المحور الأول: البرمجة الخطية

1) تعريف البرمجة الخطية:

يرجع ظهور إستخدام نموذج البرمجة الخطية إلى جورج دانتزنج (G.Dantzing) عندما إستخدم أسلوب السمبلكس لحل مشاكل البرمجة الخطية سنة 1947م، وتعرف البرمجة الخطية بأنها: هي أسلوب من الأساليب الكمية التي تصمم وتستخدم بغرض مساعدة المنظمة في تخصيص مواردها المحدودة.

وهي عبارة عن طريقة أو أسلوب رياضي يستخدم للمساعدة في التخطيط وإتخاذ القرارات المتعلقة بالتوزيع الأمثل للموارد المتاحة، وذلك بهدف زيادة الأرباح أو تخفيض التكاليف.

و تجدر الإشارة هنا إلى أن كلمة برمجة (Programming) ليست لها علاقة ببرمجة الحاسوب، ولكنها كلمة مرادفة للتخطيط، وتعني وضع المشكلة بصيغة رياضية أو نموذج رياضي وحلها.

2) تكوين النموذج الرياضي أو البرنامج الخطي:

مثال: تقوم مؤسسة الصغير بإنتاج منتوجين A, B (نوعين من لعب الأطفال)، ولأنتاج هذين النوعين يتطلب ذلك ما يلي:

المنتوج A: 2 وحدة من البلاستيك و 1 وحدة من الحديد.

المنتوج B: 3 وحدة من البلاستيك و 1 وحدة من الحديد.

إلا أنه لا تتوفر في المخازن إلا 100 وحدة من مادة البلاستيك و 50 وحدة من مادة الحديد (قيود أو شروط يفرضها المحيط على المؤسسة).

كما أن الربح الصافي للوحدة الواحدة من المنتوج A هو 5 دج، والربح الصافي للوحدة الواحدة من المنتوج B هو 4 دج.

المطلوب: ما هي الكميات الواجب إنتاجها من كل منتوج لتعظيم أرباح المؤسسة؟

حل المثال السابق:

1 تحديد المتغيرات:

X1 عدد الوحدات المنتجة من المنتوج A.

X2 عدد الوحدات المنتجة من المنتوج B.

2 دالة الهدف:

أعظم ربح ممكن = (ربح الوحدة الواحدة من A X عدد الوحدات المنتجة من المنتوج A) + (ربح الوحدة الواحدة من B X عدد الوحدات المنتجة من المنتوج B) $Max\ Z = 5X1 + 4X2$

3 القيود أو الشروط:

– قيد مادة البلاستيك:

الكمية المستخدمة من البلاستيك في المنتوج A + الكمية المستخدمة من البلاستيك في المنتوج B لا تتعدى الكمية المتاحة من هذه المادة في المخازن.......... $2X1 + 3X2 \leq 100$

– قيد مادة الحديد:

الكمية المستخدمة من الحديد في المنتوج A + الكمية المستخدمة من الحديد في المنتوج B لا تتعدى الكمية المتاحة من هذه المادة في المخازن................ $X1 + X2 \leq 50$

4 شرط عدم السلبية:

يجب أن يكون كل متغير في النموذج موجب وليس سالب.... $X1 , X2 \geq 0$

3) أشكال النماذج الرياضية:

هناك أشكال مختلفة للنماذج الرياضية وهي:

- النموذج العام.
- النموذج النظامي.
- النموذج المعياري (الصيغة القياسية).

4) طرق حل النماذج الرياضية أو البرامج الخطية: هناك طريقتين للحل وهما:

- **الطريقة البيانية.**
- **طريقة الجداول أو السامبلكس (Simplex).**

أولا– الطريقة البيانية:

1 – **تعريف الطريقة البيانية:** هي عبارة عن رسم بياني لنموذج البرمجة الخطية وتعد الطريقة البيانية من أسهل طرق حل مشاكل البرمجة الخطية إلا أنها غير كافية لمعالجة جميع مسائلها، لأن المسائل العملية تحتوي غالبا على عدد كبير من المتغيرات بعكس هذه الطريقة التي يمكن استخدامها فقط في النماذج التي تحتوي على متغيرين فقط.

2 – **خطوات الحل بالطريقة البيانية:** من أجل الحل بهذه الطريقة نتبع الخطوات التالية:

- نحول كل متراجحات القيود إلى معادلات.
- نرسم الخطوط المستقيمة للمعادلات على معلم متعامد، من خلال تحديد نقطتين لكل مستقيم.
- نشطب المناطق التي لا تحقق القيود وهي توجد إلى يمين المستقيم في حالة كون القيد أقل من، وإلى يساره في حالة كون القيد أكبر من.
- نحدد المنطقة التي تحقق جميع القيود وتسمى منطقة الحلول الممكنة (مجال الحلول الممكنة).
- يتم تحديد نقاط تقاطع المستقيمات مع بعضها أو مع المحاور (أركان منطقة الحلول الممكنة).
- إيجاد إحداثيات كافة نقاط التقاطع سواء من خلال الرسم أو بالطريقة الجبرية.

- تعويض قيم الإحداثيات في دالة الهدف والقيود واختيار أكبر قيمة للدالة إذا كان الهدف تعظيم الأرباح، وأقل قيمة إذا كان الهدف تخفيض التكاليف.

مثال في حالة التعظيم Max: ليكن النموذج الرياضي السابق:

Max $Z = 5X1 + 4X2$

$2X1 + 3X2 \leq 100$

$X1 + X2 \leq 50$

$X1 , X2 \geq 0$

المطلوب: أوجد الحل الأمثل باستخدام الطريقة البيانية؟

حل المثال:

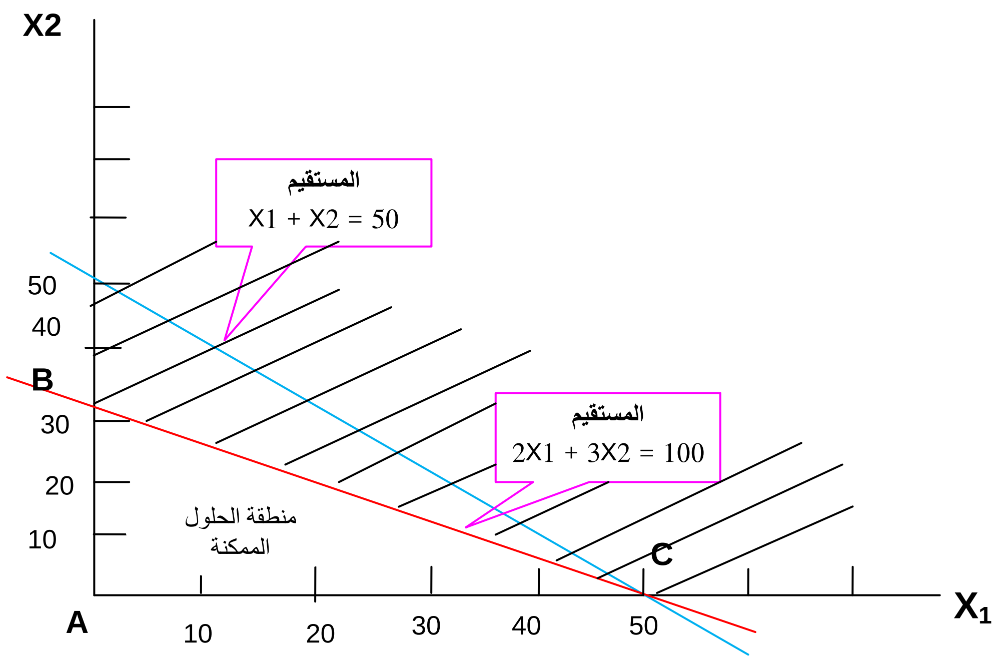
1. تحويل كل متراجحات القيود إلى معادلات، ثم رسم الخطوط المستقيمة للمعادلات على معلم متعامد، من خلال تحديد نقطتين لكل مستقيم:

$2X1 + 3X2 = 100 \Longrightarrow$ $X1= 0 ; X2= 100/3= 33.3$

$X2= 0 ; X1= 100/2= 50$

$X1 + X2 = 50 \Longrightarrow$ $X1= 0 ; X2= 50$

$X2= 0 ; X1=50$



2. أركان منطقة الحلول الممكنة:

- A $(X1,X2) = (0,0)$; $Z=0$ نقطة عدم الإنتاج وعدم تحقيق الأرباح وعدم استغلال للموارد
- B $(X1,X2) = (0,33.3)$; $Z=5*0 + 4*33.3 = 133.2$ DA

$2*0 + 3*33.3= 100 \leq 100$

تم استغلال كل مادة البلاستيك ولم يتم استغلال كل مادة الحديد وتبقى 16.7 وحدة $0 + 33.3 \leq 50$
وتحقق المؤسسة أرباح قدرها 133.2 دج.

- C (X1,X2) = (50,0) ; Z=5*50 + 4*0 = 250 DA

$2*50 + 3*0= 100 \leq 100$

$50 + 0 = 50 \leq 50$

تم استغلال كل مادة البلاستيك وتم استغلال كل مادة الحديد، وتحقق المؤسسة أرباح قدرها 250 دج، وبالتالي النقطة A تمثل الحل الأمثل الذي يحقق تعظيم الأرباح للمؤسسة.

ويمكن إيجاد قيمة المتغيرين X1 ; X2 جبريا بحل معادلتي المستقيمين.

وعموما **نستخدم الطريقة الجبرية مع الطريقة البيانية** لإيجاد نقاط تقاطع المستقيمات التي لا يمكن تحديد قيمتها في الرسم.

ثانيا: طريقة الجداول أو السامبلكس (Simplex).

تعد طريقة السمبلاكس أسلوبا متطورا لحل مسائل البرمجة الخطية التي تتكون من أكثر من متغيرين، ومن أجل الحل بهذه الطريقة نستخدم النموذج المعياري (القياسي).

1. تحويل النموذج العام أو النظامي إلى نموذج معياري (الصيغة القياسية) من خلال إضافة متغيرات معينة (متغيرات الإنحراف) كما يلي:

- إذا كانت لدينا متراجحة من الشكل $ax1 + bx2 \leq c$ يتم إضافة متغير فوارق فتصبح المعادلة $ax1 + bx2 + A1 = c$ وتظهر في دالة الهدف بمعامل 0 حتى لا تؤثر على الأرباح أو التكاليف.
- إذا كانت لدينا متراجحة من الشكل $ax1 + bx2 \geq c$ يتم تخفيض متغير زيادة وإضافة متغير اصطناعي (وهمي) فتصبح المعادلة $ax1 + bx2 - A1 + A2 = c$ وتظهر متغيرات الزيادة في دالة الهدف بمعامل 0، أما المتغيرات الاصطناعية يتم تحميلها بمعامل كبير جدا يرمز له (M) بحيث يكون عكس دالة الهدف: إذا كان الهدف تعظيم يكون المعامل (M−)، وإذا كان الهدف تخفيض يكون المعامل (M+).
- إذا كانت لدينا معادلة من الشكل $ax1 + bx2 = c$ يتم إضافة متغير اصطناعي (وهمي) فتصبح المعادلة $ax1 + bx2 + A1 = c$ ومعاملاتها سبق الإشارة إليها في النقطة السابقة.

مثال: ليكن النموذج التالي:

Max $Z = 2X1 + 3X2$

$7X1 + 4X2 \leq 28$

$4X1 + 5X2 \leq 20$

$X2 \leq 3$

المطلوب: أوجد الحل الأمثل باستخدام طريقة السامبلكس؟ $X1\ ,\ X2 \geq 0$

حل المثال:

تحويل النموذج النظامي إلى الشكل المعياري:

$7X1 + 4X2 + A1 = 28$

$4X1 + 5X2 + A2 = 20$

$X2 + A3 = 3$

$\text{Max } Z = 2X1 + 3X2 + 0A1 + 0A2 + 0A3$

$X1\ ,\ X2,\ A1,\ A2,\ A3 \geq 0$

تكوين جدول السمبلكس:

المعاملات في دالة الهدف	الكميات	المتغيرات	المعاملات
المتغيرات في دالة الهدف	Q	V	C
مصفوفة المعاملات التقنية			
سطر التقييم	الأرباح Z أو التكاليف C		

عمود الكميات/عمود المتغيرة الداخلة	0	0	0	3	2	الكميات	المتغيرات	المعاملات
	A_3	A_2	A_1	X_2	X_1	Q	V	C
28/4=7	0	0	1	4	7	28	A_1	0
20/5=4	0	1	0	5	4	20	A_2	0
3/1=3	1	0	0	$\boxed{1}$	0	03	A_3	0
	0	0	0	−3	−2	Z= 0		

ملاحظات:

– يحتوي عمود المتغيرات(V) في الحل الأولي على متغيرات الفوارق والمتغيرات الاصطناعية، ولا تظهر متغيرات الزيادة في عمود المتغيرات في الحل الأولي.

– المتغيرات الموجودة في عمود المتغيرات (V) تكون قيمتها في سطر التقييم معدومة.

– نحسب قيمة الأرباح Z أو التكاليف C بضرب عمود المعاملات في عمود الكميات $(\Sigma\ Qi * Ci)$.

– سطر التقييم هو نتائج خاصة بكل عمود، ويساوي مجموع (حاصل ضرب عمود المعاملات في عمود المعاملات التقنية) طرح معامل دالة الهدف.

2. اختبار الأمثلية ومراحل عملية التحسين:

يعتبر الحل أمثل في مسألة التعظيم (Max) إذا كانت قيم سطر التقييم (أسعار الظل، التكلفة الحدية) موجبة أو معدومة، ويعتبر الحل أمثل في مسألة التخفيض (Min) إذا كانت قيم سطر التقييم سالبة أو معدومة.

وفي مثالنا السابق وباعتبار المسألة تعظيم هناك قيم سالبة في سطر التقييم وبالتالي الحل غير أمثل يستدعي عملية التحسين ونقوم بهذه العملية كما يلي:

– في مسألة التعظيم (Max) نختار أقل قيمة سالبة أو أكبر قيمة بالقيمة المطلقة في سطر التقييم وهي التي تحدد المتغيرة الداخلة للحل (في مثالنا أقل قيمة سالبة هي −3 والخاصة بالمتغير X2)، أما في مسألة التخفيض (Min) نختار أكبر قيمة موجبة في سطر التقييم.

– لتحديد المتغيرة الخارجة نقوم بقسمة عمود الكميات على عمود المتغيرة الداخلة ثم نختار أقل قيمة موجبة، وبالتالي نحدد المتغيرة الخارجة والداخلة للحل، سواء في مسألة التعظيم أو التخفيض.

– خروج متغير من الحل ودخول متغير آخر يعني الحصول على جدول جديد.

– في الجدول الجديد فإن نقطة التقاء المتغير الداخل مع المتغير الخارج تسمى المحور، حيث تصبح قيمة المحور في الجدول الجديد (01) وبقية قيم عمود المحور تصبح أصفارا وحتى قيمته في سطر التقييم صفر.

– سطر المحور في الجدول الجديد هو سطره في الجدول القديم مقسوم على قيمة المحور.

– بالنسبة لحساب بقية القيم نستعمل طريقة المربعات كما يلي: يتم تكوين مربع من القيم بحيث تكون زواياه المتقابلة هي القيمة المراد حسابها وقيمة المحور ونحسب بالعلاقة: القيمة القديمة – (جداء القيمتين المتقابلتين/ قيمة المحور) مثلا لحساب الكمية في السطر الأول Q2=28 في الجدول الجديد

28	4
3	1

16 = (1/3*4) −28 7 =(1/0*4) −7

5 = (1/3*5) −20 4− = (1/1*4) −0

المعاملات C	المتغيرات V	الكميات Q	2 X_1	3 X_2	0 A_1	0 A_2	0 A_3	عمود الكميات/عمود المتغيرة الداخلة
0	A_1	16	7	0	1	0	−4	16/7=2.2
0	A_2	5	4	0	0	1	−5	5/4=1.25
3	X_2	3	0	1	0	0	1	3/0= ∞
Z= 9			−2	0	0	0	3	

نلاحظ وجود قيم سالبة في سطر التقييم وبالتالي الحل غير أمثل يستدعي التحسين.

نختار القيمة (−2) وبالتالي المتغير X1 يدخل للحل، والمتغير الخارج من الحل هو A2 ونحصل على جدول جديد.

المعاملات	المتغيرات	الكميات	2	3	0	0	0
C	V	Q	X_1	X_2	A_1	A_2	A_3
0	A_1	29/4	0	0	1	−7/4	19/4
2	X_1	5/4	1	0	0	1/4	−5/4
3	X_2	3	0	1	0	0	1
Z= 46/4= 11.5			0	0	0	1/2	1/2

نلاحظ أن كل قيم سطر التقييم موجبة أو معدومة وبالتالي الحل أمثل، المؤسسة تنتج 1.25 وحدة من المنتوج الأول و 3 وحدات من المنتوج الثاني، وتحقق ربح أعظمي قدره 11.5 دج، ويتبقى من المورد الأول 7.25 وحدة غير مستغلة، أما بالنسبة للقيود نتحقق هل تم استغلال الموارد وهل هي محققة كما يلي:

$7*1.25 + 4*3 = 8.75+12 = 20.75 \leq 28$

الكمية المتبقية من المورد الأول هي $28 - 20.75 = 7.25$ وهي الكمية التي تظهر في السطر الأول للمتغير $A1=29/4$، وبالتالي القيد الأول محقق.

القيد الثاني محقق $4*1.25 + 5*3 = 5+15 = 20 \leq 20$

القيد الثالث محقق $3 \leq 3$