذا يعني أن هناك سببا ضعيفا لكي نشك في وقوع انحراف عن متوسط العملية الإنتاجية.

التمرين03:

لدينا: $\mu = 135g$ ، $\sigma = 14g$ ، $n = 48$

ونريد حساب احتمال أن ينقص وزن الصندوق عن 6.24 كغ أو 6240 غ.

نفترض أن أوزان العبوات في صندوق ما هي : $X_1 , X_2 ,......, X_{48}$ ، وبالتالي فالمطلوب هو إيجاد الاحتمال التالي:

$$P\left(\sum_{i=1}^{48} X_i < 6240\right)$$

ومنه بقسمة طرفي المتراجحة على 48 يكون:

$$P\left(\sum_{i=1}^{48} X_i < 6240\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{48} X_i}{48} < \frac{6240}{48}\right) = P\left(\overline{X} < 130\right)$$

بما أن شروط نظرية تقارب التوزيعات متحققة، حيث الانحراف المعياري للمجتمع معلوم وحجم العينة كبير بدرجة كافية، فانه بإمكاننا تطبيق تلك النظرية في إيجاد الاحتمال السابق، أي:

$$P\left(\overline{X} < 130\right) = P\left(Z < \frac{130-135}{\frac{14}{\sqrt{48}}}\right)$$

$$= P\ (Z < -2.47)$$

$$= 0.5 - P(-2.47 \leq Z < 0)$$

$$= 0.5 - 0.4932 = 0.0068 \approx 0.007$$

أي أن الجهة الوصية عن مراقبة العبوات سوف ترفض 7 بالألف من الصناديق تقريبا.

التمرين04:

من خاصية التماثل لتوزيع t نلاحظ أن :

-1 $t_{(0.975,12)} = -t_{(0.025,12)} = -2.179$

-2 $t_{(0.05,10)} = -1.812$

التمرين05:

بما أن تباين المجتمع مجهول، وحجم العينة صغير فان توزيع المعاينة للوسط الحسابي يخضع لتوزيع ستيودنت بدرجات حرية:

.($\upsilon = n-1 = 25-1 = 24$)

وعليه فإن:

$$P(\overline{x} > 60) = P\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} > \frac{60-55}{\frac{10}{\sqrt{25}}}\right)$$

$$= P\ (T > 2.5) = 1 - P(T \leq\ 2.5)$$

$$= 1 - 0.99 = 0.01$$

التمرين06:

بما أن تباين المجتمع مجهول، وحجم العينة صغير فإن توزيع المعاينة للوسط الحسابي يخضع لتوزيع ستيودنت بدرجات حرية:

($\upsilon = n-1 = 16-1 = 15$)

وبالتالي يكون :

$$P(\overline{x} > 170) = P\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} > \frac{170-166}{\frac{8}{\sqrt{16}}}\right)$$

$$= P\ (T > 2) = 1 - P(T \leq\ 2)$$

$$= 1 - 0.975 = 0.025$$

التمرين07:

بنفس الطريقة، نلاحظ أن تباين المجتمع مجهول وحجم العينة صغير، وعليه فإن توزيع المعاينة للوسط الحسابي يخضع لتوزيع ستيودنت بدرجات حرية:

.($\upsilon = n-1 = 16-1 = 15$)

وبالتالي يكون:

$$P\left(\bar{X} \geq 0.75\right) = P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \geq \frac{0.75 - 0.6}{\frac{0.175}{\sqrt{16}}}\right)$$

$$= P\ (T \geq 3.428)$$

$$= 1 - P(T < 3.428)$$

$$= 1 - 0.999 = 0.001$$

التمرين08:

لدينا: $\mu_1 = 1400,\ \ \mu_2 = 1200\ ,\ \ \sigma_1 = 200,\ \ \sigma_2 = 100$

$n_1 = 125\ \ ,\ n_2 = 125$

والمطلوب هو إيجاد الاحتمال التالي:

$$P\left(\bar{X}_1 > \bar{X}_2 + 250\right) = P[\ (\bar{X}_1 - \bar{X}_2\ ) > 250\ ]$$

بتطبيق النظرية الرابعة نجد:

$$P[\ (\bar{X}_1 - \bar{X}_2\ ) > 250\ ] = P\left(\frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} > \frac{(250) - (200)}{\sqrt{\frac{200^2}{125} + \frac{100^2}{125}}}\right)$$

$$= P\ (Z > 2.5)$$

$$= 0.5 - P(0 < Z \leq\ 2.5)$$

$$= 0.5 - 0.4938 = 0.0062$$

التمرين09:

لدينا: $\mu_1 = 74,\ \ \mu_2 = 71\ ,\ \ \sigma_1^2 = 100,\ \ \sigma_2^2 = 144$

$n_1 = 40\ \ ,\ n_2 = 60$

والمطلوب هو إيجاد الاحتمال التالي:

$$P(\bar{X}_1 > \bar{X}_2 + 2) = P[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) > 2]$$

بتطبيق النظرية الرابعة نجد:

$$P[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) > 2] = P\left(\frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} > \frac{(2) - (74-71)}{\sqrt{\frac{100}{40} + \frac{144}{60}}}\right)$$

$$= P(Z > -0.45)$$

$$= 0.5 + P(-0.45 \leq Z < 0)$$

$$= 0.5 + 0.1736 = 0.6736$$

التمرين10:

لدينا:

$$\mu_1 = 35 \text{ ، } \mu_2 = 33 \text{ ، } n_1 = 18 \text{ ، } n_2 = 22 \text{ ، } s_1^2 = 6 \text{ ، } s_2^2 = 9$$

بما أن تبايني المجتمعين مجهولين ومتساويين، والعينتان مستقلتان وصغيرتا الحجم فإننا نستخدم توزيع t بدرجة حرية $(n_1 +_2 - 2)$ وذلك لإيجاد الاحتمال التالي:

$$P[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) < 3]$$

لدينا:

$$P[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) < 3] = P\left(\frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{s_p^2(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}} < \frac{(3) - (35-33)}{\sqrt{s_p^2(\frac{1}{18} + \frac{1}{22})}}\right)$$

الآن نقوم بحساب s_p^2 ، حيث:

$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)\, s_1^2 + (n_2 - 1)\, s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

$$s_p^2 = \frac{(18-1)6+(22-1)9}{18+22-2} = 7.66$$

ومنه يكون:

$$P[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) < 3] = P\left(T < \frac{1}{\sqrt{7.66(\frac{1}{18}+\frac{1}{22})}}\right)$$

$$= P(T < 1.136)$$

عند درجات الحرية: $n_1 + _2 - 2 = 18 + 22 - 2 = 38$

نجد: $P[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) < 3] = 0.9$

التمرين11:

لدينا:

$$\mu_1 = 70 \text{ ، } \mu_2 = 74 \text{ ، } n_1 = 16 \text{ ، } n_2 = 9 \text{ ، } S_1 = 12 \text{ ، } S_2 = 16$$

بما أن تبايني المجتمعين مجهولين وغير متساويين، والعينتان مستقلتان وصغيرتا الحجم فإننا نستخدم توزيع t بدرجة حرية لها الصيغة المركبة، وذلك لإيجاد الاحتمال التالي: $P[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \geq 8]$

إذن:

$$P[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \geq 8] = P\left(\frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \geq \frac{(8) - (70 - 74)}{\sqrt{\frac{12^2}{16} + \frac{16^2}{9}}}\right)$$

$$= P(T \geq 1.96) = 1 - P(T < 1.96)$$

عند درجات الحرية:

$$\upsilon=\left(\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{(n_1-1)}+\frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{(n_2-1)}}\right)=\left(\frac{\left(\frac{12^2}{16}+\frac{16^2}{9}\right)^2}{\frac{\left(\frac{12^2}{16}\right)^2}{(16-1)}+\frac{\left(\frac{16^2}{9}\right)^2}{(9-1)}}\right)=13$$

يكون:

$$P[(\bar{X}_1-\bar{X}_2)\geq 8]=1-P(T<1.96)=1-0.95=0.05$$