المجلس الأعلى للغة العربية

بوابة التحليل التفاضلي:

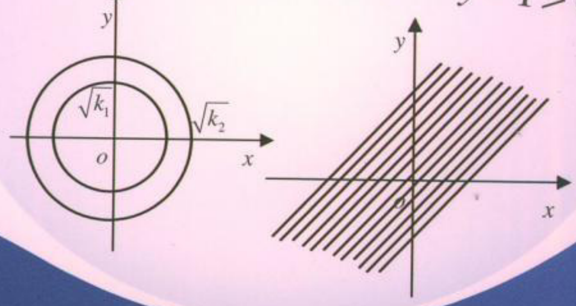
الدوال ذات عدّة متغيّرات حقيقيّة

دروس مبسّطة وتمــــارين منوّعة

الأستاذ الدكتور
محمّد حازي

$$f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x+y-1}}$$

$$D_f=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x+y-1>0\right\}.$$



منشورات المجلس 2017

بوابة التحليل التفاضلي

الدوال ذات عدّة متغيّرات حقيقيّة

دروس مبسّطة وتمارين منوّعة

للمرحلة الأولى الجامعيّة بكلّ فروعها
وتخصّصاتها

محمّد حازي

منشورات المجلس 2017

كتاب: بوابة التحليل التفاضلي

- **إعداد:** محمد حازي
- **قياس الصفحة:** 23/15.5
- **عدد الصفحات:** 296

الإيداع القانوني: السداسي الأول، 2017

ردمك: 978 -9947 -821 -92 -3

المجلس الأعلى للغة العربية

شارع فرونكلين روزفلت - الجزائر

ص. ب: 575 الجزائر _ ديدوش موراد

الهاتف: 021.23.07.24/25

الفاكس: 021.23.07.07

أنشودة السبيل↓

صـــــــــه خليلـــــــــــي واقطـــــــــع القيـــــــــل
جـــــــــاء الـــــــديوان[1] يـــــــــزفّ الســـــــــبيل

هيّـــــــــا نلـــــــــق الطالــــــــب نبشّـــــــره
حـــــــــقّ أن يفـــــــــرح وينثـــــــــر التهليـــــــــل

علاقـــــــات ومجموعـــــــات في الجـــــــبر عُـــــــدّت
تـــــــراص وتـــــــرابط تمـــــــلأ التحليـــــــل

الطـــــــاء[2] والصـــــــاد[3] بالكـــــــاف[4] أُردِفـــــــت
جـــــــاءت لضـــــــيقها الحـــــــاء[5] إكلـــــــيلا

تمارينـــــــه نجـــــــوم يســـــــتنار بهـــــــا
يعمّـــــــر في كنفهـــــــا النجـــــــاح طـــــــويلا

قهـــــــرت خمـــــــيس الرســـــــوب فولّـــــــت
فلولـــــــه القهقـــــــري خزيـــــــا ذلـــــــيلا

لمّـــــــا أيقـــــــن ألاّ ســـــــلطان علـــــــى الطالـــــــب لـــــــه
عـــــــلا صـــــــوته إلى الســـــــماء عـــــــويلا.

↓ كلام شبه منظّم، قلته حين صدور الكتاب "الفالج المقروض" في طبعته الأولى. إنّه ترويج له لدى جمهور مستخدميه. لك فيه الرفيق المعين على هضم واستيعاب مفاهيم المطبوعة الحاضرة.

(1) ديوان المطبوعات الجامعيّة.
(2) مجموعة الأعداد الطبيعيّة.
(3) مجموعة الأعداد الصحيحة.
(4) مجموعة الأعداد الناطقة.
(5) مجموعة الأعداد الحقيقيّة.

الإهداء

إن الحاجة " محجوبة نزادا " من أهلي..
كلما تذكّرتها تراءت لي السنوات الأولى من
دراستي بدءا من عين الزاوية وانتهاء بالبويرة،
أخلصت في خدمتي وإخوتي دونما كلل. فإليها
أهدي هذا الدفتر

تحية إكبار لها و... ذكرى لتلك الأيام...

بسم الله الرحمن الرحيم

تصدير

1.0 كلمة لابدّ منها

تمثّل الدروس المستعرضة عبر الدفاتر السبعة عصارة ما شاركت فيه خلال أعوام عديدة ضمن أطقم أشرفت على السنة الأولى في المدارس الوطنيّة العليا الأربع التالية:

المدرسة العليا للأساتذة بالقبّة القديمة؛

المدرسة الوطنيّة للأشغال العموميّة بڤاريدي- القبّة؛

المدرسة الوطنيّة المتعدّدة التقنيات بالحرّاش؛

المدرسة الوطنيّة للتحضير لدراسات المهندسين برويبة.

إنّها وفاء بالوعد الذي قطعته على نفسي، خلال إعدادي كتابي "السبيل إلى الأعداد الحقيقيّة"↓، بالعودة إلى وحدة تحليل السنة الأولى ووضع مرجع شامل يغطّيها. فها هو العمل في سبع مقطورات، يشكّل "السبيل" قاطرة لها.

أجدّد في هذه الفسحة المتاحة شكري لكلّ زميل عمل وقاسى معي الأمرّين في خدمة طلبة السنة الأولى، وأحيّيه منحنيا على ما بذله من

↓ صدر بدار ديوان المطبوعات الجامعيّة 1999.

جهد وأغدقه من عطاء وتجشّمه من صعاب وتحمّله من عناء في سبيل ترويض المادّة وإنضاجها وإيصالها إلى المتلقّين نقيّة كاملة.

أكتفي بذكر رؤوس الفرق دون أن ينتقص ذلك مثقال ذرّة من دور كلّ الأعضاء الآخرين، وهم كثيرون. فلئن حال ضيق الإطار دون ذلك، فإنّ القلب أرحب ويسعهم على مدار الزمن بشوق جامح يخنق الأنفاس وحنين متجدّد لا يعرف الحدود ...

- الأستاذ شريف بوزيدي من المدرسة الوطنيّة للأشغال العموميّة بالقبّة؛
- الأستاذ ابراهيم كاشة من المدرسة الوطنيّة المتعدّدة التقنيات بالحرّاش؛
- الأستاذ مسعود جبارني من المدرسة الوطنيّة للتحضير لدراسات المهندسين برويبة؛
- الأستاذ إسماعيل اجبالي من المدرسة العليا للأساتذة بالقبّة القديمة.

2.0 مقدّمة

المدرّس الناجح من اقتنع ليقنع ومتّع ليمتع !

المؤلّف

لا يحتاج طالب نبه مثلك إلى حجج للاقتناع بأنّ جلّ ظواهر الحياة المحيطة بنا، إن لم نقل كلّها، توابع لعوامل متعدّدة تضبطها.

أليس نجاحك في الدراسة متوقّفا على ركائز عدّة، منها المواظبة والمثابرة والمراجعة و...؟

ألا يتوقّف نموّ نبتة بنوع التربة ومقوّمات البذرة والسقي و...؟

أيصل بلدتك مطر دون مياه تتبخّر وغيوم تتلبّد ورياح تسوق و...؟

إنّ هذا نزر من غيث.

ومن منظور القولبة الرياضياتيّة، يزخر حضور الدوال المتعدّدة المتغيّرات في محيطنا المعيشيّ بشواهد لا تعدّ ولا تحصى وهو ملموس لا يكاد يخفى. نجده في :

- مساحة ومحيط قطعة مستطيلة دالّتان لمتغيّرين، طولها وعرضها ؛
- حجم مسبح متوازي مستطيلاتيّ دالة لثلاثة متغيّرات، هي أبعاده: طولا وعرضا وارتفاعا ؛
- درجة الحرارة عند نقطة ما في مسكن دالّة للإحداثيات الفضائية الثلاثة؛
- ارتفاع نقطة من الكرة الأرضيّة إزاء سطح البحر دالّة لمتغيّرين، هما خطّا الطول والعرض المحدّدان لها ؛

إلخ ...

كانت بداية دراسة الدوال الحقيقيّة المتعدّدة المتغيّرات مع القرن الثامن عشر؛ غير أنّ أسسها المتينة لم توضع إلاّ مع مطلع القرن العشرين. كان مفهوم المشتقّ الجزئيّ معروفا مع نهاية القرن السابع عشر، غير أنّ المعادلات ذات المشتقّات الجزئيّة لم تظهر سوى انطلاقا من منتصف القرن الثامن عشر في مسائل ميكانيكيّة.

يعتبر الرياضيّاتيّ الفرنسيّ كليرو [1] ثمّ السويسريّ أولر [2] الأبوين اللذين كانا وراء المشتقّات الجزئيّة. لقد درسا ما شاع الآن تحت تسمية التفاضلية الكلّية لدوال ذات متغيّرين:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dy.$$

يبدو أنّ أوّل من استخدم رمز الاشتقاق الجزئيّ هو الفرنسيّ كوندورسيه [3] ضمن مذكّرة حول المعادلات التفاضليّة ذات المشتقّات

1. Clairaut Alexis-Claude : عالم فرنسيّ. ولد في 03 ماي 1713 بباريس ومات بها في17 ماي 1765. اهتمّ مبكّرا بالرياضيّات. يعدّ من الأوائل الذين استخدموا المشتقّات الجزئيّة إلى جانب أولر.

2. Leonhard Euler : رياضيّاتيّ سويسريّ موهوب، ولد في 15 أفريل 1707 في بازل ومات في 18 سبتمبر 1783 بسانبترسبورڤ (روسيا). له تركة ضخمة في الرياضيّات. أُعترف له بأنّه أغزر الرياضيّاتيّين إنتاجا لكلّ الأوقات. يرجع إليه الفضل في إدراج الرمز $f(x)$ لدالّة (1734) و e لأساس اللوغاريتم (1727) و i لجذر 1- التربيعيّ (1777) و π للعدد پي (1755) وغيرها كثير...

3. Marie Jean Antoine de Condorcet : فيلسوف ورياضيّاتيّ فرنسيّ. ولد في 17 سبتمبر 1743 بريبمون ومات في 29 مارس 1794 ببور لارين. اشتهر بأعماله السبقيّة في الإحصاء والاحتمالات وبنشاطه السياسي قبل وأثناء الثورة الفرنسية.

الجزئيّة عام 1770، ثمّ لوجاندر [4] عام 1786؛ غير أنّ هذا الأخير سرعان ما تركه. تمّت إعادته للاستعمال من قبل الرياضيّاتيّ الألمانيّ جاكوبي [5] 1841.

لم تتم دراسة المعادلات ذات المشتقّات الجزئيّة من الرتبة الأولى بصفة شاملة سوى في حدود عام 1770.

في القرن الثامن عشر وأمام مشكلات أفرزت في ميكانيك الجسوم القابلة للتشوّه ونظرية المرونة ظهرت المشتقّات الجزئيّة من الرتبة الثانية وبالخصوص عند دراسة معادلة الحبال المهتزّة، ومعادلة انتشار الحرارة اللتين كانتا وراء ميلاد سلاسل فوريي [6].

يعود فضل اقتراح الترميزة المألوفة حاليا للمشتقّات الجزئيّة الثانية $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$ للعالم جاكوبي.

---

4. Adrien-Marie Legendre : رياضيّاتيّ فرنسيّ. ولد في 18 سبتمبر 1752 بباريس ومات بها في 10 جانفي 1833. كان أهمّ أعماله حول الدوال الناقصيّة، وقد نشره في ثلاثة مجلّدات تحت عنوان " تمارين الحساب التكامليّ"، في الأعوام 1811 و1817 و1819.

5. Carl Gustav Jacobi : رياضيّاتيّ ألمانيّ. ولد في 10 ديسمبر 1804 ببوستدام ومات في 16 فيفري 1851 ببرلين. اشتغل في ميادين مختلفة, له اكتشافات هامّة لا سيما في نظرية الأعداد. اشتهر بأعماله في المحدّدات التي خصّص لها مذكّرة نشرها 1841.

6. Joseph Fourier : رياضيّاتيّ فرنسيّ. ولد في 21 مارس 1768 بأكسير ومات في 16 ماي 1830 بباريس. درس بمدرسة باريس العليا للأساتذة على أيدي لاقرانج ولابلاس. بدأ بالتدريس بالمدرسة المتعدّدة التقنيات قبل أن يشارك في حملة نابليون على مصر. نشر عددا هامّا من البحوث في الرياضيّات الصرفة والتطبيقيّة.

7. Hermann Amandus Schwarz : رياضيّاتيّ نمساويّ. ولد في 25 جانفي 1843 بهرمسدورف (بولونيا الحالية) ومات في 30 نوفمبر 1921 ببرلين. درس الكيمياء ثمّ الرياضيّات تحت تأثير فيرشتراس. يحتفظ له التاريخ بمتباينته في التكاملات.

في عام 1873 أثبت الرياضيّاتيّ الألمانيّ شوارز [7] أنّ صحّة الدستور:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i},$$

الشهير في الأدب الرياضيّاتيّ بمبرهنة أو مقياس شوارز، قائمة إذا كان أحد الطرفين مستمرّا بالنسبة إلى كافة المتغيّرات. في هذا الصدد، قدّم الريّاضيّاتيّ الإيطاليّ بيانو [8] الدالّة الواردة في المثال المعالج في الملحوظة 7.1.2:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & ;\ (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & ;\ (x,y) \neq (0,0). \end{cases}$$

للاستشهاد بها على انتفاء الصحّة عن هذا الدستور في حال مبادلة المشتقّات الجزئيّة في غياب الاستمرار ...

هيكل الكتاب الحاضر وفق ثلاثة فصول ودليلين هي:

- الأول: النهايات والاستمرار،
- الثاني: الاشتقاق الجزئي والقابليّة للمفاضلة،
- الثالث: النشر التايلوريّ والنقاط الحدّية؛
- دليل المصطلحات؛
- دليل الرياضيّاتيّين المذكورين.

8. Giuseppé Peano : فيلسوف ورياضيّاتيّ إيطالي. ولد في 27 أوت 1858 بكونيو (إيطاليا) ومات في 20 أفريل 1932 بطورينو. انصبّ اهتمامه حول المنطق والإنشاء الصوري لكائنات رياضيّاتيّة. له السبق في استعمال رمزي الاتحاد والتقاطع.

دبّجنا الجانب الدرسيّ في هذا الكرّاس بسلاسة وبيان. أتينا بفقراته في تكامل وتناسق يعضد بعضها بعضا.

جلبنا إليه ما رأيناه ضروريّا من التعاريف والمبرهنات والنتائج ونثرنا فيه من الأمثلة ما هو موضّح ومكمّل. ثُمّ عمدنا إلى سلسلة من التمارين قدّها ناف عن تسع وخمسين وحدة، تصدّينا لحلّها بحذق وإمعان. غيّرنا ونوّعنا في الطرق والحيل جهد الإمكان. ختمنا الكرّاس بلوحة من مئة وأربعة تمارين تدريبيّة، يوسّع بها القارئ المستزيد أفقه ويختبر تحصيله ويفيض. لقد أكثرنا منها ولم نتقشّف. يوفّر ذلك لكلّ واحد من الجمهور العريض المستهدف، بكافّة أصنافه المختلفة ومشاربه المتعدّدة، أينما كان موقعه في الجامعات أو المدارس العليا، معينا يغرف منه بقدر رغبته وقدرته وتوجّهه.

من نافلة القول الإقرار بأنّه ليس لهذا المسعى من غاية سوى المساهمة في إثراء مكتبات جامعاتنا خدمة لروّادها. لذا أملنا كبير في أن يستهوي المبتدئين من الدارسين ويحظى برضا المحترفين من المدرّسين.

أخيرا، يكون حريّا بي أن أعلن أنّه، أيّا كان حرصي على تقديم هذه الدروس تامّة من كلّ ناقصة ونقيّة من كلّ شائبة ونائية عن كلّ عاذلة، فإنّ أعين القرّاء مدعوّة لتتبّع كلّ واردة مطمسة وتقفّي كلّ مبهمة منفّرة واصطياد كلّ شاردة مشوّهة ... فبالتفافهم حولها يصلح أمرها ويستقيم عودها، وتغدو بعد ذلك للمستخدمين الحائرين منارة وملاذا.

المؤلّف

الفصل الأوّل
النهايات والاستمرار

1.1 الدوال $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$

سوف نسرد النتائج في حالتها العامة المتعلّقة بـ n متغيّرا تارة وتارة أخرى في شكلها الخاص المتعلّق بمتغيّرين. قد نقتصر عمليّا، إن على مستوى الأمثلة أو التمارين، على الدوال من متغيّرين أو ثلاثة. لن يكون عسيرا توسيع وتعميم النتائج المتحصّل عليها في هذا الإطار إلى عدد أكبر من المتغيّرات.

1.1.1 تعريف

ليكن n عددا طبيعيّا أكبر (من) أو يساوي 2. نسمّي دالّة ذات n متغيّرا حقيقيّا وذات قيم في $\mathbb{R}$ كلّ دالّة معرّفة من $\mathbb{R}^n$ أو جزء D من $\mathbb{R}^n$ نحو $\mathbb{R}$. هذه نماذج بسيطة منها في $n=2$ و $n=3$:

$$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto 5x+y-2,$$
$$(x,y) \mapsto e^{x+y}\sin xy,$$

$$f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$
$$(x,y,z) \mapsto Log(1+x^2+y^2+z^2),$$
$$(x,y,z) \mapsto \sqrt{1+x^2+y^2+z^2},$$

الخ ...

2.1.1 تعريف

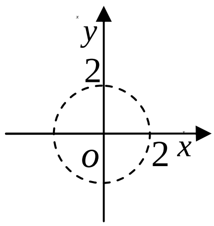
نسمّي ميدان تعريف دالّة $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ الجزء D_f من $\mathbb{R}^n$ المؤلّف من العناصر $x=(x_1,...,x_n)$ من $\mathbb{R}^n$ التي تحظى بصورة وفق f.

3.1.1 أمثلة

لنعيّن ميدان تعريف f في كلّ واحدة من الحالات التالية:

أ. $f(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2}$

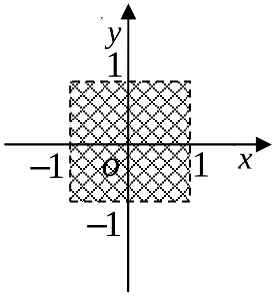
$$D_f=\left\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 \neq 0\right\}=\mathbb{R}^2 \setminus \left\{(0,0)\right\}.$$



ب. $f(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2-4}$

$$D_f=\left\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 \neq 4\right\}.$$

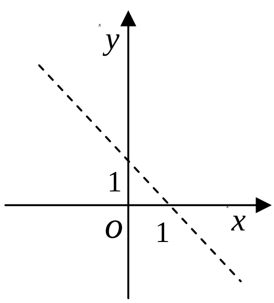
D_f هو المستوي المنزوعة منه الدائرة المتمركزة عند $(0,0)$ وذات نصف القطر 2.



ج. $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}}.$

$$D_f=\left\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 / |x|<1, |y|<1\right\}.$$

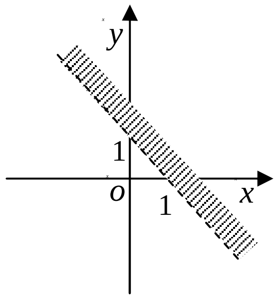
D_f هو الحيّز من المستوي المحاط بالمربّع المقابل.



د. $f(x,y)=\dfrac{1}{x+y-1}$

$$D_f=\left\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 / x+y-1\neq 0\right\}.$$

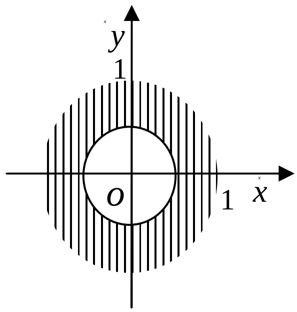
D_f هو المستوي من دون المستقيم ذي المعادلة $y=-x+1$.



ه. $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x+y-1}}$

$$D_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x+y-1>0\}.$$

D_f هو نصف المستوي العلويّ مبتورا من المستقيم ذي المعادلة $y=-x+1$.



و. $f(x,y)=x\,Log(x^2+y^2-1)$

$$D_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2-1>0\}.$$

D_f هو الحيّز من المستوي الواقع خارج دائرة الوحدة. إنّه متمّمة القرص المغلق المتمركز عند $(0,0)$ وذي نصف القطر 1.

4.1.1 تعريف

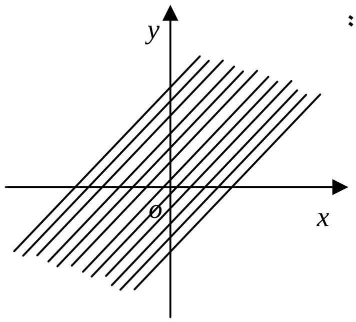
نسمّي **التمثيل البيانيّ** أو **المساحة التمثيليّة** لدالّة $f:A\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ مجموعة الثلاثيات $(x,y,f(x,y))$ حيث (x,y) يمسح A.

إذا كان k عددا حقيقيّا معطى، فإنّنا نسمّي **خطّا مستواه k** لـ f، المجموعة $L_k(f)$ المؤلّفة من العناصر (x,y) التي تحقّق $f(x,y)=k$. ونكتب:

$$L_k(f)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / f(x,y)=k\}=f^{-1}(\{k\}).$$

5.1.1 أمثلة

1) الخطوط المستواتيّة (أو السويّة) للدالّة:



$$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x,y)\mapsto f(x,y)=2y-3x$$

عبارة عن المستقيمات المتوازية المعطاة بـ:

$$2y-3x=k,$$

حيث k من $\mathbb{R}$. إنّها تشكّل تجزئة للمستوي.

2) لتكن الدالّة:

$$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x,y)\mapsto f(x,y)=y^2+x^2.$$

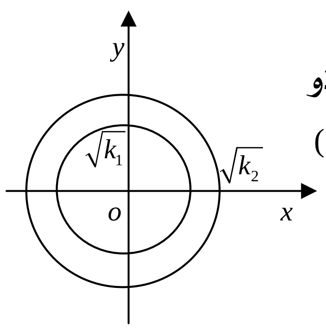
الخطوط المستواتيّة لهذه الدالّة معطاة بـ:

$$L_k(f)=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, y^2+x^2=k\right\},$$

حيث k من $\mathbb{R}$. لتعيينها نميّز الحالات الثلاث الممكنة التالية.

أ. إذا كان k سالبا فإنّ f لا تقبل أيّ خطّ مستواه k، أي $L_k(f)=\phi$.

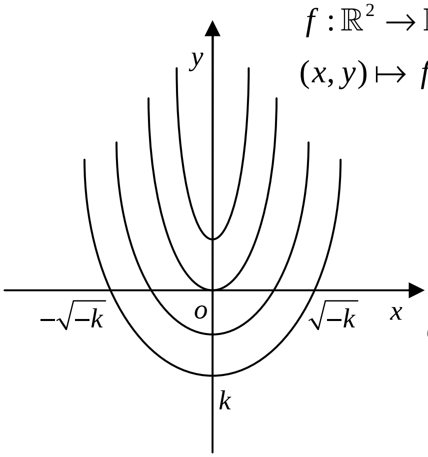
ب. إذا كان k معدوما كان $L_0(f)$ منحلاً إلى أحاديّة العنصر $\{(0,0)\}$.



ج. إذا كان k موجبا تماما كان الخطّ ذو المستوى k عبارة عن الدائرة التي مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها $\sqrt{k}$.

3) لتكن الدالّة:

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$$
$$(x,y)\mapsto f(x,y)=y-x^2.$$



الخطوط المستواتيّة لهذه الدالّة معطاة ب:

$$L_k(f)=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, y=x^2+k\right\},$$

حيث k **من** $\mathbb{R}$. $L_k(f)$ **عبارة عن قطع مكافئ رأسه** $(0,k)$ **ومحور تناظره هو محور التراتيب** $x=0$.

4) لتكن الدالّة:

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$$
$$(x,y)\mapsto f(x,y)=xy.$$

لنعيّن خطوطها المستواتيّة. لدينا:

$$f(x,y)=k \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x=0 \text{ أو } y=0 & ;\quad k=0,\\ y=\dfrac{k}{x} & ;\quad k\neq 0.\end{cases}$$

الخطوط المطلوبة هي محورا المعلم والقطع الزائدة ذات المعادلات $y=\dfrac{k}{x}$.

6.1.1 خصائص أساسيّة

1) **يكون الخطّ المستواتيّ** $L_k(f)$ **غير خال إذا وفقط إذا كان** k **من الصورة** $\operatorname{Im} f$:

$$L_k(f)\neq\phi \quad\Leftrightarrow\quad k\in\operatorname{Im} f$$

2) يكون خطّان $L_k(f)$ و $L_m(f)$ مستوياهما k و m غير متقاطعين إذا وفقط إذا كان k و m متمايزين:

$$k \neq m \quad \Leftrightarrow \quad L_k(f) \cap L_m(f) = \phi.$$

3) تشكّل جماعة الخطوط المستواتيّة $(L_k(f))_{k \in \operatorname{Im} f}$ الملحقة بمستوى k من الصورة $\operatorname{Im} f$ تجزئة لميدان تعريف الدالّة f :

$$A = \bigcup_{k \in \operatorname{Im} f} L_k(f).$$

لا يحتاج التأكّد من هذه الجزوم والزعوم سوى العودة إلى التعاريف المناسبة أعلاه. (تلهّ بها إن رغبت في ذلك أو دعها لمستقبل الأيّام، يستقيم فيها عودك !)

7.1.1 تعريف

ليكن p و n عددين طبيعيّين من $\mathbb{N}^*$. نسمّي دالّة $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ كلّ دالّة منطلقها $\mathbb{R}^n$ ومستقرّها $\mathbb{R}^p$ ، تربط كلّ نقطة $x = (x_1, ..., x_n)$ من $\mathbb{R}^n$ بشعاع $y = (y_1, ..., y_p)$ من $\mathbb{R}^p$.

نكتب عندئذ:

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$$
$$x \mapsto f(x) = y = \left(y_1 = f_1(x), y_2 = f_2(x), ..., y_p = f_p(x)\right).$$

تمثّل الدوال $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ، حيث i من $\{1, 2, ..., p\}$ ، مركّبات الدالّة الشعاعيّة f .

8.1.1 أمثلة

للدالّة:

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$$
$$(x,y)\mapsto f(x,y)=y=\left(2x+\frac{y}{2},3x-y,x-5y\right),$$

ثلاث مركّبات هي:

$$f_1(x,y)=2x+\frac{y}{2},\ f_2(x,y)=3x-y,\ f_3(x,y)=x-5y.$$

للدالّة:

$$g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$$
$$(x,y,z)\mapsto g(x,y,z)=\left(x+y+z,\frac{x-y}{y^2+z^2}\right),$$

مركّبتان هما:

$$g_1(x,y,z)=x+y+z,\quad g_2(x,y,z)=\frac{x-y}{y^2+z^2}.$$

9.1.1 تنبيه

إنّ كثيرا من التعاريف والخصائص الخاصّة بالدوال $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ التي مرّت بك من قبل تظلّ صحيحة ها هنا. نذكر على وجه الخصوص مفاهيم البيان والمقصور والمحدوديّة وعدمها والمقارنة في جوار نقطة، إلخ...

فلو اعتبرنا الدالّة:

$$f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$$
$$(x,y)\mapsto f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2},$$

وجدناها محدودة على $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$، ذلك لأنّ:

$$-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\le xy\le\frac{1}{2}(x^2+y^2),$$

وعليه:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},\ |f(x,y)| \leq \frac{1}{2}.$$

نرى هكذا أنّ الدالّة f محدودة على ميدان تعريفها.

إنّه حال الدالّة:

$$\begin{aligned} f : D_f \subset \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto f(x,y) = Arc\cos(x^2 + y^2 - 1), \end{aligned}$$

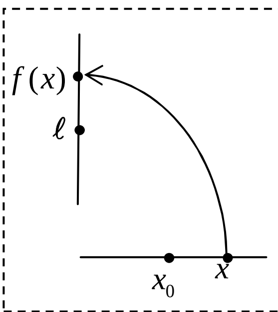
حيث D_f هو القرص:

$$.\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 2\}$$

2.1 البنية الطبولوجيّة للفضاء $\mathbb{R}^n$: النظيم

1.2.1 تنبيه

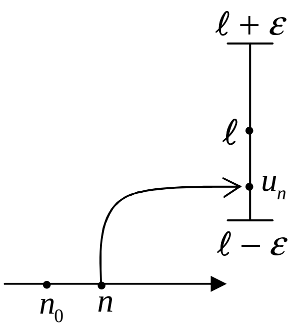
لو أعدت إلى الوراء في مخيلتك شريط دراستك السابقة للدوال الحقيقيّة ذات متغيّر واحد ونظرت فيها بإمعان وخصوصا ما يمتّ بصلة إلى نهاياتها واستمرارها واشتقاقها، لبرز إليك ارتباطها الوثيق بأداتين أساسيّتين لا غنى عنها البتّة. إنّهما المجال (المفتوح على الوجه الأخصّ) والقيمة المطلقة. فإن كانت أهمية المجال بالغة من حيث كونه المحل



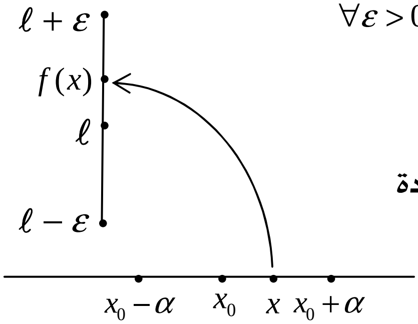
الهندسيّ المسيطر في "حياة" المفاهيم المذكورة، يمثّل **الجوار**، إلاّ أنّ القيمة المطلقة لا تقلّ أهميّة منه لكونها " اللباس التحليليّ " له، تنوب عنه في التعبير عن المفاهيم من خلال صور أكثر بساطة وعملية.

لقد أظهرنا لك ذلك في الدفاتر الأربعة الأولى، إذ كتبنا في حالة تمتّع متتالية حقيقيّة $(u_n)_n$ بنهاية ℓ :

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N} :$$
$$n > n_0 \ \Rightarrow\ |u_n - \ell| < \varepsilon.$$



وبخصوص قبول دالّة $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ لنهاية ℓ كتبنا عند نقطة X_O :



$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \alpha(\varepsilon, x_0) > 0 / \forall x \in D_f :$$
$$|x - x_0| \le \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

تكاد تنحصر دراسة الدوال المتعدّدة المتغيّرات، فحوى الكرّاس الحالي برمّته، في السيطرة على الأداتين اللتين تقومان مقامهما هنا. إنّهما النظيم والكرة. سوف تختصر مصاعبك إلى أقصاها إن هضمتهما. لا تعدو الأمور في معظمها أن تكون استحضارا لروح التعريف التي لقّنتها في ما مضى من دراستك بشأن الدوال $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ واستبدال القيمة المطلقة بالنظيم ...

2.2.1 تعريف

نسمّي نظيما على $\mathbb{R}^n$ كلّ تطبيق φ من $\mathbb{R}^n$ نحو $\mathbb{R}_+$ يحقّق الشروط الثلاثة التالية:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \varphi(x) = 0 \Rightarrow x = 0. \quad [\text{ش}_1]$$
$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \varphi(\lambda x) = |\lambda| \varphi(x), \quad [\text{ش}_2]$$
$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall y \in \mathbb{R}^n \quad \varphi(x+y) \le \varphi(x) + \varphi(y). \quad [\text{ش}_3]$$

من أجل كلّ عنصر x من $\mathbb{R}^n$ نكتب $\|x\| = \varphi(x)$، ونسمّي الزوج $(\mathbb{R}^n, \|.\|)$ فضاء نظيميّا. يقال عن [ش1] إنّه شرط الفصل وعن [ش2] إنّه شرط التجانس وعن [ش3] إنّه شرط متباينة المثلّث، أو المتباينة المثلّثيّة.

3.2.1 أمثلة

1) القيمة المطلقة نظيم على $\mathbb{R}$.

إنّها تحقّق بجلاء الشروط الثلاثة أعلاه.

2) التطبيق:

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto \varphi(x,y) = |x| + |y|,$$

نظيم على $\mathbb{R}^2$.

3) التطبيقان :

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto |x-y|,$$
$$\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto |x+y|,$$

ليسا نظيمين على $\mathbb{R}^2$. إنّهما لا يحقّقان شرط المطابقة. بخصوص الأوّل، لدينا على سبيل المثال، $0 = |1-1| = \|(1,1)\|$ مع أنّ $(1,1) \neq (0,0)$ وبشأن الثاني لدينا مثلا، $0 = |1-1| = \|(1,-1)\|$ مع أنّ $(1,-1) \neq (0,0)$.

4.2.1 قضية

إذا كان $(\mathbb{R}^n, \|.\|)$ فضاء نظيميّا فإنّ:

1) $\|0\| = 0,$

2) $\forall\ x,y \in \mathbb{R}^n \quad \|x-y\| = \|y-x\|,$

3) $\forall\ x,y \in \mathbb{R}^n \quad \big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x-y\|.$

إثبات

1) ليكن λ عنصرا من $\mathbb{R}$، لا تساوي طويلته 1. لدينا $0 = \lambda.0$. وبمقتضى شرط التجانس [ش2] يأتي:

$$\|0\| = \|\lambda.0\| = |\lambda|.\|0\|.$$

ومنه:

$$\|0\|\left(1-|\lambda|\right) = 0,$$

إذن، $\|0\| = 0$.

2) من أجل كلّ x و y من E **يكون لدينا:**

$$\|x-y\| = \|-(y-x)\| = |-1|\ \|y-x\| = \|y-x\|.$$

3) **لنكتب:**

$$y = y-x+x \quad \Rightarrow \quad \|y\| = \|y-x+x\| \leq \|y-x\| + \|x\|.$$

ومنه:

$$\|y\| - \|x\| \leq \|x-y\|. \qquad (*)$$

وبالمثل لدينا:

$$x = x-y+y \quad \Rightarrow \quad \|x\| = \|x-y+y\| \leq \|x-y\| + \|y\|.$$

ومنه:

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|. \qquad (**)$$

وإذا أقرنّا النتيجتين (*) و(**) حصلنا على المطلوب.

5.2.1 ملحوظة

يمكن في الواقع إنشاء عدّة نظيمات، وبطرق شتّى، على $\mathbb{R}^n$ ، يجعل كلّ واحد منها $\mathbb{R}^n$ فضاء نظيميّا. فعلى سبيل المثال، نرى أنّه إذا كان N_1 و N_1 نظيمين على $\mathbb{R}^n$ فإنّه من أجل كلّ $0 \leq \alpha$ و $0 \leq \beta$ يكون $N = \alpha N_1 + \beta N_2$ نظيما جديدا على $\mathbb{R}^n$. في هذا الصدد نسرد:

6.2.1 أمثلة

النظيمات الأساسيّة على $\mathbb{R}^n$

إذا كان x عنصرا من $\mathbb{R}^n$، مركّباته x_1 و x_2 و ... و x_n وضعنا:

أ. $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|,$

ب. $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}},$

ج. $\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|.$

هذه العبارات تعرّف نظيمات على $\mathbb{R}^n$.

يدعى النظيم $\|.\|_2$ بالنظيم الإقليديّ[9]، بينما يدعى النظيم $\|.\|_\infty$ بنظيم التقارب المنتظم.

من السهل التأكّد بحساب مباشر، من أنّ التطبيقين الواردين في (أ) و(ج) نظيمان؛ في حين يتطلّب تبيان المتباينة المثلّثيّة [ش3] بخصوص (د) (وبالتالي (ب)) اللجوء إلى متباينة أساسيّة محمولة في التمرين الخامس المحلول. يستند برهان هذه الأخيرة بدورها إلى متباينتين شهيرتين تجد تفصيلهما في التمرينين المحلولين الثالث والرابع.

7.2.1 نتيجة

كلّ من النظيمات الثلاثة يحقّق هذه النتيجة الواضحة والهامّة:

$$\forall x = (x_1, x_n, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \ \ |x_i| \le \|x\|, \ \ \forall i = 1, 2, ..., n.$$

9. Euclide : رياضيّاتيّ إغريقيّ. ولد في حوالي 325 ومات حوالي 265 قبل الميلاد بالاسكندريّة. هو أكبر رياضيّاتيّي العصر القديم. اشتهر بمؤلّفه "العناصر" الذي أهلّه بحقّ لأن يكون معلّم الرياضيّات لكلّ الأوقات.

3.1 البنية الطبولوجية للفضاء $\mathbb{R}^n$: الجوار

بعد ما عثرنا على النظيم في دور الأداة التي تلعب دور القيمة المطلقة نسعى الآن في المقطع الحاضر إلى الظفر بمفهوم الكرة الذي يقوم مقام المجال. نحتفظ بالرمز $\|.\|$ لنظيم ما على $\mathbb{R}^n$ ما لم نضطر إلى تخصيصه.

1.3.1 تعريف

ليكن a عنصرا من الفضاء النظيميّ $\left(\mathbb{R}^n, \|.\|\right)$ و r عددا من $\mathbb{R}_+^*$.

نسمّي كرة مفتوحة، مركزها a ونصف قطرها r، الجزء المرموز له بـ $B(a,r)$ والمعرّف بـ:

$$B(a,r)=\left\{x\in E : \|a-x\|<r\right\}.$$

إذا كان $a=0$ و $r=1$ قيل عن $B(0,1)$ إنّها كرة الوحدة المفتوحة.

نسمّي **كرة مغلقة**، مركزها a ونصف قطرها r، الجزء المرموز له بـ $B_f(a,r)$ والمعرّف بـ:

$$B_f(a,r)=\left\{x\in E : \|a-x\|\le r\right\}.$$

إذا كان $a=0$ و $r=1$ قيل عن $B_f(0,1)$ إنّها كرة الوحدة المغلقة.

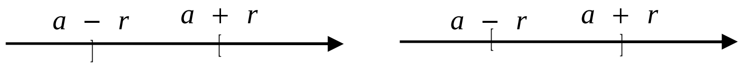
نسمّي غلافا كرويّا، مركزه a ونصف قطره r، الجزء المرموز له بـ $S(a,r)$ والمعرّف بـ:

$$S(a,r)=\left\{x\in \mathbb{R}^n / \|x-a\|=r\right\}.$$

2.3.1 أمثلة

1) في $\mathbb{R}$، تتساوى النظيمات الأساسيّة الثلاث المذكورة آنفا ويكون لدينا:

$$B(a,r)=\left]a-r,a+r\right[;\ B_f(a,r)=\left[a-r,a+r\right];$$



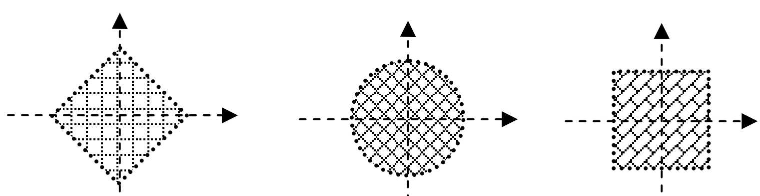
$B(0,1)$ $\qquad$ $B_f(0,1)$

2) **لنمثّل هندسيّا كرات الوحدة** $B_f^1(0,1)$ و $B_f^2(0,1)$ و $B_f^\infty(0,1)$ في $\mathbb{R}^2$ **الذي نزوّده بالنظيمات الأساسيّة** $\|.\|_1$ و $\|.\|_2$ و $\|.\|_\infty$ **على الترتيب. نحصل على:**

$$\begin{aligned}
B_f^1(0,1) &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / |x|+|y|\le 1\right\}\\
&= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x+y\le 1;\ \ x\ge 0, y\ge 0\right\}\cup\\
&\quad \cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / -x-y\le 1;\ \ x\le 0, y\le 0\right\}\\
&\quad \cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / -x+y\le 1;\ \ x\le 0, y\ge 0\right\}\\
&\quad \cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x-y\le 1;\ \ x\ge 0, y\le 0\right\}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_f^2(0,1) &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / \sqrt{x^2+y^2}\le 1\right\}\\
&= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2\le 1\right\}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_f^\infty(0,1) &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / Max\left(|x|,|y|\right)\le 1\right\}\\
&= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / |x|\le 1;\ |y|\le 1\right\}\\
&= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / -1\le x\le 1;\ -1\le y\le 1\right\}
\end{aligned}$$



$B_f^1(0,1)$ $\qquad$ $B_f^2(0,1)$ $\qquad$ $B_f^\infty(0,1)$

نقوم حاليا باستعراض جملة من التعاريف والخصائص والتمييزات. إن هضمتها وقبلتها بعد قراءة متمعّنة أو قراءتين فبها ونعمت وإلاّ فاكتف بحصر اهتمامك في ما تتضمّنه النتيجة الواردة في الملحوظة 6.3.1 **أدناه.**

إنّها كافية للتصدّي للمفاهيم المقبلة وتغنيك عن غيرها على مدار هذا الكرّاس ...

3.3.1 تعريف

ليكن a عنصرا من $\left(\mathbb{R}^n,\|.\|\right)$. نسمّي جوارا لـ a كلّ جزء V_a من $\mathbb{R}^n$ يحوي كرة مفتوحة متمركزة عند a. ونكتب:

V_a جوار لـــ a $\quad\Leftrightarrow\quad \exists r>0 / B(a,r)\subset V_a$

4.3.1 قضية

ليكن a عنصرا من $\left(\mathbb{R}^n,\|.\|\right)$.

1) كلّ كرة مفتوحة متمركزة عند a جوار لـ a.

2) كلّ جوار كيفيّ V_a لـــ a يحتوي جوارا مفتوحا U_a لـــ a.

إثبات

1) يكفي أخذ $B(a,r)=V_a$.

2) يكفي أخذ $B(a,r)=U_a$.

5.3.1 نتيجة

كلّ جوار كيفيّ V_a لـ a من $\left(\mathbb{R}^n,\|.\|\right)$ يحتوي جوارا على شكل كرة مفتوحة.

نقول والحال هذه بأنّ عائلة الكرات المفتوحة المتمركزة عند a تشكّل جملة أساسيّة لجوارات a.

6.3.1 ملحوظة

سوف نختصر، دونما مسّ بعمومية التعاريف والنتائج اللاحقة، مفهوم الجوار لنقطة ما a من $\left(\mathbb{R}^n,\|.\|\right)$ في كرة مفتوحة مركزها a.

4.1 البنية الطبولوجيّة للفضاء $\mathbb{R}^n$: تكافؤ النظيمات

1.4.1 تنبيه

تتوخّى هذه الفقرة طمأنتك حول الحيرة التي تكون قد انتابتك بشأن تعدّد النظيمات واختلافها وتساؤلك عن أيّ نظيم يختار لإنابته عن القيمة المطلقة وقد أريناك تواجد عدد غير منته من النظيمات الممكنة، وأيّة كرة مفتوحة تعوّض المجال كما زعمنا ونحن سقنا لك على الأقل ثلاثة أنماط منها وغيرها كثير لم نبده لك. توضّح هذه الفقرة أنّ النظيمات على $\mathbb{R}^n$ ، حتى وإن تعدّدت وتنوّعت، تؤدّي دورا واحدا مشتركا. وبعبارة أوضح، تظلّ كلّ نتيجة محصّل عليها بخصوص النهايات والاستمرار والمفاضلة على الوجه الأخص، إزاء إحداها صحيحة إزاء كلّ نظيم آخر.

2.4.1 تعريف

نقول عن نظيمين N_1 و N_2 على $\mathbb{R}^n$ إنّهما متكافئان إذا وجد عددان موجبان α و β بحيث $\alpha < \beta$ و:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x).$$

3.4.1 نتيجة

القراءة الهندسيّة للنتيجة المحمولة في القضية أعلاه تفيد أنّ تكافؤ نظيمين N_1 و N_2 في $\mathbb{R}^n$ يعني أنّ كلّ كرة مفتوحة متمركزة عند نقطة a إزاء أحدهما تحوي كرة مفتوحة متمركزة عند a إزاء الأخرى.

وبالفعل، إذا كان a عنصرا من E و $0<\rho$ حصلنا بكلّ وضوح على:

$$B_{d'}\left(a,\frac{\rho}{\beta}\right)\subset B_d(a,\rho)\subset B_{d'}\left(a,\frac{\rho}{\alpha}\right);$$

وهو ما يضمن التكافؤ المعلن.

4.4.1 قضية

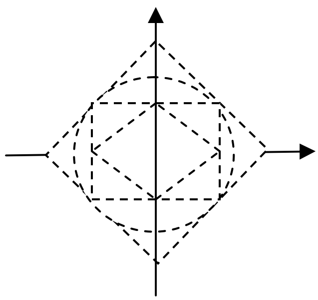
النظيمات الأساسيّة الثلاثة على $\mathbb{R}^n$ متكافئة.

إثبات

من أجل كلّ x من $\mathbb{R}^n$ لدينا هذه العلاقات التي لا أخالك تشقى في تبيانها:

$$\|x\|_2 \le \|x\|_1 \le \sqrt{n}\,\|x\|_2\,,$$
$$\|x\|_\infty \le \|x\|_1 \le n\|x\|_\infty\,,$$
$$\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \sqrt{n}\,\|x\|_\infty\,.$$

وفي الحالة $n=2$ ، لدينا هندسيّا هذا الرسم الذي يظهر احتواء كلّ كرة مفتوحة إزاء أحد النظيمات لكرة مفتوحة إزاء أحد النظيمين الباقيّين، وهذا كفيل بجعلها متكافئة.



5.1 المتتاليات في $\mathbb{R}^p$: عموميات

1.5.1 تعريف

نسمّي متتالية في $\mathbb{R}^2$ كلّ تطبيق u من $\mathbb{N}$ نحو $\mathbb{R}^2$:

$$u:\mathbb{N}\to\mathbb{R}^2$$
$$n\mapsto u(n)=\big(u_1(n),u_2(n)\big).$$

نرمز لها كما هو مألوف في المتتاليات العدديّة بـ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ أو $(u_n)_n$ أو (u_n) (إذا لم تلزم دواعي تعريفيّة التدقيق في ميدان تعريف المتتالية). غير أنّه ينبغي علينا هنا أخذ الحيطة من تعدّد الدلائل. فللمتتالية الشعاعيّة (u_n) مركّبتان: $(u_1(n))$ و $(u_2(n))$، كلّ واحدة منهما متتالية عدديّة. سوف نتّخذ لهما على مدار الدفتر الحاضر الترميزة : (u_n^i) حيث i من $\{1,2\}$. فنكتب:

$$(u_n)=\big((u_n^1,u_n^2)\big).$$

يمكن بطبيعة الحال أن نعمّم هذا التعريف دونما صعوبة إلى حالة $\mathbb{R}^p$، حيث p عدد طبيعيّ يفوق 2.

2.5.1 تعريف

نسمّي متتالية في $\mathbb{R}^p$ كلّ تطبيق u من $\mathbb{N}$ نحو $\mathbb{R}^p$.

من أجل كلّ دليل طبيعيّ مثبّت n يكون الحدّ u_n عنصرا من $\mathbb{R}^p$. إنّه يقبل p مركّبة $u_n=\left(u_n^1,u_n^2,...,u_n^p\right)$. فالعدد u_n^i هو المركّبة ذات الدليل i للحدّ ذي الرتبة n من المتتالية (u_n). نضعها في الأخير تحت الشكل الذي سبق وصفه:

$$(u_n)=\big((u_n^1,u_n^2,...,u_n^p)\big).$$

3.5.1 أمثلة

$(u_n)=\left(n^2,2n+1\right)$ متتالية من $\mathbb{R}^2$ و $u_{10}=\left(100,21\right)$ هو العنصر العاشر منها؛

$(u_n)=\left(\sin n,\dfrac{1}{n},e^n\right)$ متتالية من $\mathbb{R}^3$ و $u_8=\left(\sin 8,\dfrac{1}{8},e^8\right)$ هو العنصر الثامن منها؛

$(u_n)=\left(\dfrac{n-1}{n+1},(-1)^n,\dfrac{1}{shn},n^2\right)$ متتالية من $\mathbb{R}^4$ و $u_5=\left(\dfrac{2}{3},-1,\dfrac{1}{sh5},25\right)$ هو العنصر الخامس منها.

4.5.1 تعريف

نقول عن متتالية (u_n) من $\left(\mathbb{R}^2,\|.\|\right)$ إنّها تتقارب نحو عنصر $\ell=(\ell_1,\ell_2)$ من $\mathbb{R}^2$، أو والأمر سيّان، إنّ العنصر $\ell=(\ell_1,\ell_2)$ من $\mathbb{R}^2$ نهاية للمتتالية (u_n) عندما يؤول n إلى $+\infty$ إذا تحقّق الشرط:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}/\forall n\in\mathbb{N}: n\geq n_0 \quad\Rightarrow\quad \|u_n-\ell\|<\varepsilon.$$

ونكتب اختصارا:

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\ell.$$

إن انتفت هذه الخاصية قلنا عن المتتالية إنّها متباعدة.

5.5.1 ملحوظة

هذا التعريف قائم وصالح أيّا كان النظيم المختار، إلاّ أنّنا في الواقع لا نحيد عمليّا عن استخدام أحد النظيمات الأساسيّة الثلاثة على $\mathbb{R}^2$ المذكورة آنفا.

6.5.1 أمثلة

1) المتتالية $u_n=\left(\frac{1}{n},\frac{n}{n+1}\right)$ تتقارب نحو $(0,1)$ في $\left(\mathbb{R}^2,\|.\|_1\right)$. وفعلا، إذا كان $\varepsilon>0$ كتبنا:

$$\|u_n-(0,1)\|_1=\left\|\frac{1}{n},\frac{n}{n+1}-1\right\|_1=\left\|\frac{1}{n},\frac{-1}{n+1}\right\|_1=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\leq\frac{2}{n}\leq\varepsilon.$$

وعليه، يكفي أخذ $n_0=\left[\frac{2}{\varepsilon}\right]+1$. (رمزنا بـ $[.]$ للجزء الصحيح).

2) المتتالية ذات الحدّ العام $u_n=\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right),Log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$ تتقارب نحو $(0,0)$ في $\left(\mathbb{R}^2,\|.\|_\infty\right)$.

وفعلا، إذا كان $\varepsilon>0$ كتبنا:

$$\begin{aligned}\|u_n-(0,0)\|_\infty&=\left\|\sin\left(\frac{1}{n}\right),Log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\|_\infty\\&=\sup\left(\left|\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right|,\left|Log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right|\right)\leq\frac{1}{n}\leq\varepsilon.\end{aligned}$$

وعليه، يكفي أخذ $n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$.

3) المتتالية ذات الحدّ العام $u_n=\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}},\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)$ تتقارب نحو $(0,0)$ في $\left(\mathbb{R}^2,\|.\|_2\right)$.

وفعلا، إذا كان $\varepsilon>0$ كتبنا:

$$\|u_n-(0,0)\|_2=\left\|\frac{1}{\sqrt{n+1}},\frac{1}{\sqrt{n+2}}\right\|_2=\sqrt{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}}<\sqrt{\frac{2}{n}}\leq\varepsilon;$$

وعليه، يكفي أخذ $n_0 = \left[\dfrac{2}{\varepsilon^2}\right]+1$.

ملحوظة

أعد معالجة هذه الأمثلة مبادلا النظيمات.

4) المتتالية $u_n = \left((-1)^n, 2\right)$ متباعدة في $\left(\mathbb{R}^2, \|.\|_1\right)$. وبالفعل، لو تقاربت هذه المتتالية نحو نهاية $\ell = (\ell_1, \ell_2)$ لضمنّا من أجل كلّ عدد $\varepsilon > 0$ وجود رتبة $n_0(\varepsilon)$ بحيث:

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad \|u_n - \ell\|_1 = \left|(-1)^n - \ell_1\right| + \left|2 - \ell_2\right| < \varepsilon. \qquad (*)$$

ولكن هذه العلاقة لا يمكنها أن تقوم على الدوام إذ لدينا:

$$\left|(-1)^n - \ell_1\right| + \left|2 - \ell_2\right| \geq \left|1 - |\ell_1|\right| + \left|2 - |\ell_2|\right| \geq \left|1 - |\ell_1|\right|;$$

ممّا يضمن انتفاء صحّة العلاقة من أجل كلّ ε مأخوذ من المجال $\left]0, \left|1 - |\ell_1|\right|\right[$. (لاحظ أنّ ℓ_1 لا يمكنه أخذ القيمتين ± 1. فالحدّ الثاني الوارد في مجموع العلاقة $(*)$ يأخذ القيمة 2 ممّا يعيق قيام $(*)$).

إذا استعصى عليك هضم هذا التبرير فلك في أولى النتائج الموالية خير معين.

6.1 المتتاليات في $\mathbb{R}^p$: نتائج أساسيّة

1.6.1 قضية

تتقارب المتتالية $(u_n)=\left((u_n^1,u_n^2)\right)$ من $\left(\mathbb{R}^2,\|.\|\right)$ نحو عنصر $\ell=(\ell_1,\ell_2)$ إذا وفقط إذا تقاربت كلّ واحدة من المتتاليتين المركّبتين (u_n^1) و (u_n^2) نحو ℓ_1 و ℓ_2 على الترتيب في $\left(\mathbb{R},|.|\right)$. ونكتب:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n=\ell=(\ell_1,\ell_2) \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^1=\ell_1,\\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n^2=\ell_2.\end{cases}$$

إثبات

نسوق البرهان مستخدمين النظيم الأساسيّ $\|.\|_\infty$. لن نكلّ في التنبيه إلى بقاء النتيجة قائمة في ظلّ أيّ نظيم آخر، بموجب التكافؤ الوارد ذكره آنفا.

لزوم الشرط

إذا تقاربت نحو $(u_n)=\left((u_n^1,u_n^2)\right)$ من $\left(\mathbb{R}^2,\|.\|_\infty\right)$ نحو نهاية $\ell=(\ell_1,\ell_2)$ كتبنا:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}/\forall n\in\mathbb{N}:$$
$$n\ge n_0 \ \Rightarrow\ \|u_n-\ell\|_\infty=\max\left(\left|u_n^1-\ell_1\right|,\left|u_n^2-\ell_2\right|\right)<\varepsilon.$$

وعليه:

$$n\ge n_0 \ \Rightarrow\ \begin{cases}\left|u_n^1-\ell_1\right|<\varepsilon,\\ \left|u_n^2-\ell_2\right|<\varepsilon;\end{cases}$$

وهو ما يفيد تقارب المتتاليتين المركّبتين (u_n^1) و (u_n^2) نحو ℓ_1 و ℓ_2 على التوالي.

كفاية الشرط

لنفترض أنّ المتتاليتين المركّبتين (u_n^1) و (u_n^2) تتقاربان في $(\mathbb{R},|.|)$ نحو ℓ_1 و ℓ_2 على التوالي. نترجم ذلك تعريفا بـ:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \ \Rightarrow\ \left|u_n^1 - \ell_1\right| < \varepsilon,$$
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_1 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_1 \ \Rightarrow\ \left|u_n^2 - \ell_2\right| < \varepsilon.$$

وإذا ما أخذنا $n_2 = \max(n_0, n_1)$ جاءنا توّا:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_2 = \max(n_0, n_1) \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N} :$$
$$n \geq n_2 \ \Rightarrow\ \max\left(\left|u_n^1 - \ell_1\right|, \left|u_n^2 - \ell_2\right|\right) = \left\|u_n - \ell\right\|_\infty < \varepsilon;$$

وهو ما يفيد تقارب المتتالية الشعاعيّة $(u_n) = \left((u_n^1, u_n^2)\right)$ من $\left(\mathbb{R}^2, \|.\|_\infty\right)$ نحو $\ell = (\ell_1, \ell_2)$.

إذا عدنا إلى الأمثلة السابقة جاءنا على ضوء هذه القضية توّا أنّ:

المتتالية $\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{n}{n+1}\right)_n$ تتقارب في $\left(\mathbb{R}^2, \|.\|_1\right)$ نحو $(0,1)$ لأنّ مركّبتيها $\left(\dfrac{1}{n}\right)_n$ و $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)_n$ تتقاربان في $(\mathbb{R},|.|)$ نحو 0 و 1 على التوالي؛

المتتالية $\left(\sin\left(\dfrac{1}{n}\right), Log\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right)_n$ تتقارب في $\left(\mathbb{R}^2, \|.\|_\infty\right)$ نحو $(0,0)$ لأنّ مركّبتيها $\left(\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)_n$ و $\left(Log\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right)_n$ تتقاربان في $(\mathbb{R},|.|)$ نحو الصفر؛

المتتالية $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}, \dfrac{1}{\sqrt{n-1}}\right)_n$ تتقارب في $\left(\mathbb{R}^2, \|.\|_2\right)$ نحو $(0,0)$ لأنّ مركّبتيها $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)_n$ و $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n-1}}\right)_n$ تتقاربان في $(\mathbb{R},|.|)$ نحو الصفر؛

المتتالية $\left((-1)^n, 2\right)_n$ متباعدة في $\left(\mathbb{R}^2, \|.\|_1\right)$ لأنّ مركّبتها الأولى $\left((-1)^n\right)_n$ متباعدة في $(\mathbb{R},|.|)$.

يمكن أن نعمّم هذه النتائج دونما عناء إلى متتاليات $\mathbb{R}^p$ ؛ فنكتب:

2.6.1 تعريف

نقول عن متتالية (u_n) من $\left(\mathbb{R}^p, \|.\|\right)$ إنّها تتقارب نحو عنصر $\ell = (\ell_1, ..., \ell_p)$ من $\mathbb{R}^p$ ، أو والأمر سيّان، إنّ العنصر $\ell = (\ell_1, ..., \ell_p)$ من $\mathbb{R}^p$ نهاية للمتتالية (u_n) عندما يؤول n إلى $+\infty$ إذا تحقّق الشرط:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad \|u_n - \ell\| < \varepsilon.$$

ونكتب اختصارا كالعادة:

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell.$$

3.6.1 قضية

تتقارب المتتالية $(u_n) = (u_n^1, u_n^2, ..., u_n^p)_n$ من $\left(\mathbb{R}^p, \|.\|\right)$ نحو عنصر $\ell = (\ell_1, \ell_2, ..., \ell_p)$ إذا وفقط إذا تقاربت كلّ المتتاليات المركّبات $(u_n^1)_n$ و $(u_n^2)_n$ و ... و $(u_n^p)_n$ نحو ℓ_1 و ℓ_2 و ... و ℓ_p على الترتيب في $\left(\mathbb{R}, |.|\right)$.

ونكتب اختصارا:

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n \to +\infty} u_n^i = \ell_i ; \; i = 1, 2, ..., p$$

إثبات

لا يخرج قيد أنملة عن ذاك الذي سقناه أعلاه.

سوف نعتمد طريقة سرد المفاهيم المضارعة إمّا في الحالة الخاصّة $\mathbb{R}^2$ أو العامّة $\mathbb{R}^p$. لا أخالك تضيع أو تضلّ أبدا. يمكنك الانتقال من هذا إلى ذاك دون مشقّة أو عسر.

4.6.1 ملحوظة

كلّ النتائج الأساسيّة الخاصّة بالمتتاليات الحقيقيّة المتقاربة تظلّ صحيحة ها هنا شكلا ومضمونا وبرهانا. نذكر على وجه الخصوص

المبرهنات المتعلّقة بوحدانية النهاية والمحدوديّة والعمليات الحسابيّة والمتتاليات الكوشيّة[10] و... إلخ.

ومع ذلك، نرى أن نقف معك مجدّدا عند مفهوم المتتالية الكوشيّة لعلّ هذا يدعّم فهمك وييسّر هضمك ويبدّد شكوكك !!!.

5.6.1 تعريف

نقول عن متتالية $(u_n)=(u_n^1,u_n^2,...,u_n^p)_n$ من $\left(\mathbb{R}^p,\|.\|\right)$ إنّها كوشيّة (أو لكوشي)، إذا وفقط إذا حققّت:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}/\forall(r,s)\in\mathbb{N}^2: r>s\geq n_0\ \Rightarrow\ \|u_r-u_s\|\leq\varepsilon.$$

6.6.1 مبرهنة

تكون متتالية $(u_n)=(u_n^1,u_n^2,...,u_n^p)_n$ من $\left(\mathbb{R}^p,\|.\|\right)$ متقاربة إذا وفقط إذا كانت كوشيّة.

إثبات

لزوم الشرط

لنفترض أنّ (u_n) متقاربة نحو عنصر ℓ من $\mathbb{R}^p$. نكتب تعريفا:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}/\forall n\in\mathbb{N}: n\geq n_0\ \Rightarrow\ \|u_n-\ell\|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

ليكن الآن r و s عددين طبيعيّين بحيث $r>s\geq n_0$. نكتب بجلاء:

$$\|u_r-u_s\|=\|u_r-\ell+\ell-u_s\|\leq\|u_r-\ell\|+\|u_s-\ell\|<\varepsilon;$$

10. Augustin Louis Cauchy: رياضياتيّ فرنسيّ. ولد في 21 أوت 1789 بباريس ومات في 23 ماي 1857 بصو. يعتبر الرياضيّاتيّ الفرنسيّ الأغزر إنتاجا. تنطوي أعماله العلميّة على أزيد من 800 بحثا في مواضيع متنوّعة في الرياضيّات والفيزياء. له باع طويل في تأسيس التحليل الرياضيّاتيّ الحديث.

وهو ما يفيد أنّ المتتالية (u_n) كوشيّة.

كفاية الشرط

لتكن $(u_n)_n$ متتالية كوشيّة من $\left(\mathbb{R}^p, \|.\|\right)$. مادامت النظيمات متكافئة على $\mathbb{R}^p$ فإنّه لا ضير في اختيار أحد منها بعينها. لنأخذ إذن $\|.\| = \|.\|_1$ على سبيل المثال، لا الحصر. نكتب عندئذ:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ / \forall r, s \in \mathbb{N}:$$

$$r > s \geq n_0 \ \Rightarrow \|u_r - u_s\|_1 = \sum_{i=1}^{p} \left|u_r^i - u_s^i\right| \leq \varepsilon.$$

نستخلص أنّه من أجل كلّ دليل i من $\{1, 2, ..., p\}$ تكون المتتالية $(u_n^i)_n$ كوشيّة في $\left(\mathbb{R}, |.|\right)$ التام. إنّها تتقارب نحو نهاية نرمز لها بـ $\ell^{(i)}$.

نكتب بهذا الشأن:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ n_0^i(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ / \forall n \in \mathbb{N}: n \geq n_0^i \ \Rightarrow \ \left|u_n^i - \ell^i\right| \leq \frac{\varepsilon}{p}.$$

وبوضع $n_0 = \max_{1 \leq i \leq p} n_0^i$ يأتي:

$$\forall n \in \mathbb{N}: \ n \geq n_0 \ \Rightarrow \|u_n - \ell\|_1 = \sum_{i=1}^{p} \left|u_n^i - \ell^i\right| \leq \varepsilon;$$

نستنتج هكذا أنّ متتاليتنا $(u_n)_n$ متقاربة نحو $\ell = (\ell^1, \ell^2, ..., \ell^P)$.

و.هـ.م

6.1. نتيجة

$\left(\mathbb{R}^p, \|.\|\right)$ فضاء نظيميّ تام: إنّه فضاء بناخيّ[11].

إنّها مضمون كفاية الشرط.

---

11. Stefan Banach : رياضيّاتيّ بولونيّ. ولد في 30 مارس 1892 بكراكوف ومات في 31 أوت 1945 بلفوف. ناقش رسالة الدكتوراه حول نظرية القياس. قام عام 1920 بوضع مسلّمات ما يعرف الآن بفضاءات بناخ.

8.6.1 مبرهنة (بيكار[12]ـــ بناخ).

لكلّ دالّة مقلّصة $f:\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ نقطة صامدة وحيدة.

نـدوّن في مـا يلـي نتيجـة طالما أفادتنـا في دراسـة المتتاليـات الحقيقيّـة موضوع الدفتر الثاني، وهي:

9.6.1 مبرهنة (بولزانو[13]ـــ فيرشتراس[14])

من كلّ متتالية محدودة $(u_n)=(u_n^1,u_n^2,...,u_n^p)_n$ من $\left(\mathbb{R}^p,\|.\|\right)$ يمكن أن نستخرج متتالية جزئيّة متقاربة.

10.6.1 تعريف

نقول عن جزء A من $\left(\mathbb{R}^n,\|.\|\right)$ إنّه متراص إذا أمكن أن نستخرج من كلّ متتالية من A متتالية متقاربة في A.

11.6.1 مبرهنة

يكون جزء A من $\mathbb{R}^n$ متراصّا إذا وفقط إذا كان مغلقا ومحدودا.

---

12. Charles Emile Picard : رياضيّاتيّ فرنسيّ. ولد في 24 جويلية (1856) بباريس ومات في 11 ديسمبر 1941 بباريس. هو خريج المدرسة العليا للأساتذة الباريسيّة الشهيرة. له إسهامات عديدة في نظرية الدوال والمعادلات التفاضليّة والهندسة التحليليّة.

13. Bernhard Bolzano : رياضيّاتيّ وفيلسوف تشيكيّ، ألمانيّ اللغة. ولد في 5 أكتوبر 1781 ببراغ ومات بها في 18 ديسمبر 1848. اشتغل أساسا في الدوال والمنطق ونظرية الأعداد.

14. Karl Theodor Weierstrass : رياضيّاتيّ ألمانيّ. ولد في 31 أكتوبر(1815) بأستنفيلد ومات في 19 فيفري 1897 ببرلين. من ضمن أعماله الرياضيّاتيّة نظرية الدوال الآبليّة والتحليليّة. يذكر له التاريخ أنّه عارض زميله وصديقه كرونيكر حول اكتشافات كانتور المثيرة.

7.1 النهايات لدى الدوال $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$: عموميّات

1.7.1 تنبيه

إنّ مفهوم النهاية هنا يحتفظ بروحه التي سبقت لك بها في دراسة الدوال الحقيقيّة ذات متغيّر واحد. نقوم في الدراسة الحاضرة باستخدام النظيم بدل القيمة المطلقة والكرة المفتوحة بدل المجال.

2.7.1 تعريف

لتكن $f:(\mathbb{R}^n,\|.\|)\to(\mathbb{R},|.|)$ دالّة معرّفة في جوار V_a لنقطة a من $\mathbb{R}^n$ (قد يكون a مستثنى) وليكن ℓ عنصرا من $\mathbb{R}$. نقول عن f إنّها تقبل ℓ نهاية لها لمّا يؤول x إلى a إذا تحقّق الشرط:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha(\varepsilon, a) > 0 \quad \|x-a\| \leq \alpha \;\Rightarrow\; |f(x)-\ell| \leq \varepsilon.$$

نكتب في هذه الحالة اختصارا:

$$\ell = \lim_{x \to a} f(x).$$

ونقول عن f إنّها تؤول إلى $+\infty$ لما يؤول x إلى a إذا تحقّق الشرط:

$$\forall A > 0 \;\; \exists \alpha > 0 / \|x-a\| \leq \alpha \;\Rightarrow\; f(x) > A.$$

أخيرا، نقول عن f إنّها تؤول إلى $-\infty$ لمّا يؤول x إلى a إذا تحقّق الشرط:

$$\forall A > 0 \;\; \exists \alpha > 0 / \|x-a\| \leq \alpha \;\Rightarrow\; f(x) < -A.$$

3.7.1 ملحوظة

هذا التعريف لا يتعلّق بالنظيم المختار على $\mathbb{R}^n$، ذلك لأنّ كلّ النظيمات المعرّفة على $\mathbb{R}^n$ متكافئة كما تقدّم. يتيح لنا امكانية اختيار أيّا منها. وبالطبع يخضع هدا الاختيار للسهولة الحسابيّة التي يقدمها

كلّ نظيم حسب كلّ حالة تتمّ معالجتها. لعلّ الأمثلة الموالية توضّح الأمر جليّا.

4.7.1 نتيجة

النهاية ℓ وحيدة إن وجدت.

لا يختلف التعليل عن ذاك الذي تعرفه في حالة الدوال $(\mathbb{R},|.|) \to (\mathbb{R},|.|)$.

5.7.1 أمثلة

1) الدالّة $f(x,y) = x - 3y + 1$ تقبل $\ell = -1$ نهاية لها عند $(1,1)$.

وبالفعل، من أجل كلّ $\varepsilon > 0$ نكتب:

$$\begin{aligned} |f(x,y)+1| &= |x-3y+2| = |(x-1)-3(y-1)| \\ &\le |x-1| + 3|y-1| \le 3\|x-1, y-1\|_1 \le \varepsilon. \end{aligned}$$

يكفي أخذ $\alpha = \dfrac{\varepsilon}{3}$ في التعريف أعلاه.

2) الدالّة $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy$ تقبل $\ell = 0$ نهاية لها عند $(0,0)$.

وبالفعل، لدينا من أجل كلّ $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned} |x^2 + y^2 - xy - 0| &\le x^2 + y^2 + |xy| \le x^2 + y^2 + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \\ &\le \frac{3}{2}\|(x,y)\|_2^2 \le \varepsilon; \end{aligned}$$

بعد هذا، يكفي أخذ $\alpha = \sqrt{\dfrac{2}{3}\varepsilon}$ في التعريف أعلاه.

3) الدالّة $f(x,y) = (x^2 + y^2)\sin xy$ تقبل $\ell = 0$ نهاية لها عند $(0,0)$.

وبالفعل، لدينا من أجل $\varepsilon > 0$:

$$\left| f(x,y)-0 \right| = \left|(x^2+y^2)\sin xy\right| = \left|(x^2+y^2)\right|\left|\sin xy\right|$$
$$\leq x^2+y^2 = \left\|x-0, y-0\right\|_2^2 \leq \varepsilon.$$

يكفي أخذ $\alpha=\sqrt{\varepsilon}$ في التعريف أعلاه.

4) **الدالّة** $f(x,y)=x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}$ **تقبل** $\ell=0$ **نهاية لها عند النقطة** $(0,0)$ **. وبالفعل، لدينا من أجل كلّ** $0<\varepsilon$ **:**

$$\left| f(x,y)-0 \right| = \left|x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right| \leq |x|\left|\sin\frac{1}{y}\right|+|y|\left|\sin\frac{1}{x}\right|$$
$$\leq |x|+|y| = \left\|(x,y)-(0,0)\right\|_1 \leq \varepsilon.$$

يكفي أخذ $\alpha=\varepsilon$ في التعريف أعلاه.

5) **الدالّة** $f(x,y)=\dfrac{2x+y}{x^2+y^2}$ **تقبل** $\ell=2$ **نهاية لها عند النقطة** $(1,0)$**. وبالفعل، لدينا:**

$$\left| f(x,y)-2 \right| = \left|\frac{2x+y}{x^2+y^2}-2\right| = \left|\frac{2x^2+2y^2-2x-y}{x^2+y^2}\right|$$
$$=\frac{1}{x^2+y^2}\left|2(x-1)^2+2y^2+2(x-1)-y\right|.$$

هذه العبارة الأخيرة ليست محدودة على ميدان تعريف f . لذا نلجأ، كدأبنا في الدوال ذات متغيّر واحد، إلى دراسة محليّة كأن نضع:

$$\left(\max\left(|x-1|,|y|\right)\right) \leq \frac{1}{2}.$$

يأتي أنّ:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2} \leq x \leq \dfrac{3}{2}, \\ -\dfrac{1}{2} \leq y \leq \dfrac{1}{2}; \end{cases}$$

وعليه:

$$\frac{1}{4} \le x^2 + y^2 \le \frac{5}{2};$$

وبالتالي، نكتب من أجل كلّ $0 < \varepsilon$:

$$\begin{aligned} |f(x,y) - 2| &= \left| \frac{2(x-1)^2 + 2y^2 + 2(x-1) - y}{x^2 + y^2} \right| \\ &\le 4\left(2(x-1)^2 + 2y^2 + 2|x-1| + |y|\right) \\ &\le 28\left(\max\left(|x-1|, |y|\right)\right) \le \varepsilon; \end{aligned}$$

يكفي أخذ $\alpha = \min\left(\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{28}\right)$ **في التعريف أعلاه.**

6) **الدالّة** $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ **لا تقبل نهاية عند** $(0,0)$. **وبالفعل، فإنّ وجود نهاية يقتضي عدم تغيّرها أيّا كان السبيل الذي يسلكه المتغيّر** (x,y) **"للاقتراب" من** $(0,0)$. **إنّ هذا غير محقّق، إذ لدينا على سبيل المثال:**

$$\lim_{x \to 0} f(x,x) = \frac{1}{2} \ne \lim_{x \to 0} f(x,2x) = \frac{2}{5}.$$

هذا كاف لحرمان f **من التمتّع بالنهاية عند** $(0,0)$.

8.1 : النهايات لدى الدوال $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$: مبرهنات أساسيّة

إنّ المبرهنة الموالية تقدّم لك أداة فعّالة للتأكّد من عدم قبول دالّة لنهاية. فهاكها:

1.8.1 مبرهنة (تمييز النهاية بالمتتاليات)

يكون عدد ℓ نهاية لدالّة $f : D_f \subset \left(\mathbb{R}^n, \|.\|\right) \to \left(\mathbb{R}, |.|\right)$ عند نقطة a من $\mathbb{R}^n$ إذا وفقط إذا حوّلت f كلّ متتالية $(x_n)_n$ متقاربة نحو a في $\left(\mathbb{R}^n, \|.\|\right)$ إلى متتالية $\left(f(x_n)\right)_n$ متقاربة نحو ℓ في $\left(\mathbb{R}, |.|\right)$.

إثبات

لا يختلف عمّا تعرفه وسقناه إليك من قبل في دفتر الدوال $\left(\mathbb{R}, |.|\right) \to \left(\mathbb{R}, |.|\right)$ غير أنّنا نعيده عليك لأهمية النتيجة المتعلّقة به.

لزوم الشرط

لنفترض أنّ f تقبل ℓ نهاية لها عند a. نكتب تعريفا:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \rho(\varepsilon, a) > 0 / \forall x \in D_f \subset \mathbb{R}^n :$$
$$\| x - a \| \leq \rho \ \Rightarrow \left| f(x) - \ell \right| \leq \varepsilon; \qquad (*)$$

وإذا كانت $(x_n)_n$ متتالية من D_f متقاربة نحو a كتبنا أيضا:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N} :\ n \geq n_0 \ \Rightarrow \left\| x_n - a \right\| \leq \varepsilon. \qquad (**)$$

يأتي أنّه يكفي أخذ $\rho = \varepsilon$ في $(*)$ والاحتفاظ بـ n_0 في $(**)$ للحصول على:

$$\forall n \in \mathbb{N} :\ \ n \geq n_0 \ \Rightarrow \left\| x_n - a \right\| \leq \varepsilon \Rightarrow \left| f(x_n) - \ell \right| \leq \varepsilon;$$

وهو ما يفيد تقارب $\left(f(x_n)\right)_n$ نحو ℓ.

كفاية الشرط:

نستعين بالبرهان بالخلف. لنفترض أنّ f لا تقبل ℓ نهاية لها عند a. يوجد عند ذلك عدد $\varepsilon_0>0$ بحيث مهما يكن العدد الموجب ρ يوجد عنصر x_ρ من D_f يحقّق:

$$\begin{cases}\left\|x_\rho-a\right\|<\rho,\\ \left|f(x_\rho)-\ell\right|>\varepsilon_0.\end{cases}$$

إذا رددنا هذا الاستدلال من أجل القيم الخاصة $\rho=1$، $\frac{1}{2}$،...، $\frac{1}{n}$،... وجدنا عندئذ متتالية $(x_n)_n$ تحقّق:

$$\begin{cases}\left\|x_n-a\right\|<\dfrac{1}{n},\\ \text{و}\\ \left|f(x_n)-\ell\right|>\varepsilon_0.\end{cases}$$

نستنتج أنّ المتتالية $(x_n)_n$ تتقارب نحو a في حين أنّ المتتالية $\left(f(x_n)\right)_n$ لا تتقارب نحو ℓ، وهو ما يشكّل تناقضا مع الفرض وينهي البرهان.

2.8.1 مثالان

1) لنعد على ضوء هذه المبرهنة معالجة المثال السادس أعلاه.

إذا اعتبرنا المتتاليتين $u_n=\left(\frac{1}{n},0\right)$ و $v_n=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$ في $\left(\mathbb{R}^2,\|.\|\right)$ وجدناهما تتقاربان نحو $(0,0)$ غير أنّ محوّلتيهما $f(u_n)=0$ و $f(v_n)=\frac{1}{2}$

وفق f ثابتتان تتقاربان نحو النهايتين المختلفتين 0 و $\frac{1}{2}$. نستنتج على ضوء مبرهنتنا أنّ الدالّة f لا تقبل نهاية عند $(0,0)$.

2) النهاية $\lim\limits_{x\to(0,0)} \sin\frac{1}{x^2+y^2}$ غير موجودة. وبالفعل، نلاحظ أنّ:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n\pi}},\frac{1}{\sqrt{n\pi}}\right)=(0,0);$$

بيد أنّ المتتالية المحوّلة:

$$\sin\left(\frac{1}{\frac{1}{n\pi}+\frac{1}{n\pi}}\right)=\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}(-1)^p & ;\ n=2p+1,\\ 0 & ;\ n=2p,\end{cases}$$

متباعدة.

3.8.1 نتائج

نجمل فيما يلي بعضا من النتائج الأساسيّة سبق التأكّد من سريان مفعولها لدى الدوال $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (انظر المرجع (1)). نسوقها لك دون برهان. يمكنك أن تمرّن نفسك في ذلك.

أ. إذا قبلت دالّة $f:\left(\mathbb{R}^n,\|.\|\right)\to\left(\mathbb{R},|.|\right)$ نهاية عند نقطة a فإنّه يوجد جوار لـ a تكون محدودة عليه، أي:

$$\exists\alpha>0\ \ \exists M>0/\ \ 0<\|x-a\|\le\alpha\ \ \Rightarrow\ \ |f(x)|\le M.$$

ب. نهاية كلّ دالّة موجبة (أو معدومة) $f:\left(\mathbb{R}^n,\|.\|\right)\to\left(\mathbb{R},|.|\right)$ في جوار نقطة a موجبة (أو معدومة) بدورها.

ج. إذا قبلت دالّة $f:\left(\mathbb{R}^n,\|.\|\right)\to\left(\mathbb{R},|.|\right)$ نهاية موجبة تماما ℓ (سالبة على التوالي) عند نقطة a فإنّه يوجد جوار لـ a تكون فيه الدالّة موجبة (سالبة على التوالي).

د. إذا قبلت دالّة $f:\left(\mathbb{R}^n,\|.\|\right)\to\left(\mathbb{R},|.|\right)$ نهاية معدومة عند نقطة a وكانت $g:\left(\mathbb{R}^n,\|.\|\right)\to\left(\mathbb{R},|.|\right)$ دالّة **محدودة** في جوار هذه النقطة فإنّ الدالّة fg تقبل الصفر نهاية لها عند a.

إذا اعترضتك نهاية من قبيل $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} y\sin\sqrt{\dfrac{chx}{x^4+tg^2y}}$، على سبيل المثال، أمكنك بفضل هذه النتيجة الجزم توّا بأنّها معدومة.

٥. مبرهنة (العمليات الجبريّة على النهايات)

لتكن f و g دالّتين حقيقيّتين معرّفتين في جوار V_a لنقطة a من $\mathbb{R}^n$ بحيث $\ell=\lim\limits_{x\to a}f(x)$ و $\ell'=\lim\limits_{x\to a}g(x)$ (ℓ و ℓ' منتهيان) وليكن λ عددا حقيقيّا يكون لدينا عندئذ:

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)=\ell+\ell';\quad (1$$

$$\lim_{x\to a}f(x)\,g(x)=\ell\ell';\quad (2$$

$$\lim_{x\to a}\lambda f(x)=\lambda\ell;\quad (3$$

4) إذا كان $g(x)\neq 0$ من أجل كلّ x من V_a و $\ell'\neq 0$ فإنّ:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\ell}{\ell'};$$

5) إذا كان $g(x) \neq 0$ من أجل كلّ x من V_a و $\ell' \neq 0$ فإنّ:

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{\ell'};$$

و. مبرهنة الحصر (أو الدرك)

1) لتكن f و g و h ثلاث دوال حقيقيّة منطلقها جزء A من $\left(\mathbb{R}^n,\|.\|\right)$ بحيث:

$$\forall (x,y)\in A \;\; g(x)\leq f(x)\leq h(x).$$

إذا قبلت g و h نهاية مشتركة ℓ عند نقطة x_0 من $\mathbb{R}^n$ تمتّعت f بدورها بـ ℓ نهاية لها عند x_0.

2) لتكن f و g دالّتين حقيقيّتين منطلقهما جزء A من $\left(\mathbb{R}^n,\|.\|\right)$ بحيث:

$$\forall x\in A \;\; \left|f(x)\right|\leq\left|g(x)\right|.$$

إذا آلت $g(x)$ إلى الصفر بمآل x إلى x_0 من $\mathbb{R}^n$ آلت $f(x)$ بدورها إلى الصفر.

يمكن في هذا الصدد أن نستعرض النهاية $\lim\limits_{x\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$. فإذا لاحظنا أنّ :

$$0\leq\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\leq\frac{1}{4}(x^2+y^2),$$

تبيّن بجلاء (على ضوء الفرع الأخير) أنّ:

$$\lim_{x\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}=\lim_{x\to(0,0)}\frac{1}{4}(x^2+y^2)=0.$$

ز. مبرهنة التركيب

لتكن $\left(\mathbb{R},|.|\right) \to \left(\mathbb{R}^n,\|.\|\right) \supset f : A$ و $\left(\mathbb{R},|.|\right) \to \left(\mathbb{R},\|.\|\right) \supset g : B$. نفترض أنّ الصورة $\operatorname{Im} f$ محتواة في B. ليكن x_0 عنصرا من A. إذا قبلت f نهاية

ℓ عند x_0 وقبلت g نهاية ℓ' عند ℓ فإنّ الدالّة المركّبة $g \circ f$ تقبل ℓ' نهاية لها عند x_0.

إذا طلب منك على سبيل المثال النظر في النهاية:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} ch\frac{x^2y^2}{x^2+y^2},$$

أمكنك أن تضع $F(x,y)=ch\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ وتلاحظ أنّ F مركّبة من الدالّتين:

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R} \\ &(x,y) \mapsto f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ &t \mapsto g(t)=cht. \end{aligned}$$

وبما أنّ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$ و$\lim_{t\to 0} g(t)=1$ فإنّ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)=1$

9.1 النهايات لدى الدوال $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$: النهايات المتعاقبة وتبديل المتغيّرات

قد تكون ردّة فعل الكثيرين من الداخلين الجدد على حساب النهاية $\lim\limits_{(x,y)\to(a_1,a_2)} f(x,y)$ تثبيت أحد المتغيّرين x أو y إلى حين الانتهاء من حساب النهاية إزاء المتغيّر الثاني ثمّ اطلاق المتغيّر المثبّت في النهاية الحاصلة وإنهاء الحساب. **إنّ هذا عين الخطإ**. لقد أخّرنا الخوض فيه لنكبح جموح هؤلاء فيتجنّبوا ركوب السهولة. هذا تفصيل الأمر.

1.9.1 تعريف

نسمّي **نهاية متعاقبة** لدالة $f:\left(\mathbb{R}^2,\|.\|\right)\to\left(\mathbb{R},|.|\right)$ عند نقطة (a_1,a_2) من $\mathbb{R}^2$ إحدى النهايتين:

$$\lim_{x\to a_1}\left(\lim_{y\to a_2} f(x,y)\right),$$
$$\lim_{y\to a_2}\left(\lim_{x\to a_1} f(x,y)\right).$$

2.9.1 أمثلة

لنفحص النهايات الثلاث $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right)$ و $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right)$ و $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ في الحالات التالية:

$$f(x,y)=x^2+y^2-xy,$$
$$g(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2},$$
$$h(x,y)=\frac{x-y}{x+y},$$
$$i(x,y)=x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}.$$

لدينا بسهولة بخصوص f :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2-xy)=0,$$
$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}(x^2+y^2-xy)\right)=\lim_{y\to 0}y^2=0,$$
$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}(x^2+y^2-xy)\right)=\lim_{x\to 0}x^2=0.$$

النهاية غير موجودة في حالة الدالّة g **كما تقدّم، ومع ذلك لدينا:**

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{0}{y^2}=0,$$
$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x^2}=0.$$

للدّالة h **سلوك مثل** g **: فنهايتها غير موجودة ولكن:**

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x-y}{x+y}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{-y}{+y}=-1,$$
$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x-y}{x+y}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1.$$

أخيرا، لدينا بشأن i :

$$|i(x,y|\leq|x|+|y|;$$

وعليه، $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}i(x,y)=0$. **أمّا النهايتان المتعاقبتان** $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0}i(x,y)\right)$ **و** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0}i(x,y)\right)$ **فهما غير موجودتين:**

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right)=\lim_{y\to 0}\left(y\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}\right),$$
$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(x\lim_{y\to 0}\sin\frac{1}{y}\right).$$

لعدم وجود النهايتين $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ **و** $\lim\limits_{y\to 0}\sin\frac{1}{y}$ **على التوالي.**

خلاصة هامّة

الحالات الثلاث الأخيرة أظهرت أنّ وجود النهايتين المتعاقبتين لا يقتضى وجود النهاية كما أنّ عدم وجودهما لا يحول دون وجود النهاية.

ألا فانتبه واحترز !!!

3.9.1 قضية

إذا كانت النهايتان $\lim_{y\to a_2}\left(\lim_{x\to a_1} f(x,y)\right)=\ell_1$ و $\lim_{y\to a_1}\left(\lim_{x\to a_2} f(x,y)\right)=\ell_2$ موجودتين ومختلفتين فإنّ النهاية $\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} f(x,y)$ غير موجودة.

إثبات

إذا وضعنا:

$$\lim_{y\to a_2}\left(\lim_{x\to a_1} f(x,y)\right)=\ell_1,\quad \lim_{y\to a_1}\left(\lim_{x\to a_2} f(x,y)\right)=\ell_2,\ g(y)=\lim_{x\to a_1} f(x,y)$$

جاءنا أنّ:

$$\lim_{y\to a_2} g(y)=\ell_2.$$

ليكن $\varepsilon>0$. يأتي عندئذ:

$$\exists\alpha>0/\left|y-a_2\right|\le\alpha\ \Rightarrow\ \left|g(y)-\ell_2\right|\le\frac{\varepsilon}{3}.$$

ولمّا كانت $g(y)=\lim_{x\to a_1} f(x,y)$ كتبنا أيضا:

$$\exists\beta(y)>0/\left|x-a_1\right|\le\beta\ \Rightarrow\ \left|g(y)-f(x,y)\right|\le\frac{\varepsilon}{3}.$$

لنفترض الآن جدلا أنّ النهاية $\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} f(x,y)=\ell$ موجودة. نكتب والحال هذه:

$$\exists\delta>0/\ \max\left(\left|x-a_1\right|,\left|y-a_2\right|\right)<\delta\ \ \Rightarrow\ \left|f(x,y)-\ell\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

نستخلص أنّه يوجد عنصر y بحيث $|y-a_2|<\inf(\alpha,\delta)$ وعنصر x بحيث $|x-a_1|<\inf(\beta,\delta)$ يسمحان بأن نكتب:

$$\begin{aligned}|\ell-\ell_2| &= |\ell-f(x,y)+f(x,y)-g(y)+g(y)-\ell_2| \\ &\leq |\ell-f(x,y)|+|f(x,y)-g(y)|+|g(y)-\ell_2| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.\end{aligned}$$

هذه الوضعية تفضي لزوما إلى أنّ $\ell=\ell_2$.

إنّ استدلالا مماثلا يفضي بدوره إلى أنّ $\ell=\ell_1$. نخلص في الأخير إلى أنّ $\ell_1=\ell_2$ ، وهذا يتعارض والفرض. نستنتج أنّ النهاية ℓ غير موجودة.

4.9.1 مثال

إذا أعدنا اعتبار الدالّة $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ ووضعنا:

$$\lim_{x\to 0} f(x,\lambda x)=\lim_{x\to 0}\frac{x\lambda x}{x^2+\lambda^2 y^2}=\frac{\lambda}{1+\lambda^2}=\ell(\lambda),$$

تبيّن على الفور أنّ:

$$\ell(1)=\frac{1}{2}\neq \ell(2)=\frac{2}{5}.$$

نستخلص أنّ النهاية $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ غير موجودة.

5.9.1 ملحوظة

إنّ الوضعية:

$$\lim_{x\to 0} f(x,\lambda x)=\ell,\forall \lambda\in\mathbb{R},$$

لا تقتضي بالضرورة أنّ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\ell$ كما يبيّنه هذا المثال:

هبك تريد معالجة النهاية $\lim\limits_{(x,y)} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$. يمدّنا سبيل المستقيمات المارّة من الصفر $y = \lambda x$ بـ:

$$\lim_{x\to 0} f(x, \lambda x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3\lambda}{x^4 + \lambda^2 x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x\lambda}{x^2 + \lambda^2} = 0, \ \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

ومع ذلك فالنهاية $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ غير موجودة، إذ السبيل $y = x^2$ يفضي إلى:

$$\lim_{x\to 0} f(x, x^2) = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

6.9.1 نتيجة

إذا اجتمعت الشروط الثلاثة:

أ. $\lim\limits_{x\to 0} f(x, \lambda x) = \ell$

ب. $\lim\limits_{y\to 0} f(0, y) = \ell$

ج. توجد دالّة h تذعن للقيدين:

ج1: $\left| f(x, \lambda y) - \ell \right| \leq h(x)$

ج2: $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = 0$

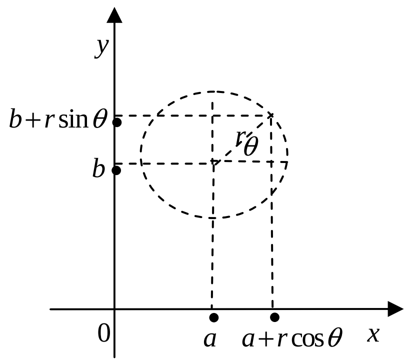
ضمنّا عندئذ وجود النهاية $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$؛ وفضلا على ذلك فهي تعدل ℓ.

7.9.1 حساب النهايات بالإحداثيات القطبيّة

هبنا نريد حساب النهاية $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$.

نضع عندئذ $x = a + r\cos\theta$ و $y = b + r\sin\theta$

حيث r من $\mathbb{R}_+^*$ و θ من $[0, 2\pi[$.



1) إذا وجد عددان θ_1 و θ_2 بحيث:

$$\lim_{r\to 0} f(a+r\cos\theta_1, b+r\sin\theta_1) \neq \lim_{r\to 0} f(a+r\cos\theta_2, b+r\sin\theta_2),$$

فإنّ النهاية غير موجودة.

2) إذا كانت :

$$\lim_{r\to 0^+} f(a+r\cos\theta, b+r\sin\theta) = \ell, \ \ \forall\theta\in\mathbb{R},$$

ووجدت دالّة حقيقيّة موجبة h بحيث:

$$\begin{cases} \left| f(a+r\cos\theta, b+r\sin\theta) - \ell \right| \leq h(r), \\ \lim\limits_{r\to 0^+} h(r) = 0, \end{cases}$$

ضمنّا عندئذ $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \ell$.

8.9.1 أمثلة

1) لنحسب نهاية الدالّة $f(x,y) = \dfrac{xy^3}{x^2+y^2}$ عند $(0,0)$. التعويض المباشر يفضي إلى حالة عدم تعيين من النمط $\dfrac{0}{0}$. لرفعها نلجأ إلى الإحداثيات القطبية، فنضع:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = rsin\theta, \\ r\in\mathbb{R}_+^*, \theta\in[0,2\pi[. \end{cases}$$

وعليه:

$$\lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \lim_{r\to 0}\frac{r^4\cos\theta\sin^3\theta}{r^2}$$
$$= \lim_{r\to 0} r^2\cos\theta\sin^3\theta = 0, \forall\theta\in[0,2\pi[$$
$$\left|f(r\cos\theta, r\sin\theta) - 0\right| = \left|\frac{r^4\cos\theta\sin^3\theta}{r^2}\right| = r^2\left|\cos\theta\sin^3\theta\right|$$
$$\le r^2 = h(r),$$
$$\lim_{r\to 0^+} h(r) = 0;$$

نستخلص على ضوء القضية أعلاه أنّ $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = 0$.

2) لنحسب بالمثل النهاية $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{Log(1+x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

التعويض المباشر يفضي إلى حالة عدم تعيين من النمط $\frac{0}{0}$. لرفعها نلجأ إلى الإحداثيات القطبيّة فنكتب:

$$\lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \lim_{r\to 0}\frac{Log(1+r^2)}{r} = \lim_{r\to 0}\frac{r^2}{r} = 0, \ \forall\theta\in[0,2\pi[.$$

$$\left|f(r\cos\theta, r\sin\theta) - 0\right| = \left|\frac{Log(1+r^2)}{r}\right| \le \frac{r^2}{r} = r = h(r),$$
$$\lim_{r\to 0^+} h(r) = 0;$$

نستخلص كما سبق أنّ $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{Log(1+x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$.

3) لنعالج $f(x,y)=\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}$. التعويض المباشر يفضي إلى حالة عدم تعيين من النمط $\dfrac{0}{0}$. لرفعها نلجأ إلى الإحداثيات القطبيّة فنجد:

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta) &= \lim_{r\to 0}\frac{r^4\cos^3\theta\, r\sin\theta}{r^6\cos^6\theta + r^2\sin^2\theta}\\ &= \lim_{r\to 0^+}\frac{r^2\cos^3\theta\sin\theta}{r^4\cos^6\theta+\sin^2\theta} = 0\ ,\ \forall\theta\in[0,2\pi[\end{aligned}$$

ومع هذا، فإنّ النهاية $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ غير موجودة ذلك لأنّ:

$$\lim_{x\to 0} f(x,x^3) = \lim_{x\to 0}\frac{x^3x^3}{x^6+x^6} = \frac{1}{2}.$$

هذه الحالة الأخيرة تستدعي منّا وقفة لندوّن:

9.9.1 ملحوظة

إنّ شرط استقلال النهاية $\displaystyle \lim_{r\to 0} f(a+r\cos\theta, b+r\sin\theta)$ عن θ غير كاف لضمان وجود النهاية $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$.

10.1 النهايات لدى الدوال $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$

1.10.1 تعريف

لتكن $f : D_f \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ دالّة منطلقها جزء D_f من $\mathbb{R}^n$ ومصبّها $\mathbb{R}^p$ و $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ و $\ell = (\ell_1, \ell_2, ..., \ell_p)$ عنصرين من $\mathbb{R}^n$ و $\mathbb{R}^p$ على التوالي.

نفترض أنّ كلّا من $\mathbb{R}^n$ و $\mathbb{R}^p$ مزوّد بأحد النظيمات الأساسيّة الثلاثة.

نقول عن ℓ إنّه نهاية لـ f عندما يؤول x إلى a إذا تحقّق الشرط:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \rho(\varepsilon, a) > 0 / \; \forall x \in D_f : \|x - a\| < \rho \;\Rightarrow\; \|f(x) - \ell\| < \varepsilon.$$

ونكتب كالعادة: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.

2.10.1 أمثلة

1) **لنبيّن أنّ:**

$$\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \left(x + y, x - y\right) = (0,2).$$

ليكن $0 < \varepsilon$ ولنقدّر المقدار:

$$\begin{aligned}\|f(x) - \ell\| &= \|(x+y, x-y) - (0,2)\| = \|x+y, x-y-2)\| \\ &= \|(x-1)+(y+1), (x-1)-(y+1)\|.\end{aligned}$$

فإذا اخترنا النظيم الأساسيّ $\|.\|_1$ (وهو أمر مشروع كما تقدّم)، بدءا ووصولا، كتبنا:

$$\begin{aligned}\|f(x) - \ell\|_1 &= \|(x-1)+(y+1), (x-1)-(y+1)\|_1 \\ &= |(x-1)+(y+1)| + |(x-1)-(y+1)| \\ &\le 2\left(|x-1| + |y+1|\right) = 2\|x-1, y+1\|_1 \le \varepsilon.\end{aligned}$$

يكفي أخذ $\alpha = \dfrac{\varepsilon}{2}$.

2) لنبيّن أنّ $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\dfrac{x^3}{x^2+y^2},\dfrac{y^3}{x^2+y^2}\right)=(0,0)$.

ليكن $\varepsilon>0$ ولنقدّر العبارة:

$$\|f(x)-\ell\|=\left\|\left(\frac{x^3}{x^2+y^2},\frac{y^3}{x^2+y^2}\right)-(0,0)\right\|=\left\|\left(\frac{x^3}{x^2+y^2},\frac{y^3}{x^2+y^2}\right)\right\|$$
$$=\left\|\left(\frac{(x-0)^3}{x^2+y^2},\frac{(y-0)^3}{x^2+y^2}\right)\right\|.$$

فإذا اخترنا النظيم الأساسيّ $\|.\|_2$، بدءا ووصولا، كتبنا:

$$\|f(x)-\ell\|_2=\left\|\left(\frac{(x-0)^3}{x^2+y^2},\frac{(y-0)^3}{x^2+y^2}\right)\right\|_2=\frac{1}{\|(x,y)\|_2^2}\left\|\left(x^3,y^3\right)\right\|_2$$
$$=\frac{1}{\|(x,y)\|_2^2}\sqrt{x^6+y^6}\le\frac{1}{\|(x,y)\|_2^2}\left(\|(x,y)\|_2^6\right)=\|(x,y)\|_2^4\le\varepsilon.$$

يكفي أخذ $\alpha=\sqrt[4]{\varepsilon}$.

3) لنبيّن أنّ $\lim_{(x,y)x\to\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)}\left(\sin x-\cos y,\sin x+\cos y\right)=(0,\sqrt{2})$.

ليكن $\varepsilon>0$ ولنقدّر المقدار:

$$\|f(x)-\ell\|=\left\|\left(\sin x-\cos y,\sin x+\cos y\right)-(0,\sqrt{2})\right\|$$
$$=\left\|\sin x-\cos y,\sin x+\cos y-\sqrt{2}\right\|$$
$$=\left\|\sin x-\sin\frac{\pi}{4}-\cos y+\cos\frac{\pi}{4},\sin x-\sin\frac{\pi}{4}+\cos y-\cos\frac{\pi}{4}\right\|.$$

فإذا تذكّرنا أنّ:

$$\sin u-\sin v=2\sin\frac{u-v}{2}\cos\frac{u+v}{2},$$
$$\cos u-\cos v=-2\sin\frac{u-v}{2}\sin\frac{u+v}{2},$$

كتبنا من جديد:

$$\|f(x)-\ell\| = \left\| \left(2\sin\frac{x-\frac{\pi}{4}}{2} cos\frac{x+\frac{\pi}{4}}{2} - 2\sin\frac{\frac{\pi}{4}-y}{2}\sin\frac{\frac{\pi}{4}+y}{2}, \quad 2\sin\frac{x-\frac{\pi}{4}}{2} cos\frac{x+\frac{\pi}{4}}{2} - 2\sin\frac{y-\frac{\pi}{4}}{2}\sin\frac{y+\frac{\pi}{4}}{2} \right) \right\|$$

وإذا اخترنا الآن النظيم الأساسيّ $\|.\|_\infty$، بدءا ووصولا، جاءنا:

$$\|f(x)-\ell\|_\infty = \max\left(\left|2\sin\frac{x-\frac{\pi}{4}}{2} cos\frac{x+\frac{\pi}{4}}{2} - 2\sin\frac{\frac{\pi}{4}-y}{2}\sin\frac{\frac{\pi}{4}+y}{2}\right|, \left|2\sin\frac{x-\frac{\pi}{4}}{2} cos\frac{x+\frac{\pi}{4}}{2} - 2\sin\frac{y-\frac{\pi}{4}}{2}\sin\frac{y+\frac{\pi}{4}}{2}\right| \right)$$

$$\le \max\left(2\left|\sin\frac{x-\frac{\pi}{4}}{2}\right| + 2\left|\sin\frac{\frac{\pi}{4}-y}{2}\right|, \left|2\sin\frac{x-\frac{\pi}{4}}{2}\right| + 2\left|\sin\frac{\frac{\pi}{4}-y}{2}\right| \right)$$

$$\le \max\left(\left|x-\frac{\pi}{4}\right| + \left|y-\frac{\pi}{4}\right|, \left|x-\frac{\pi}{4}\right| + \left|y-\frac{\pi}{4}\right| \right)$$

$$\le 2\max\left(\left|x-\frac{\pi}{4}\right|, \left|y-\frac{\pi}{4}\right| \right) \le \varepsilon.$$

هكذا، يكفي أخذ $\alpha = \frac{\varepsilon}{2}$.

إنّ القضية الموالية تعطي أداة ناجعة للسيطرة على نهايات الدوال $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ وذلك بربطها بنهايات مركّباتها الدوال $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. فهاكها:

3.10.1 قضية

يكون عنصر $\ell = (\ell_1, \ell_2, ..., \ell_p)$ من $\mathbb{R}^p$ نهاية لدالّة $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ عند نقطة a من $\mathbb{R}^n$ إذا وفقط إذا قبلت كلّ مركّبة f_i لـ f العدد ℓ_i نهاية لها عند a.

وبعبارة أخرى، لدينا:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a}(f_1(x), f_2(x), ..., f_p(x)) = \ell$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall i = 1, 2, ..., p \quad \lim_{x \to a} f_i(x) = \ell_i$$

إثبات

لزوم الشرط

لنفترض أنّ $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ ولنثبت أنّ $\lim_{x \to a} f_i(x) = \ell_i$، أيّا كان الدليل i من $\{1, 2, ..., p\}$. لدينا تعريفا:

$$\left(\lim_{x \to a} f(x) = \ell\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(\forall \varepsilon > 0 \ \exists \rho > 0 / \forall x \in D_f : \ \|x - a\| < \rho \ \Rightarrow \ \|f(x) - \ell\| < \varepsilon\right);$$

ولكن، نعلم أنّ:

$$|f_i(x) - \ell_i| \le \|f(x) - \ell\|, \ \forall i \in \{1, 2, ..., p\};$$

إذن:

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \rho(\varepsilon) > 0 / \forall x \in D_{f_i} : \|x-a\| < \rho \ \Rightarrow\ \left| f_i(x) - \ell_i \right| \le \| f(x) - \ell \| < \varepsilon,$$

ومنه المطلوب.

كفاية الشرط

لنفترض أنّ $\lim\limits_{x\to a} f_i(x) = \ell_i$ **، أيّا كان الدليل** i **من** $\{1,2,...,p\}$ **ولنثبت أنّ** $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ **. من أجل كلّ دليل** i **من** $\{1,2,...,p\}$ **نكتب تعريفا:**

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \rho_i > 0 / \forall x \in D_{f_i} :\ \ \|x-a\| < \rho_i \ \Rightarrow\ \left| f_i(x) - \ell_i \right| \le \varepsilon,$$

وإذا أخذنا $\rho = \min\limits_{1\le i\le p} \rho_i$ **جاءنا:**

$$\forall x \in D_f :\ \|x-a\| < \rho \ \Rightarrow\ \max_{1\le i\le p} \left| f_i(x) - \ell_i \right| = \| f(x) - \ell \|_\infty \le \varepsilon,$$

وهو المبتغى.

إنّ زيارة خاطفة للأمثلة الثلاثة أعلاه تمدّنا على ضوء هذه القضية بـ:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} (x+y) = 0 \\ \lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} (x-y) = 2 \end{array}\right\} \ \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(1,-1)} (x+y, x-y) = (0,2);$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3}{x^2+x^2} = 0 \\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3}{x^2+x^2} = 0 \end{array}\right\} \ \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^3}{x^2+x^2}, \frac{x^3}{x^2+x^2} \right) = (0,0);$$

$$\underbrace{\begin{array}{c}\lim\limits_{(x,y)\to\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)}(\sin x-\cos y)=0,\\ \lim\limits_{(x,y)\to\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)}(\sin x+\cos y)=\sqrt{2},\end{array}}$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{(x,y)\to\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)}\left(\sin x-\cos y,\sin x+\cos y\right)=(0,\sqrt{2}).$$

4.10.1 ملحوظة

للقضية أعلاه نجاعة أكبر في تبيان عدم تمتّع دالة شعاعيّة f بنهاية عند نقطة a $\mathbb{R}^n$. يكفي من أجل ذلك ألاّ تقبل إحدى مركّباتها f_i نهاية عند النقطة ذاتها a. فلو طلب منك النظر في النهاية:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0,0)}\left(\sin x-\cos z, x+y, x-\frac{1}{\sin z}\right),$$

تبيّن على التوّ أنّها ليست موجودة، ذلك لأنّ المركّبة الثالثة $(x,y,z)\mapsto x-\dfrac{1}{\sin z}$ لا تقبل نهاية عند $(0,0,0)$.

11.1 الاستمرار: عموميّات

1.11.1 تنبيه

سيبقى جلّ التعاريف التي سنوردها في هذا المقطع تحتفظ بالروح نفسها التي كانت لها عند الدوال $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$. لن يطال التغيير سوى "الأدوات الطبولوجيّة". سوف نفتتح الدراسة بالدوال $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ثمّ نردفها بالدوال $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ ، كما هو ملحوظ في المفهومين السابقين: المتتاليات والنهايات.

2.11.1 تعريف

لتكن f دالّة حقيقيّة معرّفة عند جوار نقطة a من $\mathbb{R}^n$. نقول عنها إنّها مستمرّة عند a إذا كانت معرّفة عند a وحقّقت :

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a),$$

أي:

$$\exists \varepsilon > 0 \ \ \exists \alpha(\varepsilon, a) > 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}^n \ \ \|x - a\| \leq \alpha \ \Rightarrow \ |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon.$$

ونقول عنها إنّها مستمرّة على جزء A من $\mathbb{R}^n$ إذا كانت كذلك عند كلّ نقطة a من A .

(ألم يمر بك هذا التعريف بعينه في دراستك الثانوية !!!)

3.11.1 أمثلة

1) إنّ تطبيق الإسقاط:

$$\pi_i : \left(\mathbb{R}^n, \|.\|_1\right) \to \mathbb{R}$$
$$x = (x_1, ..., x_n) \to \pi_i(x) = x_i,$$

مستمرّ على $\mathbb{R}^n$. وفعلا، من أجل كلّ عنصر a من $\mathbb{R}^n$ لدينا:

$$|\pi_i(x) - \pi_i(a)| = |x_i - a_i| \leq \|x - a\|_1 \leq \varepsilon;$$

يكفي، في التعريف أعلاه، أخذ $\varepsilon = \alpha$.

2) الدالّة $f : \left(\mathbb{R}^2, \|.\|_2\right) \to \mathbb{R}$ المعطاة بـ:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & ; \ (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & ; \ (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

مستمرّة عند $(0,0)$. وبالفعل، لدينا:

$$\left| f(x,y) = f(0,0) \right| = \left| \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{1}{4}(x^2 + y^2) = \frac{1}{4}\|(x,y)\|_2^2 \leq \varepsilon;$$

يكفي أخذ $\alpha = 2\sqrt{\varepsilon}$.

3) لنمدّد بالاستمرار عنده $(0,0)$ الدالّة الحقيقيّة g المعطاة على النحو:

$$g(x,y) = \frac{\sin x - \sin y}{x - y}.$$

علينا حساب النهاية $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y$. نستخدم بغية ذلك الصيغة المعروفة:

$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2},$$

فنجد على ضوئه:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2\sin\dfrac{x-y}{2}\cos\dfrac{x+y}{2}}{x-y}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{\sin\dfrac{x-y}{2}}{\dfrac{x-y}{2}} \right) \cos\frac{x+y}{2} = 1.$$

نستخلص أنّ g تقبل التمديد بالاستمرار عند الصفر بـ 1 .

4.11.1 تعريف

لتكن f دالّة حقيقيّة منطلقها جزء D من $\mathbb{R}^n$ وليكن $a=(a_1,...,a_n)$ عنصرا من D . نضع:

$$A_i=\{x\in\mathbb{R}/(a_1,...,a_{i-1},x,a_{i+1},...,a_n)\in D\}.$$

نسمّي **دالّة جزئيّة رتبتها** i من $\{1,2,...,n\}$ الدالّة الحقيقيّة المرموز لها بـ f_i والمعرّفة على A_i بـ:

$$f_i(x)=f(a_1,a_2,...,a_{i-1},x,a_{i+1},...,a_n).$$

5.11.1 أمثلة

1) الدالّتان الجزئيّتان للدالّة:

$$\begin{aligned}&f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\\&(x,y)\mapsto f(x,y)=5x+7y-4,\end{aligned}$$

عند النقطة $(2,7)$ هما:

$$\begin{aligned}&f_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\&\quad x\mapsto f_1(x)=5x+45,\\&f_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\&\quad x\mapsto f_2(x)=7x+6,\end{aligned}$$

2) الدالّة:

$$\begin{aligned}&f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}\\&(x,y,z)\mapsto f(x,y,z)=2x^2+3y^2+4z^2-5x-6y-7z,\end{aligned}$$

تقبل عند النقطة $(1,0,-1)$ الدوال الجزئيّة f_1 و f_2 و f_3 المعطاة على النحو:

$$\begin{aligned}&f_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\&\quad x\mapsto f_1(x)=2x^2-5x+11,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2 &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f_2(x) = 3x^2 - 6x + 8, \\ f_3 &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f_3(x) = 4x^2 - 7x - 3. \end{aligned}$$

3) لنعتبر الدالّة:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \to \begin{cases} \dfrac{\cos x + \sin y}{x^2 + y^2} & ; \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & ; \quad (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

والعنصر (a,b) من $\mathbb{R}^2$. الدالّتان الجزئيّتان f_1 و f_2 لـ f عند (a,b) معطاتان بـ:

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sin x + \sin b}{x^2 + b^2} & ; \quad (x,b) \neq (0,0), \\ 0 & ; \quad (x,b) = (0,0), \end{cases}$$

$$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\cos x + \sin a}{x^2 + a^2} & ; \quad (a,x) \neq (0,0), \\ 0 & ; \quad (a,x) = (0,0). \end{cases}$$

6.11.1 تعريف

نقول عن دالّة $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ إنّها مستمرّة عند نقطة $a = (a_1, ..., a_n)$ بالنسبة إلى المتغيّر x_i إذا كانت دالّتها الجزئيّة f_i مستمرّة عند a_i.

12.1 الاستمرار: نتائج أساسيّة

1.12.1 قضية

إذا كانت $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ دالّة مستمرّة عند نقطة $a = (a_1, ..., a_n)$ من D كانت كلّ دالّة جزئيّة f_i لها مستمرّة عند a_i .

إثبات

لنبيّن مثلا أنّ f_1 مستمرّة عند a_1 . بما أنّ f مستمرّة عند a فإنّ:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \sigma(\varepsilon) > 0 / \forall x \in \mathbb{R}^n :\ \|x - a\| \le \sigma \ \Rightarrow\ |f(x) - f(a)| < \varepsilon;$$

ولكن من أجل $x = (t, a_2, ..., a_n)$ يكون $f(a) = f_1(a_1)$ و $|t - a_1| = \|x - a\|_1$

وهو ما يسمح بكتابة:

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 / |t - a_1| < \delta\ \Rightarrow\ |f_1(t) - f_1(a_1)| \le \varepsilon,$$

وينهي البرهان.

2.12.1 ملحوظتان

1) إذا كانت الدوال الجزئيّة f_1 و f_2 و... و f_n مستمرّة قلنا حينئذ عن الدالّة الشعاعيّة f إنّها مستمرّة بالنسبة لكلّ واحد من المتغيرّات x_1 و x_2 و ... و x_n على حدة.

2) عكس القضية خاطئ عموما. فإنّ استمرار الدوال الجزئيّة f_1 و f_2 و... و f_n عند a_1 و... و a_n لا يستدعي عموما استمرار الدالّة الشعاعيّة f عند $a = (a_1, ..., a_n)$. فلو اعتبرنا الدالّة الشهيرة (ألم تألفها بعد؟):

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & ; \quad (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & ; \quad (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

المعلوم عندك عدم استمرارها عند $(0,0)$ (لعدم قبولها نهاية) وجدنا دالّتيها الجزئيّتين:

$$f_1(x)=f(x,0)=\frac{x.0}{x^2+0}=0,\quad \forall x\in\mathbb{R},$$

$$f_2(x)=f(0,x)=\frac{0.x}{x^2+0}=0,\quad \forall x\in\mathbb{R},$$

مستمرّتين عند $x=0$.

3.12.1 مبرهنة (العمليات الحسابيّة)

إذا كانت f و g دالّتين حقيقيّتين مستمرّتين عند نقطة a من $\mathbb{R}^n$ كان جمعهما $f+g$ وضربهما fg وحاصل قسمتهما f/g (مع $g(a)\neq 0$) كذلك.

4.12.1 نتيجتان

1) الدوال الحدوديّة والكسور الناطقة مستمرّة في ميادين تعريفها.

2) لمجموعة الدوال الحقيقيّة المستمرّة على $\mathbb{R}^n$ بنية فضاء شعاعيّ. نرمز لها كالمعتاد بـ $\mathscr{C}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$.

5.12.1 ملحوظة

يمكن الرجوع إلى ما سبق بشأن الاستمرار في حالة المتغيّر الواحد بخصوص إثبات هذه المبرهنة وكذا توسيع النتائج المتعلّقة باستمرار

التركيب والاستمرار المنتظم ومبرهنة هاين[15]، إلخ ... إلى حالتنا الراهنة. فهي لئن عرفت تغييرا طفيفا من حيث الشكل، لن يطرأ عليها أيّ جديد من حيث المضمون. نعيد صوغها لك لتظلّ أبد الدهر حاضرة في ذهنك:

6.12.1 تعريف

نقول دالّة $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ **إنّها مستمرّة بانتظام على** A **إذا حقّقت:**

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \alpha(\varepsilon) > 0 / \ \forall x, x' \in A: \|x - x'\| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x')| \leq \varepsilon.$$

7.12.1 مبرهنة (هاين)

كلّ دالّة حقيقيّة مستمرّة على جزء متراص من $\mathbb{R}^n$ **مستمرّة بانتظام (على ذاك الجزء).**

8.12.1 مبرهنة (فيرشتراس)

كلّ دالّة حقيقيّة مستمرّة على جزء متراص من $\mathbb{R}^n$ **محدودة وتدرك حدّيها الأعلى والأدنى.**

9.12.1 أمثلة

1) **الدالّة** $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ **المعطاة بالصيغة:**

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} & ; \ (x,y) \neq (0,0), \\ \dfrac{1}{2} & ; \ (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

15. Heinrich Eduard, Heine : رياضيّاتيّ ألمانيّ. ولد في 16 جوان 1821 ببرلين ومات في 12 أكتوبر 1881 بهال. ترك بحوثا في ميادين متنوّعة مثل المعادلات ذات المشتقّات الجزئيّة والدوال الناقصيّة ونظرية الأعداد، إلخ.

مستمرّة على $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ لأنّها تركيب لدوال مستمرّة. أمّا عند الصفر، فنلجأ إلى التعريف. لدينا بالاستناد إلى دستور مثلّثيّ (مرّبك) أنّ:

$$\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\cos 0-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}=2\frac{\sin^2\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)}{\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)}\right)^2 ;$$

وعليه:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\frac{1}{2}.$$

نستنتج هكذا أنّ f مستمرّة عند $(0,0)$ أيضا.

2) الدالّة $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ المعطاة بالصيغة:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^3+yx^3}{x^4+y^4} & ;\quad (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & ;\quad (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

مستمرّة على $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ لأنّها تركيب لدوال مستمرّة. أمّا عند الصفر، فندرس النهاية $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. التعويض المباشر يفضي إلى حالة عدم تعيين من النمط $\frac{0}{0}$. إذا ما لجأنا إلى التغيير $y=\lambda x$ جاءنا توّا أنّ:

$$\lim_{\substack{x\to0\\ \lambda\in\mathbb{R}}} f(x,\lambda x)=\lim_{\substack{x\to0\\ \lambda\in\mathbb{R}}}\frac{\lambda^3x^4+\lambda x^4}{x^4+\lambda^4x^4}=\lim_{\substack{x\to0\\ \lambda\in\mathbb{R}}}\frac{\lambda^3+\lambda}{1+\lambda^4}.$$

نستخلص أنّ f لا تقبل نهاية عند $(0,0)$، إذن، فهي ليست مستمرّة عندها.

لاحظ بهذه المناسبة أنّ الدالّتين الجزئيّتين :

$$x \to g(x) = f(x,0) = 0,$$
$$y \to h(y) = f(0,y) = 0,$$

مستمرّتان عند الصفر.

3) **لتكن الدالّة** $f:\mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$ **المعطاة بـ:**

$$f(x,y) = \frac{1-\cos\sqrt{xy}}{y}.$$

لنفحص قابليتها للتمديد بالاستمرار عند كلّ نقطة $(x,0)$ من $\mathbb{R}_+^2$. لدينا بغية ذلك:

$$\frac{1-\cos\sqrt{xy}}{y} = \frac{\cos 0-\cos\sqrt{xy}}{y} = \frac{-2\sin\left(\frac{\sqrt{xy}}{2}\right)\sin\left(\frac{-\sqrt{xy}}{2}\right)}{y}$$
$$= \frac{2\sin^2\left(\frac{\sqrt{xy}}{2}\right)}{y} = \frac{1}{2}x\left(\frac{\sin\left(\frac{\sqrt{xy}}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{xy}}{2}\right)}\right)^2;$$

وعليه:

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ x\in\mathbb{R}_+}} f(x,y) = \lim_{\substack{y\to 0\\ x\in\mathbb{R}_+}} \frac{1}{2}x\left(\frac{\sin\left(\sqrt{xy}\right)}{\sqrt{xy}}\right)^2 = \frac{1}{2}x.$$

نستخلص هكذا أنّ f تقبل التمديد بالاستمرار عند $(x,0)$.

10.12.1 تعريف

لتكن $f : D_f \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ دالّة منطلقها جزء D_f من $\mathbb{R}^n$ ومصبّها $\mathbb{R}^p$ و $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ عنصرا من D_f. نفترض أنّ كلّا من $\mathbb{R}^n$ و $\mathbb{R}^p$ مزوّد بأحد النظيمات الأساسيّة الثلاثة.

نقول عن f إنّها مستمرّة عند a إذا تحقّق الشرط:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \rho(\varepsilon, a) > 0 \,/\, \forall x \in D_f : \|x - a\| < \rho \;\Rightarrow\; \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon.$$

11.12.1 مبرهنة

تكون دالّة $f : D_f \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ مستمرّة عند نقطة a من D_f إذا وفقط إذا كانت كلّ مركّبة f_i لـ f كذلك.

إثبات

لا يخرج عن ذاك الذي وضعناه للقضية (1.6.1).

بالمناسبة، إذا استحضرت الدوال الثلاث الواردة في الأمثلة (2.10.1) اتّضح لك دونما عناء استمرار الأولى والثالثة وتقطّع الثانية.

13.1 تمارين محلولة

1) عيّن ثمّ مثّل هندسيّا في معلم متعامد متجانس ميداني تعريف الدالّتين المواليتين:

$$f(x)=\frac{Log(4-x^2-y^2)}{Log(x^2+y^2-1)};$$
$$g(x,y)=\frac{1}{Arctg\sqrt{x^2-2xy+y^2-9}}.$$

2) لتكن الدالّة $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ المعطاة بـ:

$$f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$$

1) عيّن خطوط f المستوية.

2) ارسم خطّين مستواتيّين لـ f .

3) (متباينة يونغ[16])

ليكن p و q عددين حقيقيّين بحيث $1<p$ و $1<q$ و $\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=1$.

برهن أنّه مهما يكن العددان الحقيقيّان (أو العقديّان) a و b فإنّ:

$$|ab|\le\frac{|a|^p}{p}+\frac{|b|^q}{q}.$$

16. William Henry,Young : رياضيّاتيّ انـڤليـزيّ، ولد في 20 أكتوبر 1863 بلندن ومات في 7 جويلية 1942 بلوزان، انصبّت أعماله الهامّة حول الدوال متعدّدة المتغيّرات.

4) **(متباينة هولدر[17])**

ليكن p **و** q **عددين حقيقيّين بحيث** $1<p$ **و** $1<q$ **و** $\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=1$. **برهن أنّه مهما يكن العنصران** $(x_1,x_2,...,x_n)$ **و** $(y_1,y_2,...,y_n)$ **من** $\mathbb{R}^n$ **فإنّ:**

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i y_i| \le \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

5) **(متباينة مينكوفسكي[18])**

ليكن p **عددا حقيقيّا بحيث** $1<p$. **برهن أنّه مهما يكن العنصران** $(x_1,x_2,...,x_n)$ **و** $(y_1,y_2,...,y_n)$ **من** $\mathbb{R}^n$ **فإنّ:**

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p \le \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

6) **أيّ من التطبيقات الثلاثة التالية يعرّف نظيما على** $\mathbb{R}^3$ **:**

$$(x,y,z)\mapsto N_1(x,y,z)=|x|+|y|-|z|;$$

$$(x,y,z)\mapsto N_2(x,y,z)=|x|+|y|;$$

$$(x,y,z)\mapsto N_3(x,y,z)=|x|+2|y|+\frac{|z|}{1+|z|}?$$

---

17. Otto Ludwig, Hölder رياضيّاتيّ ألمانيّ. ولد في 22 ديسمبر 1859 **بشتوتڤارت** ومات في 29 أوت 1937 **بليبزيڤ**. له نتائج كثيرة في التحليل الدالّيّ والمنطق والبنى الجبريّة. اكتشف المتباينة الحاضرة، المقترنة باسمه، عام 1884.

18. Hermann Minkowski : رياضيّاتيّ ألمانيّ. ولد في 22 جوان 1864 بألكسوتا (ليتوانيا الحالية) ومات في 12 جانفي 1909 **بڤوتنڤان**. تدور أعماله حول الفضاءات النظيميّة الحقيقيّة وكذا الأشكال التربيعيّة. كان في زوريخ أحد أساتذة ألبير أنشتاين.

7) ليكن $(E,\|.\|)$ فضاء نظيميّا حقيقيّا. نضع:

$$u(E)=\sup_{x,y\in E\setminus\{0\}}\frac{\|x+y\|^2+\|x-y\|^2}{2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)}.$$

1) اثبت أنّ:

$$1\le u(E)\le 2.$$

2) احسب $u(\mathbb{R}^2)$ عندما يكون $\mathbb{R}^2$ مزوّدا بنظيمه الإقليديّ.

8) نعرّف على الفضاء $\mathbb{R}^2$ تطبيقا حقيقيّا α بـ:

$$x\mapsto\alpha(x)=\|x\|_1+2\|x\|_\infty ,$$

حيث $\|x\|_1$ و$\|x\|_\infty$ هما النظيمان الأساسيّان على $\mathbb{R}^2$.

1) اثبت أنّ α نظيم على $\mathbb{R}^2$.

2) مثّل هندسيّا كرة الوحدة المغلقة $B_f^\alpha(0,1)$.

9) اثبت مستدلاّ بالتعريف أنّ المتتالية المعرّفة بـ $U_n=\left(\frac{1}{n^2},\frac{1}{n}\right)$ متقاربة نحو $(0,0)$ في $\left(\mathbb{R}^2,\|.\|_1\right)$ وأنّ المتتالية المعرّفة بـ $V_n=\left(\sin\frac{n\pi}{2n+1},\cos\frac{n\pi}{n+1}\right)$ متقاربة نحو $(1,-1)$ في $\left(\mathbb{R}^2,\|.\|_\infty\right)$.

10) نعرّف في $\left(\mathbb{R}^3,\|.\|_\infty\right)$ المتتاليات الموالية:

$$u_n=\left(tg\frac{1}{n},\frac{1+n^2}{1+n+n^2},\frac{\cos n^2}{n^3}\right);$$

$$v_n=\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{n+n},2,Log\left(\frac{n}{n+1}\right)\right);$$

$$w_n=\left(\frac{n}{thn},\frac{shn}{e^n},\frac{e^n}{chn}\right).$$

ما هي طبيعتها ؟

11) نعرّف في $\left(\mathbb{R}^2,\|.\|_1\right)$ المتتالية $(u_n)_n$ المعطاة بحدّها العام:

$$u_n=\left(\sin\frac{n}{1+n^2},\cos\frac{n}{1+n^2}\right).$$

1) اثبت أنّها كوشيّة.

2) هل هي متقاربة؟ إن نعم، احسب نهايتها .

12) 1) اثبت أنّ:

$$\forall x,x'\in\mathbb{R}\quad |thx-thx'|\le|x-x'|;$$

$$\forall x,x'\in\mathbb{R}\quad |Argshx-Argshx'|\le|x-x'|.$$

2) برهن أنّ الجملة الجبريّة:

$$\begin{cases} x-\dfrac{1}{3}thx+\dfrac{1}{4}Argshy=0,\\ 4y-thy+\dfrac{4}{3}Argshx=0,\end{cases}$$

تقبل حلاّ وحيدا في الفضاء $\left(\mathbb{R}^2,\|.\|_1\right)$.

3) عيّنه.

13) نزوّد $\mathbb{R}^2$ بالنظيم الأساسيّ $\|.\|_1$. برهن مستخدما التعريف "الإبسيلونيّ" $(\forall\varepsilon>0\ \exists\alpha(\varepsilon)>0...)$ أنّ:

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)}(x+2y)=5;$$

$$\lim_{(x,y)\to(-1,-2)}(x^2+3y)=-5;$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{Argsh\left(\dfrac{x^4}{Arctg\,x^2}\right)+\dfrac{1}{Arctg\dfrac{1}{Argsh\,y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$$

14) احسب نهايات الدوال التالية عند النقاط المرفقة بها:

$$1)\ \frac{x+y-3}{x+5y+4},(1,1);\qquad 2)\ \frac{\sin xy}{x},(0,2);$$
$$3)\ \frac{Arc\sin(5xy-20)}{Arctg(xy-4)},(2,2);$$

15) احسب (في حالة وجودها) النهايتين المتعاقبتين $(\lim(\lim f(x,y))$ والنهاية عند $(0,0)$ في الحالتين التاليتين:

$$f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\ ;\ \ g(x,y)=\frac{|x+y|}{x^2+y^2}.$$

16) لتكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ دالّة قابلة للمكاملة ريمانيّا[19] على المجال $[0,1]$.
ولتكن الدالّة الحقيقيّة g المعطاة على $\mathbb{R}^2$ بـ:

$$g(x,y)=\int_x^y f(t)\,dt.$$

برهن أنّ:

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} g(x,y)=\int_0^1 f(t)\,dt.$$

17) اثبت أنّ الدالّتين :

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin x-\sin y}{x-y} & ;\ \ x\neq y\\ \cos x & ;\ \ x=y\end{cases}$$

19. Bernhard Riemann : رياضيّاتيّ ألمانيّ. ولد في 17 سبتمبر 1826 بهانوفر ومات في 20 جويلية 1866 بسيلاسكا بإيطاليا. فحص الجوانب الهندسية لدى الدوال ذات متغيّر عقديّ. شكّل هذا العمل فحوى موضوع رسالة الدكتوراه التي حضرها تحت إشراف ڤاوص وناقشها عام 1851.

$$g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{4xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & ; \quad (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & ; \quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

مستمرّتان على $\mathbb{R}^2$.

18) **برهن أنّه إذا كانت $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ دالّة موجبة ومستمرّة عند نقطة (a,b) فإنّه يوجد جوار لهذه النقطة تبقى فيه الدالّة f موجبة.**

19) **ادرس استمرار الدالّة $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ المعطاة على $\mathbb{R}^2$ بـ:**

$$f(x,y)=\left(\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & ; (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & ; (x,y)=(0,0),\end{cases} ; \begin{cases}\dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2} & ; (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & ; (x,y)=(0,0),\end{cases}\right)$$

20) **ادرس التمديد بالاستمرار إلى $\mathbb{R}^2$ للدالّة $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ المعرّفة بـ:**

$$f(x,y)=\left(\frac{xy^2}{x^2+y^2},\frac{\cos x-\cos y}{x-y}\right);$$

ثمّ اعط الدالّة الممدّدة إن أمكن.

14.1 حلول

1) إذا رمزنا لميدان تعريف f بـ D_f وتذكّرنا أنّ الدالّة اللوغاريتميّة معرّفة على $\mathbb{R}_+^*$ تبيّن على الفور أنّ:

$$D_f = D((0,0),2) \cap C_{\mathbb{R}^2} D((0,0),1) \cap \left(\mathbb{R}^2 \setminus C\left((0,0),\sqrt{2}\right)\right),$$

حيث:

$$D((0,0),2) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4\right\},$$

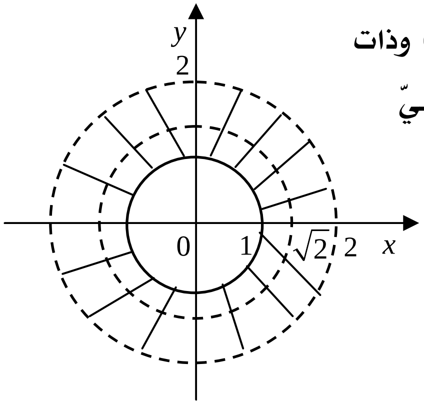
هو القرص المفتوح المتمركز عند $(0,0)$ وذو نصف القطر 2 ؛

$$C_{\mathbb{R}^2} D((0,0),1) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\right\},$$

هو متمّمة القرص المغلق المتمركز عند $(0,0)$ وذو نصف القطر 1 ؛

$$\mathbb{R}^2 \setminus C\left((0,0),\sqrt{2}\right) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \neq 2\right\},$$

هو متمّمة الدائرة المتمركزة عند $(0,0)$ وذات نصف القطر $\sqrt{2}$. يأتي التمثيل الهندسيّ في معلم متعامد متجانس على النحو المشطوب المقابل.



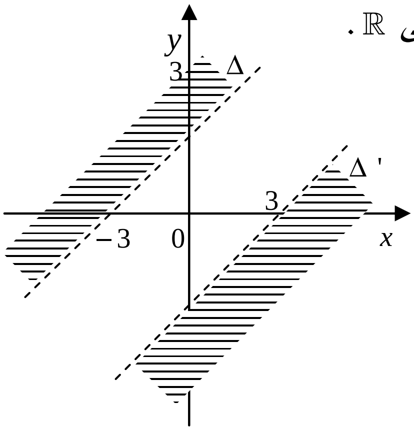
لدينا بخصوص الدالّة g :

$$D_g = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 - 2xy + y^2 - 9 = (x-y-3)(x-y+3) > 0\right\},$$

ذلك لأنّ الدالّة قوس الظل معرّفة على $\mathbb{R}$.

إنّه الحيّز من المستوي الواقع خارج الشريط الذي يحدّه المستقيمان Δ **و** Δ' **ذوا المعادلتين** $y = x+3$ **و** $y = x-3$.

يأتي التمثيل الهندسيّ في معلم متعامد متجانس على النحو المقابل.



2) $1)$ **لنلاحظ أنّ الدالة الحاضرة معرّفة على** $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ **. بعد هذا، نعلم أنّ الخطوط المستواتية من الرتبة** k **من** $\mathbb{R}$ **هي:**

$$L_f(k) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} : \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = k\right\}$$
$$= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} : (1-k)x^2 = (1+k)y^2\right\}$$
$$= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} : y = \pm\sqrt{\frac{1-k}{1+k}}\, x\right\}.$$

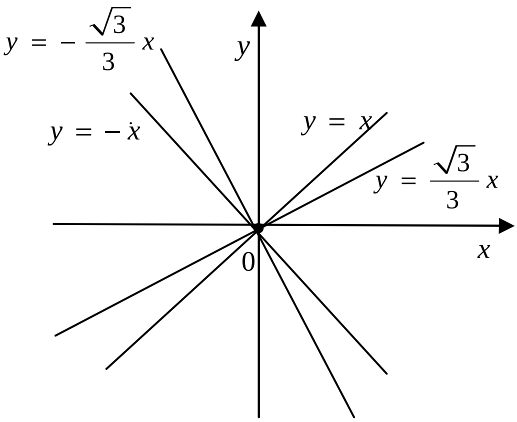
نستنتج على التوّ أنّه:

- **إذا كان** k **من** $]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$ **كانت** $L_f(k)$ **خالية،**
- **إذا كان** k **من المجال** $]-1,1[$ **كانت** $L_f(k)$ **اتّحادا للمستقيمين ذوي المعادلتين** $y = -\sqrt{\frac{1-k}{1+k}}\, x$ **و** $y = \sqrt{\frac{1-k}{1+k}}\, x$ **، محذوفا منهما الصفر.**

2) لنرسم مثلا $L_f(0)$ و $L_f\left(\frac{1}{2}\right)$. لدينا:

$$L_f(0)=\left\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} : y=\pm x\right\};$$

$$L_f\left(\frac{1}{2}\right)=\left\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} : y=\pm \frac{\sqrt{3}}{3}x\right\}.$$



3) دعني أهمس في أذنك أنّ المتباينات المحمولة على هذا التمرين والإثنين اللذين يليانه على درجة كبيرة من الأهمية في التحليل الرياضياتي. إنّها تدخلك منذ الآن في معترك البراهين التي سوف تكون زادك اليومي المتواصل في مستقبل ما ينتظرك من الدراسات العليا ...

نميّز الحالات الممكنة الثلاث التالية.

أ. إذا كان $a=0$ أو $b=0$ أضحت العلاقة واضحة.

ب. إذا كان $a>0$ و $b>0$ عمدنا إلى إدراج الدالّة الحقيقيّة المعطاة على $\mathbb{R}_+^*$ بـ:

$$f(x)=\frac{x^p}{p}-x;$$

ونستعين بتغيّراتها.

هذه الدالّة قابلة للاشتقاق ومحدودة وتدرك حدّها الأدنى عند النقطة التي فاصلتها $x_0 = 1$، ذلك لأنّ هذه الأخيرة تعدم المشتقّ:

$$f'(x) = x^{p-1} - 1,$$

ولدينا إلى جانب ذلك:

$$f''(x) = (p-1)x^{p-2} > 0.$$

وعليه:

$$f(x) \geq f(1), \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*.$$

وبالخصوص:

$$f\left(ab^{1-q}\right) \geq f(1);$$

أي:

$$\frac{\left(ab^{1-q}\right)^p}{p} - ab^{1-q} \geq \frac{1}{p} - 1 = -\frac{1}{q}.$$

وبالتالي:

$$\frac{a^p}{p} b^{(1-q)p} - ab^{1-q} + \frac{1}{q} \geq 0.$$

إذا قسمنا طرفي هذه المتباينة على $b^{(1-q)p}$ حصلنا على:

$$\frac{a^p}{p} - ab^{(1-q)-p+pq} + \frac{b^{-(1-q)p}}{q} \geq 0.$$

ولمّا كان $pq = p + q$ و $-(1-q)p = q$ جاءنا:

$$\frac{a^p}{p} - ab + \frac{b^q}{q} \geq 0.$$

ومنه:

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q};$$

وهو المبتغى.

ملحوظة

يمكن بطبيعة الحال الخوض في البرهان على هذا المنوال:

$$ab = e^{Log\, a + Log\, b} = e^{\frac{1}{p}Log\, a^p + \frac{1}{q}Log\, b^q} \le \frac{1}{p}e^{Log\, a^p} + \frac{1}{q}e^{Log\, b^q} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

يكمن قيام المتباينة التي تتوسّط هذه العلاقة في تحدّب الدالّة الأسيّة $x \mapsto e^x$.

ج. إذا كان a و b كيفيّين لاحظنا أنّ:

$$|ab| = |a||b|.$$

يسمح الفرع (ب) بالحصول على المتباينة المنشودة:

$$|ab| = |a||b| \le \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}.$$

4) نميّز حالتين:

أ. $x_i \ge 0,\ \ y_i \ge 0;\ i = 1, 2, ..., n$

لنضع:

$$A = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,p}\right)^{\frac{1}{p}},\ \ B = \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^{\,q}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

إذا كان $A = 0$ أو $B = 0$ أضحت المتباينة تافهة.

لنفترض أنّ A و B ليسا معدومين ولنضع:

$$a_i = \frac{x_i}{A},\ \ b_i = \frac{y_i}{B};\ i = 1, 2, ..., n.$$

تسمح متباينة يونغ أعلاه بالحصول على:

$$a_i b_i \le \frac{a_i^p}{p} + \frac{b_i^q}{q},\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

ومنه:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \le \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^p}{p} + \frac{\sum_{i=1}^{n} b_i^q}{q}.$$

بتعويض a_i **و** b_i **بقيمتيهما نجد:**

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i y_i}{AB} \le \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{A}\right)^p}{p} + \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{y_i}{B}\right)^q}{q}.$$

نستخلص أنّ:

$$\frac{1}{AB} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \le \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^p}{pA^p} + \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^q}{qB^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

وأخيرا:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \le AB = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

ب.إذا كانت x_i **و** y_i **أعدادا حقيقيّة (أو عقديّة) كيفيّة أمكن أن نكتب بالارتكاز على ما سبق:**

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| = \sum_{i=1}^{n} |x_i||y_i| \le \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

إنّها المتباينة المطلوبة !

5) إذا كان $p=1$ كتبنا توّا:

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|\le\sum_{i=1}^{n}|x_i|+\sum_{i=1}^{n}|y_i|,$$

وهي نتيجة واضحة. إذا كان $p>1$ م ميزنا حينئذ حالتين كعهدنا بما سبق .

أ. لنفترض أنّ x_i و y_i $(i=1,2,...,n)$ أعداد موجبة ولنضع:

$$z_i=(x_i+y_i)^{p-1}.$$

إذا استندنا إلى متباينة هولدر السابقة حصلنا على:

$$\sum_{i=1}^{n}x_i z_i\le\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}z_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

وإذا تذكّرنا أنّ $q=\dfrac{p}{p-1}$ كتبنا من جديد:

$$\sum_{i=1}^{n}x_i z_i\le\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}z_i^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}. \qquad (*)$$

وبالمثل، لدينا:

$$\sum_{i=1}^{n}y_i z_i\le\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}z_i^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}. \qquad (**)$$

وبجمع النتيجتين (*) و(**) طرفا طرفا ينتج:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\le\left(\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}z_i^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

وباستبدال z_i بقيمته وضرب طرفي هذه المتباينة في $\left(\sum_{i=1}^{n} z_i^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}$ نحصل على:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right)\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right)^{\frac{1-p}{p}} \le \left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^p\right)^{\frac{1}{p}};$$

وهو ما يؤدّي إلى المرغوب:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

ب. إذا كانت x_i و y_i $(i=1,2,...,n)$ أعدادا حقيقيّة أو عقديّة كيفيّة لاحظنا كالعادة أنّ:

$$|x_i+y_i| \le |x_i|+|y_i|.$$

ومنه:

$$|x_i+y_i|^p \le \left(|x_i|+|y_i|\right)^p.$$

وبمقتضى الحالة (أ) نحصل على:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{i=1}^{n}\left(|x_i|+|y_i|\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}};$$

وهو ما ينهي البرهان.

6) التطبيق N_1 لا يعرّف نظيما على $\mathbb{R}^3$، ذلك لأنّه لا يحقّق شرط الفصل [ش1]، إذ ينعدم خارج $(0,0,0)$ (عند $(1,1,2)$ مثلا، وغيرها كثير).

الحال كذلك بالنسبة للتطبيق N_2، ذلك لأنّه ينعدم عند كلّ نقطة $(0,0,z)$، حيث z من $\mathbb{R}$، وهو ما يغيّب عنه الشرط الأوّل [ش1].

التطبيق N_3 يعرّف نظيما على $\mathbb{R}^3$. ليس صعبا عليك أن تقف على توّفر شرطي الفصل [ش1] والتجانس [ش2]. لنفحص معا شرط المتباينة المثلّثية [ش3].

علينا أن نبيّن أنّ:

$$N_3(x+x',y+y',z+z') \leq N_3(x,y,z)+N_3(x',y',z');$$

أي:

$$|x+x'|+2|y+y'|+\frac{|z+z'|}{1+|z+z'|} \leq |x|+2|y|+\frac{|z|}{1+|z|}+|x'|+2|y'|+\frac{|z'|}{1+|z'|}$$

إذا استحضرنا المتباينة المثلّثيّة لدى القيمة المطلقة وتسلّحنا بها أمكن أن نردّ المسألة إلى إثبات المتباينة:

$$\frac{|z+z'|}{1+|z+z'|} \leq \frac{|z|}{1+|z|}+\frac{|z'|}{1+|z'|}.$$

من أجلها نكتب بالاستعانة بالمتباينة المثلّثيّة لدى القيمة المطلقة من جديد:

$$\frac{|z+z'|}{1+|z+z'|}=1-\frac{1}{1+|z+z'|} \leq 1-\frac{1}{1+|z|+|z'|}=\frac{|z|+|z'|}{1+|z|+|z'|}$$
$$\leq \frac{|z|}{1+|z|+|z'|}+\frac{|z'|}{1+|z|+|z'|} \leq \frac{|z|}{1+|z|}+\frac{|z'|}{1+|z'|}.$$

إنّه المطلوب.

7) $1)$ **نعلم أنّ:**

$$\big|\|x\|-\|y\|\big| \leq \min\left(\|x+y\|,\|x-y\|\right) \leq \|x\|+\|y\|.$$

وعليه:

$$1-\frac{2\|x\|\|y\|^2}{\|x\|^2+\|y\|^2}\le\frac{\|x+y\|^2+\|x-y\|^2}{2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)}\le 2,$$

وبالتالي:

$$1-\inf_{x,y\in E\setminus\{0\}}\frac{2\|x\|\|y\|}{\|x\|^2+\|y\|^2}\le\mu(E)\le 2;$$

ومنه النتيجة.

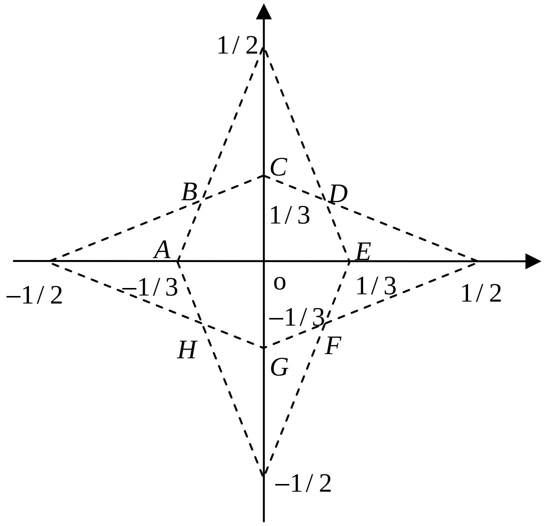
2) لدينا بالتعويض المباشر $u(\mathbb{R}^2)=1$.

8) 1) واضح.

2) لدينا:

$$\begin{aligned}
B_{f,u}(0,1)&=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:u(x,y)\le 1\right\}\\
&=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\max\left\{|x|,|y|\right\}+2\left(|x|+|y|\right)\le 1\right\}\\
&=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:3|x|+2|y|\le 1\ ;\ 2|x|+3|y|\le 1\right\}\\
&=\left\{\begin{array}{l}(x,y)\in\mathbb{R}^2:\left(3x+2y\le 1,x\ge 0,y\ge 0\right),\\
\left(3x-2y\le 1,x\ge 0,y\le 0\right),\left(-3x+2y\le 1,x\le 0,y\ge 0\right),\\
\left(-3x-2y\le 1,x\le 0,y\le 0\right),\left(2x+3y\le 1,x\ge 0,y\ge 0\right),\\
\left(2x-3y\le 1,x\ge 0,y\le 0\right),\left(-2x+3y\le 1,x\le 0,y\ge 0\right),\\
\left(-2x-3y\le 1,x\le 0,y\le 0\right).\end{array}\right\}
\end{aligned}$$

تأتي $B_f^{\alpha}(0,1)$ ممثّلة بالحيز المحاط بالمضلّع $ABCDEFGH$ في الرسم الموالي:



9) لنذكّر بالتعريف المعني:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \ell \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon)\in \mathbb{N} / \forall n\in \mathbb{N}:\ n \ge n_0 \Rightarrow \left\| x_n - \ell \right\| \le \varepsilon.$$

ليكن $\varepsilon > 0$. نكتب في الحالة الأولى:

$$\left\| U_n - (0,0) \right\|_1 = \left\| \left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n} \right) \right\|_1 = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} \le \frac{2}{n} \le \varepsilon.$$

يتبيّن على التوّ أنّ أخذ الرتبة $n_0 = \left[\frac{2}{\varepsilon} \right] + 1$ يغني.

لنعالج الحالة الثانية. نكتب بالمثل:

$$\begin{aligned}\left\| V_n - (1,-1) \right\|_\infty &= \left\| \left(1 - \sin\frac{n\pi}{2n+1}, -1 - \cos\frac{n\pi}{n+1} \right) \right\|_\infty \\ &= \max\left(\left| 1 - \sin\frac{n\pi}{2n+1} \right|, \left| -1 - \cos\frac{n\pi}{n+1} \right| \right)\end{aligned}$$

$$= \max\left(1-\sin\frac{n\pi}{2n+1}, 1+\cos\frac{n\pi}{n+1}\right)$$

$$= \max\left(1-\cos\frac{1}{2}\frac{\pi}{2n+1}, 1-\cos\frac{\pi}{n+1}\right) = 1-\cos\frac{\pi}{n+1}$$

$$= 2\sin^2\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right) \leq 2\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right)^2 \leq \frac{\pi^2}{2n} \leq \varepsilon.$$

نستخلص على ضوء هذا الحساب أنّه يكفي أخذ الرتبة $n_0 = \left[\frac{\pi^2}{2\varepsilon}\right] + 1$.

10) لدينا بخصوص المتتالية (u_n) :

$$\lim_{n\to\infty} tg\frac{1}{n} = 0; \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1+n^2}{1+n+n^2} = 1; \quad \lim_{n\to\infty}\frac{\cos n^2}{n^3} = 0.$$

نستنتج بموجب القضية $(3.6.1)$ أنّ المتتالية (u_n) تتقارب نحو $\ell = (0,1,0)$.

لنعالج المتتالية الثانية (v_n) . ليس صعبا أن نلاحظ أنّ مركّبتي (v_n) الثانية والثالثة تتقاربان على التوالي نحو 2 و 0 . نكتب بشأن المركّبة الأولى:

$$\frac{n+1}{n+n} \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+n} \leq \frac{n+1}{n};$$

ولمّا كانت:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1,$$

خلصنا بمقتضى مبرهنة الحصر إلى أنّ:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+n}\right) = 1.$$

نختم بأنّ المتتالية (v_n) تتقارب نحو النهاية $\ell=(1,2,0)$.

لنفحص في الأخير المتتالية (w_n). لدينا الحساب المعهود:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{thn}=+\infty;\quad \lim_{n\to\infty}\frac{shn}{e^n}=\frac{1}{2};\quad \lim_{n\to\infty}\frac{e^n}{chn}=2.$$

ينجم عنه أنّ المركبّة الأولى متباعدة. إنّ ذلك كاف لإعلان المتتالية (w_n) متباعدة.

11) 1) ليكن $\varepsilon>0$ و p و q عددين طبيعيّين بحيث $q<p$. نكتب عندئذ:

$$\begin{aligned}
\left\|u_p-u_q\right\|_1 &= \left|\sin\frac{p}{1+p^2}-\sin\frac{q}{1+q^2}\right|+\left|\cos\frac{p}{1+p^2}-\cos\frac{q}{1+q^2}\right| \\
&= 2\left|\sin\left(\frac{\frac{p}{1+p^2}-\frac{q}{1+q^2}}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{p}{1+p^2}+\frac{q}{1+q^2}}{2}\right)\right|+ \\
&\quad +2\left|\sin\left(\frac{\frac{p}{1+p^2}+\frac{q}{1+q^2}}{2}\right)\sin\left(\frac{\frac{p}{1+p^2}-\frac{q}{1+q^2}}{2}\right)\right|
\end{aligned}$$

نعلم أنّ:

$$\left|\sin\left(\frac{\frac{p}{1+p^2}-\frac{q}{1+q^2}}{2}\right)\right|\left|\cos\left(\frac{\frac{p}{1+p^2}+\frac{q}{1+q^2}}{2}\right)\right|\le$$

$$\le\left|\sin\left(\frac{\frac{p}{1+p^2}-\frac{q}{1+q^2}}{2}\right)\right|\le\left|\frac{\frac{p}{1+p^2}-\frac{q}{1+q^2}}{2}\right|;$$

$$\left|\sin\left(\frac{\frac{p}{1+p^2}-\frac{q}{1+q^2}}{2}\right)\right|\left|\sin\left(\frac{\frac{p}{1+p^2}+\frac{q}{1+q^2}}{2}\right)\right|\le$$

$$\le\left|\sin\left(\frac{\frac{p}{1+p^2}-\frac{q}{1+q^2}}{2}\right)\right|\le\left|\frac{\frac{p}{1+p^2}-\frac{q}{1+q^2}}{2}\right|.$$

وعليه:

$$\left\|u_p-u_q\right\|_1\le 2\left|\frac{p}{1+p^2}-\frac{q}{1+q^2}\right|\le 2\frac{(p-q)(pq-1)}{(1+p^2)(1+q^2)}$$

$$<\frac{2p^2q}{(1+p^2)(1+q^2)}<\frac{2q}{(1+q^2)}<\frac{2}{q}\le\varepsilon;$$

يكفي الأخير أخذ الرتبة $n_0=\left[\frac{2}{\varepsilon}\right]+1$ للجزم بأنّ $(u_n)_n$ كوشيّة.

2) المتتالية متقاربة لأنّها كوشيّة. لدينا بشأن نهايتها ببساطة:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sin\frac{n}{1+n^2},\cos\frac{n}{1+n^2}\right)$$
$$=\left(\lim_{n\to\infty}\sin\frac{n}{1+n^2},\lim_{n\to\infty}\cos\frac{n}{1+n^2}\right)=(0,1).$$

12) 1) نكتب بمقتضى مبرهنة التزايدات المنتهية :

$$\forall x,x'\in\mathbb{R}\quad \exists c_{xx'}>0 / thx-thx'=(x-x')\frac{1}{ch^2c_{xx'}};$$
$$\forall x,x'\in\mathbb{R}\quad \exists d_{xx'}>0 / Argshx-Argshx'=(x-x')\frac{1}{\sqrt{1+(d_{xx'})^2}};$$

ولمّا كان:

$$\frac{1}{ch^2c_{xx'}}\geq 1;\quad \frac{1}{\sqrt{1+(d_{xx'})^2}}\geq 1,$$

حصلنا على الفور على المتباينتين.

2) نضع الجملة تحت الشكل:

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{3}thx-\dfrac{1}{4}Argshy,\\ y=\dfrac{1}{4}thy-\dfrac{1}{3}Argshx,\end{cases}$$

ونعتبر الدالّة $\varphi:\left(\mathbb{R}^2,\|.\|_1\right)\to\left(\mathbb{R}^2,\|.\|_1\right)$:

$$(x,y)\mapsto\varphi(x,y)=\left(\frac{1}{3}thx-\frac{1}{4}Argshy,\frac{1}{4}thy-\frac{1}{3}Argshx\right).$$

نلاحظ أنّ كلّ حلّ لجملتنا نقطة صامدة للدالّة φ . يكفي للردّ على السؤال أن تكون هذه الأخيرة مقلّصة في الفضاء $\left(\mathbb{R}^2,\|.\|_1\right)$ البناخيّ، وذلك تطبيقا لمبرهنة النقطة الصامدة لبناخ . بيكار. من أجل ذلك نسوق هذا الحساب. من أجل كلّ (x,y) و (x',y') من $\left(\mathbb{R}^2,\|.\|_1\right)$ لدينا:

$$\left\|\varphi(x,y)-\varphi(x',y')\right\|_1=\left\|\begin{array}{l}\left(\frac{1}{3}thx-\frac{1}{4}Argshy,\frac{1}{4}thy-\frac{1}{3}Argshx\right)-\\ \quad-\left(\frac{1}{3}thx'-\frac{1}{4}Argshy',\frac{1}{4}thy'-\frac{1}{3}Argshx'\right)\end{array}\right\|_1$$

$$=\left|\frac{1}{3}(thx-thx')-\frac{1}{4}(Argshy-Argshy')\right|+$$

$$+\left|\frac{1}{4}(thy-thy')-\frac{1}{3}(Argshx-Argshx')\right|$$

$$\leq\frac{1}{3}\left|thx-thx\right|+\frac{1}{4}\left|Argshy-Argshy'\right|+$$

$$+\frac{1}{4}\left|thy-thy'\right|+\frac{1}{3}\left|Argshx-Argshx'\right|$$

$$\leq\frac{2}{3}\left|x-x\right|+\frac{1}{2}\left|y-y'\right|\leq\frac{2}{3}\left(\left|x-x\right|+\left|y-y'\right|\right)\leq\frac{2}{3}\left\|(x,y)-(x',y')\right\|_1.$$

و.هـ.م

3) إنّه $(0,0)$.

13) لنذكّر بادئ ذي بدء بالتعريف:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)}f(x,y)=0\;\Leftrightarrow\;\forall\varepsilon>0\;\exists\alpha(\varepsilon,(a,b))>0\,/\,\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2:$$

$$\left\|(x-a,(y-b)\right\|<\alpha\;\Rightarrow\;\left|f(x,y)\right|<\varepsilon.$$

لدينا بخصوص النهاية الأولى:

$$\left|x+2y-5\right|=\left|(x-1)+2(y-2)\right|\leq\left|x-1\right|+2\left|y-2\right|$$

$$\leq2\left\|(x,y)-(1,2)\right\|_1\leq\varepsilon;$$

وعليه، يكفي أخذ $\alpha=\frac{\varepsilon}{2}$.

لنستحضر النهاية الثانية، نكتب بشأنها بالمثل:

$$\left|x^2+3y+5\right|=\left|(x^2-1)+3(y+2)\right|=\left|(x-1)(x+1)+3(y+2)\right|\qquad(*)$$

نلاحظ أنّ هذه العبارة ليست محدودة على $\mathbb{R}^2$، الذي يمثّل ميدان تعريف الدالّة المعنية هنا؛ لذا نلجأ إلى دراسة محليّة كأن نضع:

$$\|(x,y)-(-1,-2)\|_1 = |x+1|+|y+2| \le \beta, \quad \beta \in \mathbb{R}_+^*.$$

نستخلص أنّ:

$$|x+1| \le \beta \iff -\beta \le x+1 \le \beta \iff -2-\beta \le x-1 \le \beta-2$$

وبالتالي:

$$|x-1| \le \beta+2.$$

إذا وضعنا $\delta = \beta+2$ وعدنا على العلاقة $(*)$ كتبنا على ضوء ما جدّ:

$$\begin{aligned}|x^2+3y+5| &\le |x-1||x+1|+3|y+2| \le \delta|x+1|+3|y+2| \\ &\le \max(\delta,3)\|(x,y)-(-1,-2)\|_1 \le \varepsilon;\end{aligned}$$

يكفي في الخلاصة أخذ $\alpha = \min\left(\beta, \max(\delta,3)\right) = \beta$.

لمعالجة النهاية الثالثة والأخيرة نقوم باستحضار العلاقتين المعروفتين لدى الدالّتين قوس الظل وعمدة الجيب الزائدي:

$$\forall u \in \mathbb{R} \quad Arctg\, u \ge u, \quad Argsh\, u \le u.$$

على ضوئها يأتي على الفور:

$$\frac{Argsh\left(\dfrac{x^4}{Arctg\, x^2}\right)+\dfrac{1}{Arctg\,\dfrac{1}{Argsh\, y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{\dfrac{x^4}{Arctg\, x^2}+\dfrac{1}{\dfrac{1}{Argsh\, y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\le \frac{\dfrac{x^4}{x^2}+Argsh\, y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \sqrt{x^2+y^2}.$$

يكفي، والحال هذه، أن نأخذ $\alpha = \varepsilon$ في التعريف المذكور.

14) لدينا بالتعويض المباشر:

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x+y-3}{x+5y+4} = \frac{-1}{10};$$

يقودنا التعويض المباشر بشأن النهايتين الثانية والثالثة إلى حالة عدم التعيين $\frac{0}{0}$. لإزالتها بخصوص الثانية نتذكّر النهاية الشهيرة $\lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{u} = 1$ لنجد دونما عناء:

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\sin xy}{x} = \lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\sin x}{x} y = 2;$$

أمّا في النهاية الثالثة فنتذكّر الدستورين المثلّثين:

$$\lim_{u\to 0} \frac{Arc\sin u}{u} = \lim_{u\to 0} \frac{u}{Arctgu} = 1;$$

لنجد على الفور:

$$\lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{Arc\sin(5xy-20)}{Arctg(xy-4)} =$$

$$= 5 \lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{Arc\sin(5xy-20)}{5xy-20} \lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{xy-4}{Arctg(xy-4)} = 5.$$

15) لدينا :

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right) = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^2} = 0; \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^2} = 0;$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{r\to 0 \\ \theta\in[0,2\pi[}} r^2\cos^2\theta\sin^2\theta = 0.$$

لاحظ أنّنا لجأنا إلى الإحداثيات القطبيّة لإزالة حالة عدم التعيين في الحساب الأخير. وبالمثل، لدينا:

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{|x+y|}{x^2+y^2}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{|y|}{y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{|y|}=+\infty;$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{|x+y|}{x^2+y^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{|x|}=+\infty;$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|x+y|}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{r\to 0\\ \theta\in[0,2\pi[}}\frac{|\cos\theta+\sin\theta|}{r}.$$

النهاية الأخيرة متعلّقة بالوسيط θ . وعليه، فهي غير موجودة.

16) لنذكّر في البداية بالتعريف:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=\ell \iff \forall\varepsilon>0\ \exists\alpha(\varepsilon,(a,b))>0/\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2:$$

$$\|(x,y)-(a,b)\|_\infty<\alpha \Rightarrow |f(x,y)-\ell|<\varepsilon.$$

بعد هذا، يمكن بموجب علاقة شال أن نكتب:

$$\begin{aligned}\left|g(x,y)-\int_0^1 f(t)dt\right| &= \left|\int_x^y f(t)dt-\int_0^1 f(t)dt\right|\\ &= \left|\int_x^y f(t)dt-\int_0^x f(t)dt-\int_x^y f(t)dt-\int_y^1 f(t)dt\right|\\ &= \left|\int_0^x f(t)dt+\int_y^1 f(t)dt\right|;\end{aligned}$$

وعليه:

$$\begin{aligned}\left|g(x,y)-\int_0^1 f(t)dt\right| &= \left|\int_0^x f(t)dt+\int_y^1 f(t)dt\right| \le \left|\int_0^x f(t)dt\right|+\left|\int_y^1 f(t)dt\right|\\ &\le \int_0^x |f(t)|dt+\int_y^1 |f(t)|dt;\end{aligned}$$

وبما أنّ f قابلة للمكاملة ريمانيّا على المجال $[0,1]$ فهي محدودة؛ وعليه:

$$\left|g(x,y)-\int_0^1 f(t)dt\right|\le \sup_{0\le t\le 1}|f(t)|\left(\left|\int_0^x dt\right|+\left|\int_y^1 dt\right|\right)=\sup_{0\le t\le 1}|f(t)|\left(|x|+|1-y|\right)$$

$$\le \sup_{0\le t\le 1}|f(t)|\,\left\|\left((x,y)-(0,1)\right)\right\|_1$$

$$\le 2\sup_{0\le t\le 1}|f(t)|\,\left\|\left((x,y)-(0,1)\right)\right\|_\infty<\varepsilon.$$

نستخلص في الأخير أنّه يكفي أخذ $\alpha=\dfrac{\varepsilon}{2\sup\limits_{0\le t\le 1}|f(t)|}$. (لم يفتك أنّنا استعنّا في هذا الحساب الأخير بالمتباينة:

$$\|(x,y)\|_1\le 2\|(x,y)\|_\infty\ .)$$

17) الدالّة f مستمرّة خارج القطر $\Delta=\{(x,x),x\in\mathbb{R}\}$ بمقتضى مبرهنة العمليات الحسابيّة على الدوال الأولية المستمرّة. أمّا عند Δ فنحسب النهاية:

$$\lim_{(x,y)\to(x,x)}\frac{\sin x-\sin y}{x-y}=\lim_{(x,y)\to(x,x)}\frac{\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)}{\left(\frac{x-y}{2}\right)}$$

$$=\lim_{(x,y)\to(x,x)}\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)=\cos x=f(x,x).$$

نرى هكذا أنّ الدالّة f مستمرّة على القطر Δ كذلك. إنّها في الأخير مستمرّة على الفضاء $\mathbb{R}^2$ بأكمله.

الدالّة g مستمرّة خارج النقطة $(0,0)$ بفعل العلّة المذكورة أعلاه ذاتها. أمّا عند $(0,0)$ فنحسب النهاية:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{r\to 0\\ \theta\in[0,2\pi[}} r^2 \sin 4\theta = 0 = g(0,0).$$

لجأنا في هذا الحساب إلى الإحداثيات القطبيّة لرفع حالة عدم التعيين $\frac{0}{0}$.

يتبيّن منه أنّ الدالّة g مستمرّة عند $(0,0)$ أيضا وهو ما ينهي التمرين.

18) يترجم استمرار f عند (a,b) تعريفا:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \alpha(\varepsilon,(a,b)) > 0 /\ \forall (x,y)\in \mathbb{R}^2 :$$
$$\|(x,y)-(a,b)\| < \alpha \ \Rightarrow\ |f(x,y)-f(a,b)| < \varepsilon$$

أي:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \alpha(\varepsilon,(a,b)) > 0 /\ \forall (x,y)\in \mathbb{R}^2 :$$
$$\|(x,y)-(a,b)\| < \alpha \ \Rightarrow\ f(a,b)-\varepsilon < f(x,y) < f(a,b)+\varepsilon$$

نستخلص أنّه من أجل $\varepsilon = \frac{f(a,b)}{2}$ (تذكّر أنّ f موجبة) يمكن أن نكتب بالخصوص:

$$\exists \alpha\left(\frac{f(a,b)}{2},(a,b)\right) > 0 /\ \forall (x,y)\in \mathbb{R}^2 :$$
$$\|(x,y)-(a,b)\| < \alpha \ \Rightarrow\ f(x,y) > \frac{f(a,b)}{2} > 0,$$

وهو ما يفيد أنّ الدالّة f محدودة على الكرة المتمركزة عند (a,b) وذات نصف القطر $\alpha\left(\frac{f(a,b)}{2}\right)$.

19) الدالة f مِؤكّد استمرارها على $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ لكون مركّبتيها كسرين ناطقين مستمرّين. أمّا عند الصفر، فنلاحظ أنّ المركّبة الأولى ليست مستمرّة إذ أنّها لا تقبل نهاية:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{r\to 0\\ \theta\in[0,2\pi[}} (\cos\theta^2 - \sin^2\theta) = \lim_{\substack{r\to 0\\ \theta\in[0,2\pi[}} (\cos 2\theta).$$

هذا كاف للحكم على f بأنّها ليست مستمرّة عند الصفر.

20) الدالة f مستمرّة خارج القطر $\Delta=\{(x,x), x\in\mathbb{R}\}$ لكون مركّبتها الأولى كسرا ناطقا مستمراً خارج الصفر ومركّبتها الثانية نسبة لدالتين أوليين مقامها ينعدم على Δ.

المركّبة الأولى تقبل التمديد بالاستمرار إلى الصفر ذلك لأنّ:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{r\to 0\\ \theta\in[0,2\pi[}} r\cos\theta\sin^2\theta = 0;$$

أمّا بخصوص المركّبة الثانية فنكتب بشأن قابليتها للتمديد بالاستمرار إلى Δ:

$$\lim_{(x,y)\to(x,x)} \frac{\cos x-\cos y}{x-y} = \lim_{(x,y)\to(x,x)} \frac{-2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)}{x-y}$$

$$= -\lim_{(x,y)\to(x,x)} \frac{\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)}{\left(\frac{x-y}{2}\right)} \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) = -\sin x.$$

نستخلص أنّ الدالّة f تقبل التمديد بالاستمرار إلى $\mathbb{R}^2$ بأكمله والدالّة الممدّدة معرّفة على النحو:

$$\widetilde{f}(x,y) = \left(\begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}; & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 \quad ; & (x,y)=(0,0) \end{cases} \; ; \; \begin{cases} \dfrac{\cos x-\cos y}{x-y}; & x\neq y \\ \sin x \quad ; & x=y \end{cases} \right).$$

15.1 تمارين للبحث

1) لتكن الميادين التالية:

$$D_1=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / y-2x^2-x<0;\ y-x>0;\ x>0;\ x<1\right\};$$

$$D_2=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 /-1\le y+x\le 1;\ -1\le y-x\le 1\right\};$$

$$D_3=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 /1<x^2+y^2<4\right\};$$

$$D_4=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2-2(x+2y)+1\le 1;\ y-2x\ge 0;\ \ x\ge 1\right\}.$$

صفها ثمّ ارسمها في معلم متعامد متجانس.

2) الميدانان المواليان موصوفان هندسيّا. قم برسمهما ثمّ عرّفهما بواسطة متباينات:

D_1 **هو الحيّز من المستوي المحاط بالمثلّث (بما فيه المثلّث)** ABC **حيث** $A(1,1)$ و $B(2,4)$ و $C(4,2)$ ؛

D_2 **هو مجموعة النقاط داخل الرباعي** $ABCD$ **(دون احتساب نقاط الرباعي) وخارج القرص المغلق ذي المركز** E **ونصف القطر** 1 **حيث** $A(1,0)$ و $B(1,3)$ و $C(3,5)$ و $D(4,1)$ و $E(2,2)$.

3) عيّن ميادين تعريف الدوال المعطاة بالعبارات التالية:

$$f_1(x,y)=1-x^2-y^2;\ f_2(x,y)=\frac{x-y}{x^2+y^2};$$

$$f_3(x,y)=3x^4+5y^2;\ \ f_4(x,y)=\sqrt{1-xy};$$

4) عيّن ثمّ مثّل هندسيّا في معلم متعامد متجانس ميادين تعريف الدوال الموالية:

$$f(x)=Log(x^2+y^2-4x-6y+4);\ g(x,y)=\frac{-3y}{Argch(x^2+y^2+1)};$$

$$h(x)=Log(x+2y+1)+\sqrt{1-x^2-y^2};\ i(x,y)=\frac{x^2-y^2}{Arc\sin(x^2+y^2)}.$$

5) عيّن ميادين تعريف الدوال الآتية مع التمثيل الهندسي:

$$a(x,y)=\sqrt{x^2-y^2}\ ;\ b(x,y)=Log(x+y-1);\ c(x,y)=\frac{Log(x^2+y^2-1)}{\sqrt{2-x^2-y^2}};$$

$$d(x,y)=\sqrt{xy+\frac{y}{x}};\ e(x,y)=Arc\sin xy\ ;\ f(x,y)=\frac{y}{(y-1)\sqrt{x}};$$

$$g(x,y)=\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x+y}};\ h(x,y)=L\text{og}\left(\frac{x+y}{x-y}\right);\ i(x,y)=\frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}};$$

$$j(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x-\sqrt{y}}};\ \ k(x,y)=\sqrt{x^2-4}+\sqrt{4-y^2};$$

$$\ell(x,y,z)=Arc\sin x+Arc\sin y+Arc\sin z.$$

6) عيّن ميادين تعريف كلّ من الدوال التالية:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{y}\ ,y\neq 0\\ 1\ ,y=0\end{cases};\ g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{Arc\sin x+Arc\sin y}{x^2+y^2},(x,y)\neq(0,0)\\ 2\qquad\qquad\qquad\qquad ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$h(x,y)=\sqrt{x^2-4}+\sqrt{4-y^2};\ i(x,y)=\frac{\sqrt{1-x^2-y^2}}{Log(x^2+y^2-4)}$$

$$j(x,y)=Arc\sin\frac{x}{y};\ k(x,y)=Log\sin\frac{y}{x}.$$

7) أ. لتكن الدالّتان $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ و $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ بحيث:

$$F(x,y)=xf\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$F(1,y)=\sqrt{1+y^2}.$$

اعط عبارة الدالّة F.

ب. لتكن الدالّة $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ بحيث:

$$f(x,y) = xy + y^2.$$

نضع $X = x+y$ و $Y = x-y$. اعط عبارة الدالّة f بدلالة المتغيّرين الجديدين.

8) عيّن الخطوط المستواتيّة للدوال التالية:

$$a(x,y) = x+y;\ \ b(x,y) = 5x-7y;\ \ c(x,y) = y-x^2;$$
$$d(x,y) = x-y^2;\ \ \ e(x,y) = x^2-y^2\,;\ f(x,y) = 3x^2+3y^2.$$

9) لتكن الدالّة $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ المعطاة بـ:

$$f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2-y}}.$$

1) عيّن خطوط f المستوية وكذا صورتها.

1) ارسم خطّين مستواتيّين لـ f .

10) جد خطوط المستوي في الحالات التالية:

$$1)\ f(x,y) = x+y\ \ ;\ \ 2)\ g(x,y) = x^2+y^2;$$
$$3)\ h(x,y) = \sqrt{xy}\ \ ;\ \ 4)\ k(x,y) = Log(x^2+y^2).$$

11) أيّ من التطبيقات الأربعة التالية يعرّف نظيما على $\mathbb{R}^4$:

$$(x,y,z,t) \mapsto |x+z| + |y+t|;$$
$$(x,y,z,t) \mapsto |x+z| - |y+t|;$$
$$(x,y,z,t) \mapsto |x-z| + |y-t|;$$
$$(x,y,z,t) \mapsto |x-z| - |y-t|.$$

12) ليكن $a = (2,6,2)$ و $b = (-2,-2,6)$ عنصرين من $\mathbb{R}^3$.

1) احسب $\|a\|_1$ و $\|a\|_2$ و $\|a\|_\infty$ و $\|b\|_1$ و $\|b\|_2$ و $\|b\|_\infty$. ماذا تلاحظ؟

2) هل الزعمان المواليان صحيحان:

أ. $\|u\| = \|v\| \quad \Rightarrow \quad u = v?$

ب. $\|u - v\| = 0 \quad \Rightarrow \quad u = v?$

13) ليكن $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ و $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ عنصرين من $\mathbb{R}^n$. نضع

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=}^{n} x_i y_i; \qquad \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i}.$$

برهن أنّ:

1) $$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x, x', y \in \mathbb{R}^n : \langle(\alpha x + \beta x'), y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle + \beta\langle x', y\rangle;$$

2) $$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x, y, y' \in \mathbb{R}^n : \langle x, (\alpha y + \beta y')\rangle = \alpha\langle x, y\rangle + \beta\langle x, y'\rangle;$$

3) $$\|x\|^2 + \|y\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2\right);$$

4) $$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\right).$$

14) ليكن λ وسيطا حقيقيّا. من أجل كلّ (x, y) من $\mathbb{R}^2$ نضع:

$$N_\lambda(x, y) = \sqrt{x^2 + 2\lambda xy + y^2}.$$

1) ما هي قيم الوسيط λ التي من أجلها يكون N_λ معرّفا على $\mathbb{R}^2$ ؟

2) جد قيم الوسيط λ التي من أجلها يعرّف N_λ نظيما على $\mathbb{R}^2$.

15) ليكن a و b عددين حقيقيّين موجبين تماما. من أجل كلّ x و y من $\mathbb{R}^2$ نضع:

$$\|(x, y)\| = \sqrt{a^2x^2 + b^2y^2}.$$

1) برهن أنّ $\left(\mathbb{R}^2, \|.\|\right)$ فضاء نظيميّ.

2) مثّل هندسيّا، في معلم متعامد متجانس، كرة الوحدة في $\left(\mathbb{R}^2, \|.\|\right)$.

3) عيّن العدد الحقيقيّ الأصغر $0<\alpha$ بحيث:

$$\forall u \in \mathbb{R}^2 \ \|u\| \leq \alpha \|u\|_2 .$$

4) عيّن بالمثل، العدد الحقيقيّ الأكبر $0<\beta$ بحيث:

$$\forall u \in \mathbb{R}^2 \ \|u\| \geq \beta \|u\|_2 .$$

5) اثبت أنّ النظيمين $\|.\|$ و(الأساسيّ) $\|.\|_2$ متكافئان.

16) نسمّي مفتوحا في $(\mathbb{R}^n, \|.\|)$ كلّ جزء يكون جوارا لكلّ نقاطه.

1) برهن أنّ كلّ كرة مفتوحة من $(\mathbb{R}^n, \|.\|)$ جزء مفتوح.

2) استنتج أنّ كلّ نقطة من $(\mathbb{R}^n, \|.\|)$ تتمتّع بجوار مفتوح.

3) برهن أنّ جماعة مفتوحات $(\mathbb{R}^n, \|.\|)$ مستقرّة إزاء عمليتي الاتحاد (الكيفي) والتقاطع (المنتهي).

4) اثبت أنّ جماعة جوارات نقطة a من $(\mathbb{R}^n, \|.\|)$ مستقرّة إزاء عمليتي الاتحاد (الكيفي) والتقاطع (المنتهي).

5) اثبت كلّ جزء يضمّ جوارا لنقطة a من $(\mathbb{R}^n, \|.\|)$ جوار (هو الآخر) لـ a.

17) اثبت مستدلاّ بالتعريف أنّ المتتالية المعرّفة بـ $U_n = \left(\frac{2n^2}{n^2+3}, \frac{n+1}{n-2} \right)$ متقاربة نحو $(2,1)$ في $\mathbb{R}^2$ المزوّد بنظيميه الأساسيّين $\|.\|_2$ و$\|.\|_\infty$ على التوالي.

18) نعرّف في $(\mathbb{R}^2, \|.\|_\infty)$ المتتاليات الموالية:

$$1)\ a_n = \left(\left(\frac{n-1}{n+1} \right)^n, \frac{1+Logn}{Logn} \right); \quad 2)\ b_n = \left(\frac{n-1}{n+1}, \frac{(-1)^n}{n^2+1} \right);$$

$$3)\ c_n = \left(\frac{\sin n}{n}, \frac{e^n}{n} \right); \quad 4)\ d_n = \left(e^{-n}, (-1)^n \right);$$

ما هي طبيعتها ؟

19) لتكن $(X_n)_n$ المتتالية التراجعيّة من $\left(\mathbb{R}^2,\|.\|\right)$ المعرّفة بـ:

$$\begin{cases} X_{n+1}=\left(x_{n+1},y_{n+1}\right)=\dfrac{1}{10}\left(\sin x_n+\cos y_n,\cos x_n-\sin y_n\right), \\ X_0=\left(x_0,y_0\right)\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

1) برهن أنّ:

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\ \ \left\|X_{n+1}-X_n\right\|\leq\frac{1}{5}\left\|X_n-X_{n-1}\right\|.$$

2) استنتج أنّ المتتالية $(X_n)_n$ كوشيّة. نرمز لنهايتها بـ $\ell=(\alpha,\beta)$.

3) اكتب الجملة الجبريّة التي تحقّقها النهاية (α,β).

20) برهن أنّ الجملة:

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{10}(3\sin x+2\cos y-\sin z), \\ y=\dfrac{1}{10}(\cos x+3\sin y+2\sin x), \\ z=\dfrac{1}{10}(\cos x+3\sin y-3\cos z), \end{cases}$$

تقبل حلّا وحيدا في الفضاء النظيميّ $\left(\mathbb{R}^3,\|.\|_1\right)$.

21) لتكن الدالّة $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$ المعطاة بـ:

$$f(x,y)=\frac{xy^2}{x^2+y^4}.$$

1) احسب النهاية $\lim\limits_{t\to 0}f(t^2,t)$ و $\lim\limits_{t\to 0}f(t,at)$، حيث a اختياريّ من $\mathbb{R}$

2) هل تقبل الدالّة f نهاية عند $(0,0)$ ؟

3) احسب (في حالة وجودها) النهاية المتعاقبة $(\lim(\lim f(x,y))$ والنهاية عند $(0,0)$ في الحالتين التاليتين:

$$f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^4+y^4}\ ;g(x,y)=|x|^y .$$

22) لتكن الدالّة الحقيقيّة f المعرّفة بـ :

$$f(x,y)=\begin{cases}(x+y)^2\cos\frac{1}{x}\cos\frac{1}{y}\ ;\ xy\neq 0,\\ 0\ ;\ xy=0.\end{cases}$$

بيّن أنّ النهايتين $\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y))$ و $\lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y))$

غير موجودتين، بيد أنّ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$.

23) ادرس وجود النهايات $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right)$ و $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right)$

و $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ عند هذه الدوال:

$$f(x,y)=\frac{2x+y}{x-y};\ \ g(x,y)=\frac{x^2}{x^2+y^2};$$

$$h(x,y)=x\sin\left(x+\frac{1}{y}\right);\ \ i(x,y)=\frac{x^2y-xy^2}{x^2+y^2};$$

$$j(x,y)=\frac{x^py^p}{x^2-xy+y^2};\ \left((p,q)\in\mathbb{N}^2\right).$$

24) 1) بيّن مستعملا التعريف "الإبسيلوني" $(\forall\varepsilon>0\ \exists\alpha(\varepsilon)>0...)$ أنّ:

$$\lim_{(x,y)\to(2,3)}(x^2+y^2)=13;$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,-1)}(x^2+y^2-2yx-11)=-10.$$

2) هل للدالّة :

$$f(x,y)=\begin{cases}(x+2y)\ ;\ (x,y)\neq(1,2),\\ 1\ ;\ (x,y)=(1,2),\end{cases}$$

نهاية عند $(1,2)$ ؟

25) احسب نهايات الدوال التالية في جوار النقاط المرافقة لها:

$$1)\,\frac{x+y}{x^2+y^2},(+\infty,+\infty);\quad 2)\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},(0,0);$$

$$3)\left(\frac{x^2y+xy^2}{x^2+y^2},\sqrt{x^2+y^2}\right),(0,0);\quad 4)\left(\frac{\sin xy}{x},xy\,Log\left|xy\right|\right),(0,2);$$

$$5)\left(\frac{Arc\sin x}{x},\frac{e^x-1}{x},\frac{\sin^2 x^2}{x^3}\right),(0).$$

26) احسب نهايات الدوال الشعاعيّة التالية في جوار النقاط المرافقة لها:

$$f(t)=\left(\frac{t+1}{t^2-1},t^2+2t-3,t\right),\ (-1);$$

$$g(t)=\left(\frac{\sin t}{t},\frac{sin2t}{t},\frac{sin3t}{t}\right);\ (0);$$

$$h(t)=\left(\frac{e^t-1}{t},\frac{2t}{Log(1+t)},\frac{1-\cos t}{3t^2}\right);\ (0).$$

27) لتكن الدالّة الحقيقيّة g المعرّفة بـ:

$$g(x,y)=\frac{Log(1+y^2)+x\sin x}{x^2+y^2}.$$

1) **بيّن أنّ** $Log(1+y^2)$ **يكافئ** y^2 **في جوار** 0.

2) **بيّن أنّ** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)=1$.

28) لتكن الدالّة الحقيقيّة:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{|y|}{x^2}e^{-\frac{|y|}{x^2}} & ;\ x\neq 0,\\ 0 & ;\ x=0.\end{cases}$$

ليكن λ وسيطا حقيقيّا. نضع:

$$E_\lambda = \{(x, \lambda x), x \in \mathbb{R}\},$$
$$F = \{(x, x^2), x \in \mathbb{R}\}.$$

نرمز لمقصوري f على E_λ و F بـ φ_λ و ψ على الترتيب.

احسب النهايتين $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \varphi_\lambda(x,y)$ و $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \psi(x,y)$.

29) أ. اثبت أنّ كلّ نظيم $\|.\|$ على $\mathbb{R}^n$ تطبيق مستمرّ على $\mathbb{R}^n$.

ب. استنتج أنّه إذا كانت $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ دالّة مستمرّة على $\mathbb{R}^n$ كانت الدالّة $g : x \mapsto g(x) \mapsto \|f(x)\|$ كذلك.

30) ادرس استمرار الدوال $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ التالية على ميادين تعريفها:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1+x^2+y^2}{y}\sin y & ;\ y \neq 0, \\ 1 & ;\ y = 0, \end{cases}$$

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2} & ;\ (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & ;\ (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

$$h(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & ;\ (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & ;\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$k(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x-2y)(2x-y)}{x^2+y^2} & ;\ (x,y) \neq (0,0), \\ 2 & ;\ (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

$$\ell(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}\,; & (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & ;\ (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

31) ادرس استمرار الدوال التالية على ميادين تعريفها:

$$f(x,y)=\begin{cases}0; & x^2+y^2\geq R^2\\ 1\,; & x^2+y^2<R^2\end{cases}\quad (R>0)\ ;$$

$$g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\sin(y^2)+y\sin(x^2)}{x^2+y^2}; & (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & ;\ (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

$$h(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\sqrt{|y|}}{\sqrt{x^4+y^2}} & ;\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ;\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

32) ادرس حسب قيم الوسيط الحقيقيّ الموجب m استمرار الدالّة:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{|x|^m\,|y|^m}{x^2+y^2} & ;\quad (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & ;\quad (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

أ. بالنسبة إلى (x,y)،

ب. بالنسبة إلى x،

ج. بالنسبة إلى y،

د. ماذا تستنتج؟

33) $1)$ لتكن f دالّة من الفضاء $\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. مدّد بالاستمرار إلى $\mathbb{R}^2$ الدالّة $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ المعرّفة بـ:

$$\varphi(x,y)=\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\ ;\ x\neq y.$$

2) أجب على السؤال ذاته في الحالة الخاصّة $f : x \mapsto shx$ ، موضّحا الدالّة الممدّدة.

34) لتكن الدالّة الحقيقيّة f المعطاة على $\mathbb{R}^2$ بـ:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^3+yx^3}{x^4+y^4}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & ,(x,y)=(0,0).\end{cases}$$

1) بيّن أنّ f مستمرّة جزئيّا عند الصفر بالنسبة إلى المتغيّرين x و y ، كلّ على حدة.

2) هل f مستمرّة عند النقطة $(0,0)$ ؟

35) لتكن الدالّة الحقيقيّة f المعطاة على $\mathbb{R}^2$ بـ:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y}{x^6+y^3} & ;\ y\neq -x^2,\\ 0 & ;\ y=-x^2.\end{cases}$$

1) اثبت أنّ جميع اقتصارات f على المستقيمات المارّة بالنقطة $(0,0)$ مستمرّة عند هذه النقطة.

2) اثبت أنّ f غير مستمرّة عند $(0,0)$.

36) لتكن الدالّة الحقيقيّة f المعطاة على $\mathbb{R}^2$ بـ:

$$f(x,y)=\begin{cases}2x & ;\ y\geq x^2,\\ \dfrac{2y}{x} & ;\ |y|<x^2,\\ -2x & ;\ y\leq -x^2.\end{cases}$$

1) احسب $f(0,0)$.

2) ادرس استمرار f عند النقاط (x_0,x_0^2) و $(x_0,-x_0^2)$، حيث x_0 من $\mathbb{R}^*$.

3) ادرس استمرار f عند النقاط $(0,0)$.

37) ادرس استمرار الدالّة التالية على $\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y)=\left(\begin{cases} xyLog(x^2+y^2); (x,y)\neq(0,0) \\ (0,0) \qquad ; (x,y)=(0,0)\end{cases}, \begin{cases} \dfrac{e^{xy}-1}{x^2+y^2}; (x,y)\neq(0,0) \\ (0,0) \quad ; (x,y)=(0,0)\end{cases}\right)$$

38) مدّد بالاستمرار إلى $\mathbb{R}^2$، إن أمكن، الدالّة الشعاعيّة المعرّفة بـ:

$$f(x,y)=\left(\frac{|y|}{x}\exp\left(-\frac{|y|}{x^2}\right),\frac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}\right).$$

الفصل الثاني
الاشتقاق الجزئيّ والقابليّة للمفاضلة

1.2 الاشتقاق الجزئيّ لدى الدوال $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

1.1.2 تعريف

لتكن $f : D_f \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ دالّة حقيقيّة منطلقها جزء D_f من $\mathbb{R}^n$ و $a = (a_1, a_2, .., a_n)$ عنصرا من D_f. نسمّي مشتقّ f الجزئيّ من الرتبة الأولى عند a بالنسبة للمتغيّر x_i مشتقّ الدالّة الجزئيّة:

$$g_i : x_i \mapsto f(a_1, a_2, ..., a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, ..., a_n).$$

يرمز لهذا المشتقّ الجزئيّ بـ $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ أو $f'_{x_i}(a)$ أحيانا. ونكتب:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, a_2, ..., a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, ..., a_n) - f(a)}{h}.$$

وفي الحالة الخاصّة $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ لدينا عند (x_0, y_0) من $\mathbb{R}^2$ المشتقّان الجزئيّان الأوليان:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}.$$

2.1.2 أمثلة

1) لتكن الدالّة $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ المعطاة بـ:

$$f(x, y) = x - 3y.$$

لنفحص قابليتها للاشتقاق الجزئيّ من الرتبة الأولى على $\mathbb{R}^2$. ليكن (x_0, y_0) عنصرا من $\mathbb{R}^2$. لدينا:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{x_0 + h - 3y_0 - x_0 + 3y_0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0)}{k}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{x_0 - 3y_0 - 3k - x_0 + 3y_0}{k} = \lim_{h\to 0} \frac{-3k}{k} = -3.$$

نستخلص أنّ f تقبل مشتقّات جزئيّة من الرتبة الأولى على $\mathbb{R}^2$.

2) لتكن الدالّة $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ المعطاة بـ:

$$f(x, y) = 2x^2 - xy + y^2.$$

إنّها تقبل الاشتقاق الجزئي من الرتبة الأولى على $\mathbb{R}^2$. وفعلا، إذا كان (x_0, y_0) عنصرا من $\mathbb{R}^2$ كتبنا بوضوح:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{2(x_0+h)^2 - (x_0+h)y_0 + {y_0}^2 - 2x_0 + x_0 y_0 - {y_0}^2}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{4x_0 h + 2h^2 - h y_0}{h} = \lim_{h\to 0}(4x_0 + 2h - y_0) = 4x_0 - y_0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(x_0,y_0+k)-f(x_0,y_0)}{k}$$
$$=\lim_{k\to 0}\frac{2x_0{}^2-x_0(y_0+k)+(y_0+k)^2-2x_0{}^2+x_0y_0-y_0{}^2}{k}$$
$$=\lim_{k\to 0}\frac{-kx_0+2ky_0+k^2}{k}=\lim_{k\to 0}(-x_0+2y_0+k)=-x_0+2y_0.$$

3) **لنحسب المشتقّين الجزئيّين** $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ **و** $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ **للدالّة:**

$$f(x,y)=x^2\sin y.$$

لدينا تعريفا:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x_0+h)^2\sin y_0-x_0{}^2\sin y_0}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{2x_0h\sin y_0+h^2\sin y_0}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}(2x_0\sin y_0+h\sin y_0)=2x_0\sin y_0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(x_0,y_0+k)-f(x_0,y_0)}{k}$$
$$=\lim_{k\to 0}\frac{x_0{}^2\sin(y_0+k)-x_0{}^2\sin y_0}{k}$$
$$=\lim_{k\to 0}x_0{}^2\cos(y_0+k)=x_0{}^2\cos y_0.$$

(لاحظ أنّنا استعملنا قاعدة لوبيطال[20] لرفع حالة عدم التعيين).

---

20. Guillaume Antoine de l'Hospital : رياضيّاتيّ فرنسيّ. ولد في 1661 ومات في 2فيفري 1704 بباريس. اهتمّ بالتحليل والهندسة. يعدّ من السابقين في وضع الحساب التفاضليّ.

4) المشتقّان الجزئيّان من الرتبة الأولى للدالّة:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & ;\ (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & ;\ (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

هما:

أ.عند $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=0;$$

ب. عند $(x_0,y_0)\neq(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{{y_0}^3-{x_0}^2y_0}{({x_0}^2+{y_0}^2)^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=\frac{{x_0}^3-{y_0}^2x_0}{({x_0}^2+{y_0}^2)^2}.$$

نضع في الخلاصة:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^3-x^2y}{(x^2+y^2)^2} & ;\ (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & ;\ (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-y^2x}{(x^2+y^2)^2} & ;\ (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & ;\ (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

5) الدالّة $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ المعطاة بـ:

$$f(x,y)=|x-y|,$$

لا تقبل مشتقّا جزئيّا من الرتبة الأولى عند $(0,0)$، لا بالنسبة إلى x ولا إلى y . وفعلا، ذلك راجع إلى عدم وجود النهايتين:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}=\begin{cases}1 \quad ; \; h\to 0^{+},\\ -1 \; ; \; h\to 0^{-},\end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{h\to 0}\frac{|k|}{k}=\begin{cases}1 \quad ; \; k\to 0^{+},\\ -1 \; ; \; k\to 0^{-}.\end{cases}$$

3.1.2 ملحوظات

1) **يمكن لدالّة أن تتمتّع بمشتقّات جزئيّة عند نقطة دون أن تكون مستمرّة عند هذه النقطة، كما يبيّنه المثال الرابع أعلاه. وبعبارة أخرى، يمكن لدالّة غير مستمرّة عند نقطة ما أن تقبل مشتقّات جزئيّة من الرتبة الأولى عند هذه النقطة: إنّ الاستمرار ليس لازما.**

2) **تتمّ عملية الاشتقاق الجزئيّ بالنسبة إلى متغيّر ما تماما كما يتمّ الاشتقاق العاديّ الخاص بالدوال $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ مع اعتبار بقية المتغيّرات الأخرى ثوابت.**

3) **إنّ مبرهنات العمليات الحسابيّة والتركيب المتعلّقة باشتقاق الدوال الحقيقيّة ذات متغيّر حقيقيّ واحد تظلّ صحيحة ها هنا ولا يخرج برهانها عمّا سيق آنذاك. نكتب على سبيل المثال:**

$$\frac{\partial (f+g)}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial g}{\partial x}(x,y);$$

$$\frac{\partial (fg)}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)g(x,y)+\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)f(x,y);$$

$$\frac{\partial\left(\dfrac{f}{g}\right)}{\partial x}(x,y)=\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)g(x,y)-\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)f(x,y)}{(g(x,y))^{2}}.$$

4.1.2 نتيجة

لقد اتّضح الآن أنّ ما المشتقّ الجزئيّ بالنسبة لأحد المتغيّرات إلاّ "المشتقّ العادي" بالنسبة لهذا المتغيّر مع اعتبار بقيّة المتغيّرات كثوابت؛ لذا، فإنّه يرث منه كافة الخصائص والميزات الأساسية. وبالخصوص، يمكن الحصول على المشتقّات الجزئيّة من الرتبة الثانية باشتقاق المشتقّات الجزئيّة من الرتبة الأولى. لدينا في حالة الدوال $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ الأصناف الأربعة التالية.

5.1.2 تعريف

لتكن $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ دالّة حقيقيّة منطلقها جزء D_f من $\mathbb{R}^2$ و(a,b) عنصرا من D_f. نسمّي مشتقّ f الجزئيّ من الرتبة الثانية عند (a,b) بالنسبة للمتغيّر x مشتقّ الدالّة $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ بالنسبة للمتغيّر x. نرمز لهذ المشتقّ بـ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)$ ونكتب:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(a+h,b) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)}{h}.$$

ونسمّي مشتقّ f الجزئيّ من الرتبة الثانية عند (a,b) بالنسبة للمتغيّر y مشتقّ الدالّة $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ بالنسبة للمتغيّر y. نرمز لهذا المشتقّ بـ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)$ ونكتب:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b+k) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)}{k}.$$

ونسمّي مشتقّي f الجزئيّين المزدوجين من الرتبة الثانية عند (a,b) مشتقّ الدالّة $\frac{\partial f}{\partial x}$ بالنسبة للمتغيّر y ومشتقّ الدالّة $\frac{\partial f}{\partial y}$ بالنسبة للمتغيّر x . نرمز لهذين المشتقّين بـ $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(a,b)$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)$ على التوالي ونكتب:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a,b)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(a+h,b)-\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)}{h};$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(a,b)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(a,b)=\lim_{k\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(a,b+k)-\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)}{k}.$$

6.1.2 مثالان

1) إذا قمنا باستعراض الدوال الثلاث الأولى الواردة في الأمثلة السابقة تحصّلنا:

أ. بخصوص $f(x,y)=x-3y$ على:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=1 \Rightarrow \begin{cases}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=0,\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=0;\end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-3 \Rightarrow \begin{cases}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=0;\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=0;\end{cases}$$

ب. **بخصوص** $f(x,y)=2x^2-xy+y^2$ **على**:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=4x-y \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=4,\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=-1,\end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-x+2y \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=2,\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=-1,\end{cases}$$

ج. **بخصوص** $f(x,y)=x^2\sin y$ **على**:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x\sin y \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=2\sin y,\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=2x\cos y,\end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x^2\cos y \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=-x^2\sin y,\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=2x\cos y.\end{cases}$$

2) **الدالّة الرابعة من المجموعة ذاتها لا تقبل الاشتقاق الجزئيّ المزدوج من الرتبة الثانية عند** $(0,0)$ **. إنّ التبرير فوريّ بيّن:**

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,k)-\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{1}{k}=\pm\infty,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(h,0)-\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}=\pm\infty.$$

7.1.2 ملحوظة هامّة

إنّ نظرة خاطفة في دوال المثال الأوّل تظهر تطابق المشتقّين المزدوجين $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$. لنعجّل بالتصريح بأنّ الأمر ليس كذلك على الدوام. لعلّ في هذا المثال المضاد لبيانو خير دليل.

لتكن الدالّة الحقيقيّة f المعطاة على $\mathbb{R}^2$ بـ:

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y - x y^3}{x^2 + y^2} & ; \quad (x, y) \neq (0,0), \\ 0 & ; \quad (x, y) = (0,0). \end{cases}$$

يمدّنا حساب مشتقّيها الجزئيّين $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ و $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ بـ:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2} ; & (x, y) \neq (0,0), \\ 0 & ; \quad (x, y) = (0,0), \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^5 - 4x^3 y^2 - x y^4}{(x^2 + y^2)^2} ; & (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & ; \quad (x, y) = (0,0). \end{cases}$$

وعليه:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{k \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, k) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{-k^5}{k k^4} = -1;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^5}{h h^4} = 1.$$

إنّ اختلافهما ظاهر للعيان!

يمكن بطبيعة الحال تعميم الاشتقاق الجزئيّ إلى رتب أعلى من 2 وإلى دوال بعد منطلقها $\mathbb{R}^n$ أكبر من 2 . فنضع:

8.1.2 تعريف

لتكن $f: D_f \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ دالّة حقيقيّة منطلقها جزء D_f من $\mathbb{R}^n$ ولنفترض أنّ المشتقّ الجزئيّ الأوّل $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ موجود أيّا كان الدليل i من $\{1,2,...,n\}$. لنعتبر الدالّة:

$$g : x \mapsto g(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x).$$

نسمّي **مشتقّ** f **الجزئيّ من الرتبة الثانية** عند x بالنسبة إلى المتغيّرين x_j و x_i **المشتقّ** $\dfrac{\partial g}{\partial x_j}(x)$. ونكتب:

$$\frac{\partial g}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

إنّه المشتقّ الجزئيّ من الرتبة الأولى بالنسبة للمتغيّر x_j للمشتقّ الجزئيّ من الرتبة الأولى بالنسبة للمتغيّر x_i . لدينا بهذا الصدد في الإجمال n^2 مشتقّا جزئيّا من الرتبة الثانية.

ونسمّي مشتقّ f الجزئيّ من الرتبة k بالنسبة لـ k متغيّرا x_α و x_β و... و x_μ (يمكن للمتغيّرات أن تتكرّر) المشتقّ الجزئي بالنسية إلى المتغيّر x_α للمشتقّ من الرتبة $k-1$ بالنسبة إلى بقيّة المتغيّرات x_β و... و x_μ . نكتب بشأنه:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_\alpha \partial x_\beta ... \partial x_\lambda \partial x_\mu} = \frac{\partial}{\partial x_a}\left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_\beta ... \partial x_\lambda \partial x_\mu}\right).$$

9.1.2 مثالان

1) لنحسب كلّ المشتقّات الجزئيّة إلى غاية الرتبة الثانية للدالّة الحقيقيّة f المعطاة على $\mathbb{R}^3$ بـ:

$$(x,y,z)\mapsto f(x,y,z)=x^3+y^4+z^5-2x^2yz-2xy^4-5xyz.$$

لدينا:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=3x^2-4xyz-2y^4-5yz,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=4y^3-2x^2z-8xy^3-5xz,$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=5z^4-2x^2y-5xy.$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z)=6x-4yz,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y,z)=-4xz-8y^3-5z,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}(x,y,z)=-4xy-5y,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z)=12y^2-24xy^2,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y,z)=-4xz-8y^3-5z,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}(x,y,z)=-2x^2-5x,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z)=20z^3,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(x,y,z)=-4xy-5y,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(x,y,z)=-2x^2-5x.$$

2) لنحسب المشتقّات الجزئيّة الثلاثة $\frac{\partial^2 f}{\partial z^3}(x,y,z)$ و $\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x\partial z}(x,y,z)$ و $\frac{\partial^3 f}{\partial y^2\partial z}(x,y,z)$ للدالّة f السابقة. لدينا تعريفا:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^3}(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z)\right)=\frac{\partial}{\partial z}\left(20z^3\right)=60z^2,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x\partial z}(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(x,y,z)\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(-4xy-5y\right)=-4x-5,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^2\partial z}(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(x,y,z)\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(-2x^2-5x\right)=0.$$

نلاحظ مرّة أخرى عبر المثال الأوّل أنّ المشتقّين المزدوجين $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}$ متساويان. الأمر ليس كذلك في كلّ حال؛ غير أنّ المبرهنة الموالية تضمن دوام هذا التطابق إذا ما توفّر شرط إضافيّ. فهاكه.

10.1.2 مبرهنة (مقياس شوارز)

إذا كان المشتقّان المزدوجان $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ مستمرّين في جوار U لنقطة من $\mathbb{R}^2$ كان هذان المشتقّان متطابقين على هذا الجوار:

$$\forall (x,y)\in U \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y).$$

يمكن بطبيعة الحال تعميم مفعول هذه المبرهنة إلى حالة المشتقّات الجزئيّة من رتب أعلى من 2 .

11.1.2 ملحوظة

مقياس شوارز كاف وليس لازما لحدوث المساواة المعنية. لنستعرض هذا المثال. إذا كانت f الدالّة الحقيقيّة المعطاة بـ:

$$f(x,y)=\begin{cases} yLog\left(1+\dfrac{x^2}{y^2}\right); & y\neq 0,\\ 0 & ;\ y=0,\end{cases}$$

حسبنا (واحسب بعدي تفلح !):

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}\ ; & y\neq 0,\\ 0 & ;\ y=0,\end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases} Log\left(1+\dfrac{x^2}{y^2}\right)-\dfrac{2x^2}{x^2+y^2}\ ; & y\neq 0,\\ 0 & ;\ y=0,\end{cases}$$

وعليه:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,k)-\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{0}{k}=0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(h,0)-\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0.$$

نرى هكذا أنّ المشتقّين المزدوجين $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ متساويان؛ ومع ذلك فمقياس شوارز غير محقّق، لعدم استمرار المشتقّين $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ عند $(0,0)$. وبالفعل، إذا واصلنا حسابنا وجدنا دونما عناء:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x^3-2xy^2}{(x^2+y^2)^2} & ;\ y\neq 0,\\ 0 & ;\ y=0.\end{cases}$$

وبالتالي:

$$\lim_{(x,2x)\to(0,0)}\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,2x)=\lim_{x\to 0}\frac{2x^3-8x^3}{(x^2+4x^2)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-6}{25x}=\pm\infty;$$

وهو ما يؤكّد عدم الاستمرار المزعوم.

12.1.2 ملحوظة

سوف تجد في التمرين 13 غير المحلول مقياسا مماثلا، ألا فزره.

13.1.2 تعريف

نقول عن دالّة $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ إنّها من **الصنف** $\mathscr{C}^1$ عند نقطة (a,b) إذا كان مشتقّاها الجزئيّان $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ مستمرّين عند (a,b).

ونقول عنها إنّها من **الصنف** $\mathscr{C}^k$ عند (a,b) إذا كانت كلّ مشتقّاتها الجزئيّة إلى غاية الرتبة k مستمرّة عند (a,b).

إنّه حال كلّ الدوال الأولية التي تعرفها: الأسيّة واللوغاريتميّة والدائريّة وعكوسها والزائديّة وعكوسها وما نشأ عنها بالتركيب والعمليات الحسابيّة إلخ ...

14.1.2 تعريف

لتكن $f:D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ دالّة من الصنف $\mathscr{C}^1$ على ميدان D من $\mathbb{R}^n$.

نسمّي **تدرّج** f التطبيق المرموز له بـ $grad\ f$ أو ∇f المتّخذ من $\mathbb{R}^n$ منطلقا ومستقرّا والمعرّف بـ:

$$x\mapsto\nabla f(x)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x),\frac{\partial f}{\partial x_2}(x),\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right).$$

إذا تعلّق الأمر بدالّة $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ وكان $\mathbb{R}^3$ مزوّدا بأساسه القانوني (i, j, k) كتبنا تدرّج f عند نقطة (x, y, z) من D على النحو:

$$\nabla f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)i + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z)\, j + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)k.$$

ونسمّي **تفرّق** f عند نقطة x من $\mathbb{R}^n$ العدد المرموز له بـ $divf(x)$ والمعرّف بـ:

$$divf(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x).$$

15.1.2 مثال

لتكن الدالّة $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ المعطاة بالصيغة:

$$f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z - 3xyz.$$

إنّ تدرّجها عند كلّ نقطة (x_0, y_0, z_0) من $\mathbb{R}^3$ معطى هكذا:

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \begin{pmatrix} 3{x_0}^2 - 3y_0 z_0 \\ 2y_0 - 3x_0 z_0 \\ 1 - 3x_0 y_0 \end{pmatrix}$$
$$= (3{x_0}^2 - 3y_0 z_0)i + (2y_0 - 3x_0 z_0)\, j + (1 - 3x_0 y_0)k.$$

في حين أنّ لتفرّقها الشكل:

$$divf(x_0, y_0, z_0) = (3{x_0}^2 - 3y_0 z_0) + (2y_0 - 3x_0 z_0) + (1 - 3x_0 y_0)$$
$$= 3{x_0}^2 - 3x_0 y_0 - 3x_0 z_0 - 3y_0 z_0 + 2y_0 + 1.$$

16.1.2 نتيجة

تدرّج f تطبيق مستمرّ.

إنّه كذلك لكون كلّ مركّباته مستمرّة.

17.1.2 تعريف (مشتقّ وفق اتّجاه شعاعيّ)

لتكن $a(a_1,a_2,...,a_n)$ نقطة من $\mathbb{R}^n$ و U جوارا مفتوحا لها. ليكن v شعاعا غير معدوم من $\mathbb{R}^n$. نقول عن دالّة $f:U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ إنّها تقبل مشتقّا وفق الشعاع v (أو حسب اتّجاه الشعاع v) إذا كانت النهاية :

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(A+tv)-f(A)}{t},$$

موجودة.

تسمّى هذه النهاية في حالة وجودها **مشتقّ** f **عند** a **في اتّجاه** v.

نرمز له بـ $f_v'(a)$.

18.1.2 أمثلة

1) لنأخذ:

$$a(a_1,a_2)=(2,-1),$$
$$v=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix},$$
$$f(x,y)=xy+x-y+3.$$

يأتي عندئذ:

$$f_v'(a)=\lim_{t\to 0}\frac{f(a+tv)-f(a)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(2+3t,-1+t)-4}{t}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{(2+3t)(-1+t)+(2+3t)-(-1+t)-1}{t}=\lim_{t\to 0}(1+3t)=1.$$

2) لنأخذ:

$$A(a,b,c)=(1,0,1),$$
$$v=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},$$
$$f(x,y,z)=3x^2-y^2+2z-4x.$$

يأتي عندئذ:

$$f_v^{'}(a)=\lim_{t\to 0}\frac{f(a+tv)-f(a)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(1+t,2t,1-t)-1}{t}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{3(1+t)^2-(2t)^2+2(1-t)-4(1+t)-1}{t}=\lim_{t\to 0}t=0.$$

19.1.2 ملحوظة

لو زوّدنا $\mathbb{R}^n$ **بأساسه القانونيّ** $(e_i)_{1\le i\le n}=\left(\underbrace{(0,...0,1,0,...,0)}_{i}\right)_{1\le i\le n}$ **لجاء المشتقّ باتّجاه الشعاع** e_i **عند نقطة** $a(a_1,a_2,...,a_n)$ **مطابقا المشتقّ الجزئيّ وفق المتغيّر** x_i **عند هذه النقطة:**

$$f_{e_i}^{'}(a)=\lim_{t\to 0}\frac{f(a+te_i)-f(a)}{t}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{f(a_1,a_2,...,a_{i-1},a_i+t,a_{i+1},...,a_n)-f(a)}{t}=\frac{\partial f}{\partial x_i}(a);$$

فما المشتقات الجزئيّة إلا مشتقّات وفق اتجاه أشّعة الأساس الجبريّ القانونيّ.

2.2 الاشتقاق الجزئيّ لدى الدوال $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$

1.2.2 تعريف

ليكن p عددا من $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ ولتكن $f = (f_1,..., f_p): D_f \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ دالّة شعاعيّة منطلقها جزء D_f من $\mathbb{R}^n$ ومصبّها $\mathbb{R}^p$ وليكن $a = (a_1,..., a_n)$ عنصرا من D_f. نسمّي مشتقّ $f = (f_1, f_2,..., f_p)$ الجزئيّ من الرتبة الأولى عند a بالنسبة للمتغيّر x_i الشعاع المرموز له بـ $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ والمعرّف على النحو:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(a), \frac{\partial f_2}{\partial x_i}(a),..., \frac{\partial f_p}{\partial x_i}(a) \right).$$

وإذا تغيّر a في D_f حصلنا على الدالّة المشتقّة $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ لـ f .

2.2.2 نتيجة

تكون الدالّة المشتقّة $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ موجودة إذا وفقط إذا كانت كلّ المشتقّات المركّبات $\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right)_{1 \le j \le p}$ كذلك.

3.2.2 أمثلة

1) لتكن الدالّة $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ المعطاة بـ:

$$f(x, y) = (x - y, x^2 - y^2).$$

لنحسب مشتقّيها الجزئيّين من الرتبة الأولى على $\mathbb{R}^2$. ليكن (x_0, y_0) عنصرا من $\mathbb{R}^2$. لدينا:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0, y_0) \right) = (1, 2x_0),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0, y_0), \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0, y_0) \right) = (-1, -2y_0).$$

2) لتكن الدالّة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ المعطاة بـ:

$$f(x)=(\sin x+\cos x, chx-shx).$$

لنحسب مشتقّها من الرتبة الأولى على $\mathbb{R}$. ليكن x_0 عنصرا من $\mathbb{R}$. لدينا:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0)= f'(x_0)=\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0),\frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0)\right)=\left(\cos x_0-\sin x_0, shx_0-chx_0\right).$$

3) لتكن الدالّة $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ المعطاة بـ:

$$f(x,y,z)=(x-2y+3z, x^2-y^2+2z, x^3+y^3-4).$$

لنحسب مشتقّها من الرتبة الأولى على $\mathbb{R}^3$. ليكن (x_0,y_0,z_0) عنصرا من $\mathbb{R}^3$. لدينا:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)&=\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0,y_0,z_0),\frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0,y_0,z_0),\frac{\partial f_3}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)\right)\\&=\left(1,2x_0,3{x_0}^2\right),\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)&=\left(\frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0,y_0,z_0),\frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0,y_0,z_0),\frac{\partial f_3}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)\right)\\&=\left(-2,-2y_0,3{y_0}^2\right),\\ \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0)&=\left(\frac{\partial f_1}{\partial z}(x_0,y_0,z_0),\frac{\partial f_2}{\partial z}(x_0,y_0,z_0),\frac{\partial f_3}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\right)=\left(3,2,0\right)\end{aligned}$$

4) المشتقّان الجزئيّان $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ و $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ غير موجودين بالنسبة للدالّة $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ المعطاة بـ:

$$f(x,y)=(\sin x-\cos y, |x-y|, e^{x+y}-4).$$

السبب مردود إلى المركبّة الثانية $(x,y)\mapsto f_2(x,y)=|x-y|$ التي تشكو ذلك كما تقدّم من قبل.

3.2 قابلية الدوال $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ للمفاضلة

1.3.2 تعريف

نقول عن دالّة $f : U_a \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ معرّفة في جوار U_a لنقطة a من $\mathbb{R}^n$ إنّها قابلة للمفاضلة عند هذه النقطة إذا وجد شكل خطّيّ $L_a(h)$ على $\mathbb{R}^n$ بحيث:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)-L_a(h)}{\|h\|}=0.$$

يسمّى الشكل الخطّيّ L_a تفاضلية f عند النقطة a. يرمز لها عادة بـ $df_{(a)}$.

إذا وضعنا:

$$\frac{f(a+h)-f(a)-L_a(h)}{\|h\|}=\varepsilon_a(h),$$

جاء:

$$f(a+h)-f(a)=L_a(h)+\|h\|\varepsilon_a(h).$$

وعليه، يمكن أن نصيغ هذا التعريف على المنوال التالي:

2.3.2 تعريف

نقول عن دالّة $f : U_a \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ معرّفة في جوار U_a لنقطة a من $\mathbb{R}^n$ إنّها قابلة للمفاضلة عند هذه النقطة إذا وجد شكل خطّيّ $L_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ودالّة $\varepsilon_a : U_a \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ بحيث $\lim_{h\to 0}\varepsilon_a(h)=0$، يسمحان بالكتابة:

$$f(a+h)-f(a)=L_a(h)+\|h\|\varepsilon_a(h).$$

أخيرا، نقول عن دالّة $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ إنّها قابلة للمفاضلة على جزء A من $\mathbb{R}^n$ إذا كانت كذلك عند كلّ نقطة a من A.

3.3.2 أمثلة

1) **كلّ شكل خطّيّ $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ قابل للمفاضلة عند كلّ نقطة a من $\mathbb{R}^n$.**

وبالفعل، يكفي أخذ $L_a = f$ و $\varepsilon_a \equiv 0$.

2) **الدالّة الحقيقيّة f المعطاة على $\mathbb{R}^2$ بـ :**

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}\,\sin(x^2+y^2)$$

قابلة للمفاضلة عند $(0,0)$. وبالفعل لدينا:

$$\begin{aligned} f(h_1,h_2)-f(0,0) &= \sqrt{h_1^{\,2}+h_2^{\,2}}\,\sin(h_1^{\,2}+h_2^{\,2}) \\ &= 0+\left\|(h_1,h_2)\right\|_2 \sin(h_1^{\,2}+h_2^{\,2}) \end{aligned}$$

ولمّا كانت $\lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \sin(h_1^{\,2}+h_2^{\,2})=0$ ضمنّا توفّر شروط التعريف بأخذ التفاضلية:

$$.df_a(h)=df_{(0,0)}(h_1,h_1)=0.$$

3) **الدالّة الحقيقيّة f المعطاة على $\mathbb{R}^2$ بـ $f(x,y)=|x-y|$ غير قابلة للمفاضلة عند $(0,0)$.**

وبالفعل، فلو افترضنا العكس لأمكن أن نكتب تعريفا:

$$f(h_1,h_2)-f(0,0)=df_{(0,0)}(h_1,h_2)+\sqrt{h_1^{\,2}+h_2^{\,2}}\,\varepsilon(h_1,h_2)=|h_1-h_2|.$$

وعليه:

$$\varepsilon(h_1,h_2)=\frac{|h_1-h_2|-df_{(0,0)}(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^{\,2}+h_2^{\,2}}};$$

وبالتالي:

$$0=\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\varepsilon(h_1,h_2)=\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{|h_1-h_2|-df_{(0,0)}(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^{\,2}+h_2^{\,2}}}$$

$$=\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{|h_1-h_2|}{\sqrt{h_1^{\,2}+h_2^{\,2}}};$$

وهذا غير ممكن لأنّ النهاية $\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{|h_1-h_2|}{\sqrt{h_1^{\,2}+h_2^{\,2}}}$ غير موجودة (لا أخال الأمر خاف عنك). إنّه التناقض المرتقب.

4.3.2 قضية

التفاضلية df_a (إن وجدت) وحيدة.

إثبات

لنسترجع هنيهة الترميز L_a بدل df_a هروبا من ثقل الدلائل. لنفترض جدلا وجود تفاضليتين L_a^1 و L_a^2 لـ f عند a. نكتب على ضوء التعريف أعلاه:

$$f(a+h)-f(a)=L_a^1(h)+\|h\|\varepsilon_a^1(h), \qquad (*)$$

$$f(a+h)-f(a)=L_a^2(h)+\|h\|\varepsilon_a^2(h), \qquad (**)$$

حيث $\lim_{h\to 0}\varepsilon_a^1(h)=\lim_{h\to 0}\varepsilon_a^1(h)=0$. من $(*)$ و$(**)$ يأتي بالطرح:

$$L_a^1(h)-L_a^1(h)=\left(L_a^1-L_a^2\right)(h)=\|h\|\left(\varepsilon_a^1(h)-\varepsilon_a^2(h)\right). \qquad (***)$$

وبالخصوص، إذا زوّد الفضاء $\mathbb{R}^n$ بأساسه القانونيّ $(e_i)_{1\le i\le n}$ أخذت هذه العلاقة الأخيرة الشكل:

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^* \quad L_a^1(\lambda e_i) - L_a^1(\lambda e_i) = \left(L_a^1 - L_a^2\right)(\lambda e_i) = \lambda\left(L_a^1 - L_a^2\right)(e_i)$$
$$= \|\lambda e_i\|\left(\varepsilon_a^1(\lambda e_i) - \varepsilon_a^2(\lambda e_i)\right)$$
$$= \lambda\left(\varepsilon_a^1(\lambda e_i) - \varepsilon_a^2(\lambda e_i)\right), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

وعليه:

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^* \quad \left(L_a^1 - L_a^2\right)(e_i) = \left(\varepsilon_a^1(\lambda e_i) - \varepsilon_a^2(\lambda e_i)\right), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

وبالانتقال إلى النهاية في هذه المساواة مع مآل λ إلى الصفر يأتي:

$$\left(L_a^1 - L_a^2\right)(e_i) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n;$$

أي:

$$L_a^1(e_i) = L_a^2(e_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n;$$

وهو ما يضمن تطابق الشكلين الخطّيّين L_a^1 و L_a^2 .

5.3.2 نتيجة

كلّ دالّة $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ قابلة للمفاضلة عند نقطة a من $\mathbb{R}^n$ مستمرّة عند هذه النقطة.

وبالفعل، يأتي من تعريف القابلية للمفاضلة أنّ:

$$\lim_{h\to 0}(f(a+h) - f(a)) = \lim_{h\to 0}\left(L_a(h) + \|h\|\varepsilon_a(h)\right)$$
$$= \lim_{h\to 0} L_a(h) + \lim_{h\to 0}\|h\|\varepsilon_a(h) = 0.$$

وعليه:

$$\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a).$$

6.3.2 ملحوظة

عكس هذه النتيجة خاطئ عموما. إنّ المثال الثالث أعلاه كاف لتدعيم هذا الزعم.

إذا تلبّس عليك هذا المفهوم وأحسست بأنّ حظّك من الفهم فيما تقدّم ضئيل، فلا تراع ! إنّ ما يلي كفيل بتبسيط الأمر وجعله أكثر ملموسية وأسهل استساغا.

الإنارة الأولى.

إنّ لكلّ شكل خطّيّ حقيقيّ L على $\mathbb{R}^n$ الكتابة:

$$L(h) = L(h_1, h_2, ..., h_n) = \alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2 + ... + \alpha_n h_n;$$

حيث α_1 و α_2 و... و α_n أعداد حقيقيّة. يمكن على ضوء هذه الإنارة إعادة صوغ التعريف هكذا:

7.3.2 تعريف

نقول عن دالّة $f : U_a \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ معرّفة في جوار U_a لنقطة a من $\mathbb{R}^n$ إنّها قابلة للمفاضلة عند هذه النقطة إذا وجدت أعداد حقيقيّة α_1 و α_2 و... و α_n ودالّة $\varepsilon_a : U_a \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ بحيث $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon_a(h) = 0$ و:

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= \alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2 + ... + \alpha_n h_n + \|h\| \varepsilon_a(h) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i h_i + \|h\| \varepsilon_a(h). \end{aligned}$$

يمثّل المزج الخطّيّ $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i h_i$ التفاضل df_a.

إذا قمنا باستحضار التطبيقات الخطيّة الإسقاطيّة الأولية:

$$\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$(h_1, h_2, ..., h_n) \mapsto \pi_i(h_1, h_2, ..., h_n) = h_i, \ i = 1, 2, ..., n;$$

ورمزنا لتفاضلياتها (**تعرف بالتفاضليات الأولية**) بـ dx_i، أمكن وضع التفاضلية df_a تحت الشكل:

$$df_a = \alpha_1 dx_1 + \alpha_2 dx_2 + \ldots + \alpha_n dx_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i dx_i .$$

وفي الحالتين الخاصتين $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ و $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ تأخذ التفاضلية df_a الشكل المبسّط:

$$\begin{aligned} df_{(a,b)}(h,k) &= (\alpha dx + \beta dy)(h,k) == \alpha dxh + \beta dyk = \alpha h + \beta k; \\ df_{(a,b,c)}(h,k,\ell) &= (\alpha dx + \beta dy + \chi dz)(h,k,\ell) = (\alpha dxh + \beta dyk + \chi dz\ell \\ &= \alpha h + \beta k + \chi \ell. \end{aligned}$$

الإنارة الثانية.

8.3.2 مبرهنة

إذا كانت $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ دالّة قابلة للمفاضلة عند نقطة a من $\mathbb{R}^n$ فإنّ f تقبل مشتقّات جزئيّة من الرتبة الأولى عند a بالنسبة لكلّ متغيّر x_i، حيث i من $\{1,2,\ldots,n\}$.

إثبات

لنفترض أنّ f قابلة للمفاضلة عند a. نكتب تعريفا:

$$\exists \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R} : f(a+h) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i h_i + \|h\| \varepsilon_a(h);$$
$$\lim_{h \to 0} \varepsilon_a(h) = 0.$$

وعلى الوجه الأخصّ، نكتب من أجل $h = (0,\ldots,0,h_i,0,\ldots,0)$ (كلّ مركبّات h معدومة ما عدا تلك التي رتبتها i):

$$f(a_1,\ldots,a_{i-1},a_i+h_i,a_{i+1},\ldots,a_n) - f(a) = \alpha_i h_i + |h_i| \varepsilon_a(h);$$

وعليه:

$$\frac{f(a_1,\ldots,a_{i-1},a_i+h,a_{i+1},\ldots,a_n) - f(a)}{h_i} = \alpha_i + \frac{|h_i|}{h_i} \varepsilon_a(h).$$

وبما أنّ $\lim_{h\to 0}\varepsilon_a(h)=0$ **إذن:**

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a_1,...,a_{i-1},a_i+h,a_{i+1},...,a_n)-f(a)}{h_i}=\alpha_i;$$

وهو ما يضمن تمتّع f **بالمشتقّ الجزئيّ** $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)=\alpha_i$. **إنّ مرور الدليل** i **على كلّ القيم** $\{1,2,...,n\}$ **ينهي الزعم.**

9.3.2 نتيجتان

1) **تمتّع دالّة** $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ **بمشتقّات جزئيّة من الرتبة الأولى عند نقطة ما بالنسبة لكلّ المتغيّرات شرط لزوم لقبول** f **المفاضلة عند تلك النقطة.**

لقد تبيّن من هذه المبرهنة أنّ ما مركّبات تفاضلية f **عند** a **سوى مشتقّاتها الجزئيّة عند** a .

2) **لتفاضلية** f **عند** a **الشكل:**

$$\begin{aligned} df_a(h) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)dx_1h_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}(a)dx_2h_2+...+\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)dx_nh_n \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}(a)h_2+...+\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)h_n \\ &= \langle gradf(a),h\rangle. \end{aligned}$$

رمزنا بـ $\langle . \rangle$ **للجداء السلّمي التقليدي على** $\mathbb{R}^n$:

$$\langle x,y\rangle=\langle (x_1,x_2,...,x_n),(y_1,y_2,...,y_n)\rangle=\sum_{i=1}^n x_iy_i.$$

10.3.2 مثالان

1) لنعتبر الدالّة $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ المعطاة بـ:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x+y}{x-y} & ;\ (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & ;\ (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

إنّها لا تقبل المفاضلة عند النقطة $(0,0)$ ذلك لأنّ مشتقّيها الجزئيّين $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$

و $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ غير موجودين، إذ لدينا بوضوح:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}=\pm\infty;$$
$$\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{1}{k}=\pm\infty.$$

(عدم وجود أحدهما يغني بطبيعة الحال).

2) الدالّة $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ المعرّفة بـ:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & ;\ (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & ;\ (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

لا تقبل المفاضلة عند النقطة $(0,0)$ بالرغم من وجود مشتقّيها الجزئيّين:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{|h|}=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{0}{|k|}=0;$$

يعزى ذلك إلى عدم وجود النهاية:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h,k)-f(0,0)-h\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)-k\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{hk}{h^2+k^2}$$

الإنارة الأخيرة

11.3.2 مبرهنة

تقبل دالّة $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ المفاضلة عند نقطة a من $\mathbb{R}^n$ إذا وفقط إذا:

1) قبلت مشتقّات جزئيّة من الرتبة الأولى عند a بالنسبة لكلّ متغيّر x_i، حيث i من $\{1,2,...,n\}$،

2) حقّقت:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a_1+h_1,...,a_n+h_n)-f(a)-h_1\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a)-...-h_n\dfrac{\partial f}{\partial x_n}(a)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2+...+h_n^2}}=0.$$

12.3.2 مثال

الدالّة $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ المعطاة بـ:

$$f(x,y)=\begin{cases}(x+y)\sin\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & ;\ (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & ;\ (x,y)=(0,0);\end{cases}$$

تقبل المفاضلة عند $(0,0)$. إنّ شرطي المبرهنة السابقة محقّقان. وفعلا، لدينا الشرط الأوّل توّا:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=0,$$

أمّا بشأن الشرط الثاني فنحسب:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h,k)-f(0,0)-h\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)-k\dfrac{\partial f}{\partial k}(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}}=$$

$$=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{(h+k)\sin\dfrac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}}}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{(h+k)}{h^2+k^2}hk\frac{\left(\sin\dfrac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}}\right)}{\left(\dfrac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}}\right)}$$

$$=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{(h+k)}{h^2+k^2}hk=\lim_{\substack{r\to 0\\ \theta\in[0,2\pi[}}r(\cos\theta+\sin\theta)\cos\theta\sin\theta=0.$$

استخدمنا في هذا الحساب النهاية المشهورة $\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}=1$ ثمّ لجأنا إلى الإحداثيات القطبيّة $h=r\cos\theta$ و $k=r\sin\theta$ مع الملاحظة الواضحة:

$$\begin{aligned}\left|r(\cos\theta+\sin\theta)\cos\theta\sin\theta\right|&\le r\left|(\cos\theta+\sin\theta)\right|\left|\cos\theta\sin\theta\right|\\&\le r\left|(\cos\theta+\sin\theta)\right|\le 2r.\end{aligned}$$

لتفاضلية f عند $(0,0)$ الشكل:

$$df_{(0,0)}=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)dx+\frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0)dy=0.$$

إنّها التطبيق الخطّيّ المعدوم

إنّ النتيجة الموالية (التي نسلم بها) تقدّم شرطا عمليّا كافيا لقبول دالّة ما المفاضلة عند نقطة.

13.3.2 قضية

كلّ دالّة $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ متمتّعة بمشتقّات جزئيّة مستمرّة من الرتبة الأولى عند نقطة a من $\mathbb{R}^n$ (أي من الصنف $\mathscr{C}^1$ عند a) قابلة للمفاضلة عند هذه النقطة.

14.3.2 مثال

الدالّة $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ المعطاة بـ:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2} & ;\ (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & ;\ (x,y)=(0,0);\end{cases}$$

قابلة للمفاضلة عند $(0,0)$. مشتقّاها الجزئيّان $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ و $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ هما:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}h=0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{h\to 0}k=0;$$

وخارج الصفر، لدينا:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{2x^5+4x^3y^2-2xy^4}{(x^2+y^2)^2};\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{2y^5+4y^3x^2-2yx^4}{(x^2+y^2)^2}.$$

وفضلا عن هذا لدينا:

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)&=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2x^5+4x^3y^2-2xy^4}{(x^2+y^2)^2}\\&=\lim_{\substack{r\to 0\\ \theta\in[0,2\pi[}} r(2\cos^5\theta+4\cos^3\theta\sin^2\theta-2\cos\theta\sin^4\theta)\\&=0=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)&=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2y^5+4y^3x^2-2yx^4}{(x^2+y^2)^2}\\&=\lim_{\substack{r\to 0\\ \theta\in[0,2\pi[}} r(2\sin^5\theta+4\sin^3\theta\cos^2\theta-2\sin\theta\cos^4\theta)\\&=0=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0).\end{aligned}$$

نستنتج أنّ المشتقّين الجزئيّين $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ مستمرّان عند $(0,0)$. إذن، f تقبل المفاضلة عند $(0,0)$.

15.3.2 تنبيه

لا بأس أن نذكّرك بأنّ استمرار المشتقّات الجزئيّة من الرتبة الأولى عند نقطة لدى دالّة $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ شرط كفاية لقبولها المفاضلة عند تلك النقطة. فافتقار دالّة إلى هذه الميزة قد **لا** يحرمها من التمتّع بالقابليّة للمفاضلة.

إنّه حال الدالّة $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ المعطاة بـ:

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & ;\ (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & ;\ (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

فهي تقبل المفاضلة عند $(0,0)$ إذ لدينا:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}h\sin\frac{1}{|h|}=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}k\sin\frac{1}{|k|}=0,$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h,k)-f(0,0)-0}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{(h^2+k^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\sqrt{h^2+k^2}\sin\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}=0;$$

ومع ذلك فإنّ مشتقّيها $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ غير مستمرّين عند الصفر. إنّ التأكّد من تقطّع أحدهما يغني. هكذا يمدّنا حساب $\frac{\partial f}{\partial x}$ خارج الصفر بـ:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x\left(\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

وعليه:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$=-\lim_{\substack{r\to 0\\ \theta\in[0,2\pi[}}\cos\theta\cos\frac{1}{r};$$

وهذه النهاية غير موجودة. نستخلص أنّ المشتقّ الجزئيّ $\frac{\partial f}{\partial x}$ ليس مستمرّا عند الصفر. إنّه المبتغى.

لا شكّ أنّك بدأت تتساءل لما انصبّ اهتمامنا على النقطة $(0,0)$ في الأمثلة المدروسة دون غيرها. قد تكون خفّة الحسابات عندها أحد الردود وأنّ انسحابا ما يمكّن على الدوام من الرجوع إليها. لكن في المبرهنة المحوصلة الموالية السبب الرئيس.

16.3.2 مبرهنة (العمليات الجبريّة)

إذا كانت $f,g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ دالّتين قابلتين للمفاضلة عند نقطة a من $\mathbb{R}^n$ و λ عددا حقيقيّا معطى فإنّ:

1) المجموع $f+g$ يقبل المفاضلة عند a وتفاضليته معطاة بـ:

$$d(f+g)_a=df_a+dg_a;$$

2) حاصل الضرب fg يقبل المفاضلة عند a وتفاضليته معطاة بـ:

$$d(fg)_a=g(a)df_a+f(a)dg_a;$$

3) حاصل الضرب λf يقبل المفاضلة عند a وتفاضليته معطاة بـ:

$$d(\lambda f)_a=\lambda df_a;$$

4) حاصل القسمة $\frac{f}{g}$ (مع $g(a)\neq 0$) يقبل المفاضلة عند a وتفاضليته معطاة بـ:

$$d\left(\frac{f}{g}\right)_a = \frac{g(a)df_a - f(a)dg_a}{(g(a))^2};$$

5) المقلوب $\frac{1}{g}$ (مع $g(a)\neq 0$) يقبل المفاضلة عند a وتفاضليته معطاة بـ:

$$d\left(\frac{1}{g}\right)_a = \frac{-f(a)dg_a}{(g(a))^2}.$$

يمكن للراغب في الاثبات اللجوء المباشر إلى التعريف والاستئناس بالمبرهنة المماثلة في القابليّة للاشتقاق المفصّلة في كرّاس سابق.

إنّه حال كلّ الدوال الأولية التي تعرفها: الحدوديّة والكسريّة الناطقة والأسيّة واللوغاريتميّة والدائريّة وعكوسها والزائديّة وعكوسها وما نشأ عنها بالعمليات الجبريّة إلخ ... ينكشف لك هكذا سبب انفرادنا في جلّ الأمثلة التي سقناها لك بنقطة الصفر (التمدديّة عموما) دراسة. إنّها الوحيدة التي يستدعي فحص قبول f المفاضلة عندها إجراء حسابات، بخلاف بقية النقاط التي بات الأمر فيها محسوما. وزيادة في الوضوح نهدي لك هذين المثالين.

17.3.2 مثالان

1) الدالّة الحقيقيّة المعطاة على $\mathbb{R}^3$ بـ:

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + x + 2y + 3z,$$

تقبل المفاضلة على $\mathbb{R}^3$ كحاصل عمليات جبريّة لدوال أولية تتّصف بذلك. إنّ تفاضليتها عند نقطة (x_0,y_0,z_0) من $\mathbb{R}^3$ معرّفة على النحو:

$$\begin{aligned} df_{(x_0,y_0,z_0)}(h,k,\ell) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)k + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\ell \\ &= (2x_0+1)h + 2(y_0+1)k + (2z_0+3)\ell. \end{aligned}$$

2) الدالّة الحقيقيّة المعطاة على $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ بـ:

$$f(x,y)=\frac{chx}{shy},$$

تقبل المفاضلة على $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ بدورها كحاصل عمليات جبريّة لدوال أولية تقبل ذلك. إنّ تفاضليتها عند نقطة (x_0,y_0) من $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ معرّفة بـ:

$$df_{(x_0,y_0)}(h,k)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k=\frac{shx_0}{shy_0}h-\frac{chx_0chy_0}{sh^2y_0}k.$$

18.3.2 قضية

إذا قبلت دالّة $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ المفاضلة عند نقطة a من $\left(\mathbb{R}^n,\|.\|\right)$ قبلت عندئذ الاشتقاق عند a وفق أيّ شعاع غير معدوم v من $\mathbb{R}^n$. وفضلا عن ذلك، لدينا:

$$f_v^{'}(a)=df_a(v).$$

إثبات

النتيجة حصيلة مباشرة للتعريفين $(17.1.2)$ و$(1.3.2)$:

$$f_v^{'}(a)=\lim_{t\to0}\frac{f(a+tv)-f(a)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{df_a(tv)+\|tv\|\varepsilon(tv)}{t}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{tdf_a(v)+|t|\|v\|\varepsilon(tv)}{t}=df_a(v)+\|v\|\lim_{t\to0}\frac{|t|\varepsilon(tv)}{t}=df_a(v).$$

19.3.2 ملحوظة

عكس هذه النتيجة خاطئ عموما، كما يبيّنه حال الدالّة:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & ;\ (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & ;\ (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

التي مرّت بك في المثال الثاني من المجموعة $(10.3.2)$. لقد اطّلعت على عدم قبولها المفاضلة عند $a=(0,0)$ ومع هذا فهي تقبل عند هذه النقطة الاشتقاق وفق أيّ شعاع غير معدوم.

وبالفعل، إذا كان $v=(r,s)$ شعاعا غير معدوم من $\mathbb{R}^2$ جاءنا توّا:

$$f_v^{'}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f((0,0)+t(r,s))-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(tr,ts)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{t^2rs}{\sqrt{t^2r^2+t^2s^2}}}{t}=\frac{rs}{\sqrt{r^2+s^2}}\lim_{t\to 0}t^2=0,$$

أي أنّ المشتقّ وفق v موجود.

إنّه حال الدالّة:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & ;\ (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & ;\ (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

كذلك. فهي تقبل الاشتقاق عند الصفر وفق اتجاه أيّ شعاع غير معدوم إذ لدينا:

$$f_v^{'}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f((0,0)+t(r,s))-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(tr,ts)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{t^3r^3-t^3s^3}{t^2r^2+t^2s^2}}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{r^3-s^3}{r^2+s^2}=\frac{r^3-s^3}{r^2+s^2};$$

ولم يشفع له ذلك لقبول المفاضلة عند الصفر لعدم وجود هذه النهاية:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h+0,k+0)-f(0,0)-h\dfrac{\partial g}{\partial x}(0,0)-k\dfrac{\partial g}{\partial y}(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}}=$$

$$=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{h^3-k^3}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}=\lim_{\substack{r\to 0\\ \theta\in[0,2\pi[}}\cos^3\theta-\sin^3\theta.$$

4.2 قابلية الدوال $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ للمفاضلة

1.4.2 تعريف

ليكن p عددا طبيعيّا أكبر من 1.

نقول عن دالّة $f = (f_1, f_2, ..., f_p) : U_a \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ معرّفة في جوار U_a لنقطة a من $\left(\mathbb{R}^n, \|.\|\right)$ إنّها قابلة للمفاضلة عند هذه النقطة إذا وجد **تطبيق خطّيّ** $L_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ ودالّة $\varepsilon : V_0 \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ بحيث $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$، يسمحان بالكتابة:

$$f(a+h) - f(a) = L_a(h) + \|h\| \varepsilon_a(h).$$

ونقول عنها إنّها قابلة للمفاضلة على جزء A من $\mathbb{R}^n$ إذا كانت كذلك عند كلّ نقطة a من A.

يسمّى التطبيق الخطيّ L_a تفاضلية f عند a ويرمز له كما سبق بـ df_a.

إنّ المبرهنة الموالية من الأهمية بمكان. إنّها تزيد التعريف وضوحا إذ تربطه بما سبق وتقدّم له وجها عملياتيّا يثلج صدر مبتدئ مثلك. إليكها !

2.4.2 مبرهنة

تكون دالّة $f = (f_1, f_2, ..., f_p) : U_a \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ قابلة للمفاضلة عند a إذا وفقط إذا كانت كلّ مركّباتها $(f_i)_{1 \le i \le p}$ كذلك.

إثبات لزوم الشرط.

لنفترض أنّ f قابلة للمفاضلة عند a. نكتب تعريفا:

$$f(a+h) - f(a) = df_a(h) + \|h\| \varepsilon(h), \qquad (*)$$

حيث :

أ. $L_a=\left(L_a^1,L_a^2,...,L_a^p\right)$ **تطبيق خطيّ من** $\mathbb{R}^n$ **نحو** $\mathbb{R}^p$ **مركّباته** $\left(L_a^i\right)_{1\le i\le p}$ **أشكال خطيّة على** $\mathbb{R}^n$،

ب. $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h)=\lim\limits_{h\to 0}\left(\varepsilon_1(h),\varepsilon_2(h),...,\varepsilon_p(h)\right)=(0,0,...,0).$

وعليه، تأخذ العلاقة $(*)$ الشكل الجديد:

$$f(a+h)-f(a)=\begin{pmatrix} f_1(a+h)-f_1(a),\, f_2(a+h)-f_2(a),... \\ ...,\, f_p(a+h)-f_p(a)\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} L_a^1(h)+\|h\|\varepsilon_1(h), L_a^2(h)+\|h\|\varepsilon_2(h),... \\ ..., L_a^p(h)+\|h\|\varepsilon_p(h)\end{pmatrix}$$

نستخلص توّا أنّ:

$$\begin{aligned} f_1(a+h)-f_1(a)&=L_a^1(h)+\|h\|\varepsilon_1(h),\\ f_2(a+h)-f_2(a))&=L_a^2(h)+\|h\|\varepsilon_2(h),\\ \vdots\qquad\qquad & \qquad\vdots\qquad\qquad\vdots\\ f_p(a+h)-f_p(a)&=L_a^p(h)+\|h\|\varepsilon_p(h).\end{aligned}$$

وهو ما يبيّن أنّ كلّ مركّبة f_i **قابلة للمفاضلة عند** a **وأنّ تفاضليتها هي:**

$$df_{Ia}=L_a^i.$$

كفاية الشرط.

لنفترض أنّ كلّ مركّبة f_i **قابلة للمفاضلة عند** a **وأنّ تفاضليتها هي** df_{Ia} **. نكتب تعريفا:**

$$f_i(a+h)-f_i(a)=df_{ia}(h)+\|h\|\varepsilon_i(h), \qquad (*)$$

وعليه:

$$f(a+h)-f(a)=\begin{pmatrix} f_1(a+h)-f_1(a),\, f_2(a+h)-f_2(a),\ldots \\ \ldots,\, f_p(a+h)-f_p(a)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} df_{1a}(h)+\|h\|\varepsilon_1(h), df_{2a}(h)+\|h\|\varepsilon_2(h),\ldots \\ \ldots, df_{pa}(h)+\|h\|\varepsilon_p(h)\end{pmatrix}.$$

حيث :

أ. df_{ia} شكل خطيّ على $\mathbb{R}^n$،

ب. $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon_i(h)=0,\ i=1,2,\ldots,p.$

إذا أخذنا $L_a=(df_{1a},df_{2a},\ldots,df_{pa})$ و $\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_p)$ ضمنّا قابلية f للمفاضلة عند a، وبذا يكتمل البرهان.

3.4.2 نتيجة

تفاضلية دالّة $f=(f_1,f_2,\ldots,f_p):U_a\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ هي التطبيق الخطّي المعطى بـ:

$$df_a=(df_{1a},df_{2a},\ldots,df_{pa}),$$

حيث df_{ia} هي تفاضلية المركّبة f_i . نكتب بشأنها بفضل النتيجة الثانية (9.3.2):

$$\begin{aligned} df_a(h)&=(df_{1a}(h),df_{2a}(h),\ldots,df_{pa}(h)) \\ &=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(a)h_i,\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_2}{\partial x_i}(a)h_i,\ldots,\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_p}{\partial x_i}(a)h_i\right)\end{aligned}$$

وفضلا، عن هذا، يمكن في حالة تزويد $\mathbb{R}^n$ و $\mathbb{R}^p$ بأساسيهما القانونيّين أن نأتي بالشكل المصفوفيّ للتفاضلية df_a :

$$df_a(h)=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \dots \\ h_n \end{pmatrix}$$

تسمّى المصفوفة ذات p سطرا و n عمودا:

$$Jf_a=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) \end{pmatrix},$$

المصفوفة اليعقوبيّة عند a للدالّة f .

4.4.2 نتيجة

البندان الأوّل والثالث من المبرهنة (16.3.2) يظلان صحيحين من أجل الدوال $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$.

5.4.2 أمثلة

1) الدالّة $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ المعطاة بـ:

$$f(x,y)\mapsto (x+y,xy),$$

تقبل المفاضلة على $\mathbb{R}^2$ لكون مركّبتيها كذلك. لحساب تفاضليتها عند نقطة (x_0,y_0) من $\mathbb{R}^2$ نعيّن أوّلا مصفوفتها اليعقوبيّة $Jf_{(x_0,y_0)}$. لدينا بهذا الشأن:

$$Jf_{(x_0,y_0)}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0,y_0)\\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0,y_0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ y_0 & x_0\end{pmatrix},$$

هكذا، نجد:

$$df_{(x_0,y_0)}(h,k)=Jf_{(x_0,y_0)}\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ y_0 & x_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}=\left(h+k),y_0h+x_0k\right).$$

2) الدالّة $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ المعطاة بـ:

$$f(x,y)\mapsto(\sin(x-y),\sin xy)),$$

تقبل بدورها المفاضلة على $\mathbb{R}^2$ لكون مركّبتيها كذلك. وفضلا عن هذا لدينا:

$$Jf_{(x_0,y_0)}=\begin{pmatrix}\cos(x_0+y_0) & -\cos(x_0-y_0)\\ y_0\cos x_0y_0 & x_0\cos x_0y_0\end{pmatrix};$$

وبالتالي:

$$\begin{aligned}df_{(x_0,y_0)}(h,k)&=Jf_{(x_0,y_0)}\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(x_0+y_0) & -\cos(x_0-y_0)\\ y_0\cos x_0y_0 & x_0\cos x_0y_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}\\&=\left(h\cos(x_0+y_0)-k\cos(x_0-y_0),(hy_0+kx_0)\cos x_0y_0\right).\end{aligned}$$

3) إنّه حال الدالّة $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ المعطاة بـ:

$$f(x,y)\mapsto(x+y,x-y,xy).$$

مصفوفتها اليعقوبيّة $Jf_{(x_0,y_0)}$ عند نقطة (x_0,y_0) من $\mathbb{R}^2$ هي:

$$Jf_{(x_0,y_0)}=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial f_3}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ y_0 & x_0 \end{pmatrix},$$

وعليه، تكون تفاضليتها عند (x_0,y_0) معرّفة على هذا المنوال:

$$\begin{aligned} df_{(x_0,y_0)}(h,k) &= Jf_{(x_0,y_0)}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ y_0 & x_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \\ &= \left(h+k, h-k, y_0h+x_0k\right). \end{aligned}$$

5.2 قابليّة الدوال المركّبة للمفاضلة وتبديل المتغيّرات

1.5.2 مبرهنة

لتكن m و n و p ثلاثة أعداد طبيعيّة غير معدومة.

إذا كانت $f:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ دالّة قابلة للمفاضلة عند نقطة a من $\mathbb{R}^m$ وكانت $g:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ دالّة قابلة للمفاضلة عند $f(a)$ فإنّ الدالّة المركّبة $g\circ f$ تقبل عندئذ المفاضلة عند a وتفاضليتها عند هذه النقطة معرّفة بالعلاقة :

$$d(g\circ f)_a = dg_{f(a)} \circ df_a;$$

ومصفوفتها اليعقوبيّة $J(g\circ f)_a$ معطاة بالجداء المصفوفي:

$$J(g\circ f)_a = Jg_{f(a)}.Jf_a.$$

2.5.2 مثالان

1) الدالّتان $f,g:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ المعطاتان على النحو:

$$f(x,y)=\left(3x^2,2xy\right),$$

$$g(x,y)=(-x,3y),$$

تحقّقان بداهة شروط المبرهنة. وعليه، فإنّ الدالّتين المركّبتين $g\circ f$ و $f\circ g$ تقبلان المفاضلة على $\mathbb{R}^2$ ؛ وفضلا عن ذلك، تأتي مصفوفتاهما اليعقوبيّتان $J(g\circ f)_{(a,b)}$ و $J(f\circ g)_{(a,b)}$ عند نقطة (a,b) من $\mathbb{R}^2$ على الشكل:

$$J(g\circ f)_{(a,b)} = Jg_{f(a,b)}.Jf_{(a,b)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6a & 0 \\ 2b & 2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6a & 0 \\ 6b & 6a \end{pmatrix};$$

$$Jf_{g(a,b)}.Jg_{(a,b)} = \begin{pmatrix} -6a & 0 \\ 6b & -2a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6a & 0 \\ -6b & -6a \end{pmatrix}.$$

نستخلص أنّ تفاضليتي الدالّتين $f \circ g$ و $g \circ f$ عند (a,b) معرّفتان على النحو:

$$d(g \circ f)_{(a,b)}(h,k) = \begin{pmatrix} -6a & 0 \\ 6b & 6a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \left(-6ah, 6bh + 6ak\right);$$

$$d(f \circ g)_{(a,b)}(h,k) = \begin{pmatrix} 6a & 0 \\ -6b & -6a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \left(6ah, -6bh - 6ak\right).$$

2) **الدالّتان** $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ **و** $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ **المعطاتان بالصيغتين:**

$$f(x,y) = \left(x^2 + y^2, x^2 - y^2\right),$$

$$g(x,y) = (x + y, xy, x - y),$$

تحقّقان بدورهما شروط المبرهنة. وعليه، فإنّ نتائجها المترتّبة على الدالّة المركّبة $g \circ f$ مضمونة. لدينا بشأن مصفوفتها اليعقوبيّة $J(g \circ f)_{(a,b)}$ عند نقطة (a,b) من $\mathbb{R}^2$:

$$Jg_{f(a,b)}.Jf_{(a,b)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a^2 - b^2 & a^2 + b^2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2a & -2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a & 0 \\ 4a^3 & -4b^3 \\ 0 & 4b \end{pmatrix};$$

وهو ما يقود إلى أنّ تفاضلية الدالّة $g \circ f$ عند (a,b) معرّفة بـ:

$$d(g \circ f)_{(a,b)}(h,k) = \begin{pmatrix} 4a & 0 \\ 4a^3 & -4b^3 \\ 0 & 4b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \left(4ah, 4a^3h - 4b^3k, 4bk\right).$$

3.5.2 ملحوظة

بمكن في الحالة الحاضرة إجراء حساب المصفوفات السابق مباشرة. فنجد في الحالة الأولى توّا:

$$(g \circ f)(x,y) = g \circ (f(x,y)) = g\left(3x^2, 2xy\right) = \left(-3x^2, 6xy\right);$$
$$(f \circ g)(x,y) = f(g(x,y)) = f\left(-x, 3y\right) = \left(3x^2, -6xy\right);$$

وبالتالي:

$$J(g \circ f)_{(x,y)} = \begin{pmatrix} -6x & 0 \\ 6y & 6x \end{pmatrix}; \quad J(f \circ g)_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ -6y & -6x \end{pmatrix}.$$

وفي الحالة الثانية نجد بالمثل:

$$(g \circ f)(x,y) = g\left(x^2 + y^2, x^2 - y^2\right) = \left(2x^2, x^4 - y^4, 2y^2\right);$$

وعليه:

$$J(g \circ f)_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 4x & 0 \\ 4x^3 & -4y^3 \\ 0 & 4y \end{pmatrix}.$$

4.5.2 نتيجة

إذا كانت $f : A \subset \mathbb{R}^n \to B \subset \mathbb{R}^n$ دالّة تقابليّة وكانت قابلة للمفاضلة عند نقطة a من A بحيث $Jf(a) \neq 0$ ، فإنّ دالّتها العكسيّة $f^{-1} : B \to A$ تقبل المفاضلة عند النقطة $f(a)$ وتفاضليتها $df^{-1}_{f(a)}$ عند هذه النقطة معطاة بالدستور:

$$df^{-1}_{f(a)} = \left(df_a\right)^{-1}.$$

إثبات

يكفي أخذ $g = f^{-1}$ في المبرهنة أعلاه.

5.5.2 مبدأ تبديل المتغيّرات

لتكن f دالّة حقيقيّة من الصنف $\mathscr{C}^1$ على جزء D_f من $\mathbb{R}^2$، متغيّراها x و y من $\mathbb{R}$. لنفترض أنّ x و y دالّتان لمتغيّرين حقيقيّين آخرين u و v:

$$x = g_1(u,v),$$
$$y = g_2(u,v).$$

يمكن والحال هذه اعتبار الدالّة f كدالّة للمتغيّرين الجديدين u و v. لنعتبر الدالّة:

$$\begin{aligned} g : D_g \subset \mathbb{R}^2 &\to D_f \\ (u,v) &\mapsto g(u,v) = \left(g_1(u,v), g_2(u,v)\right); \end{aligned}$$

ولنفترض أنّ g تقابليّة وأنّ g و g^{-1} من الصنف $\mathscr{C}^1$:

$$\begin{aligned} (f \circ g) : F &\to \mathbb{R} \\ (u,v) &\mapsto f\left(g_1(u,v), g_2(u,v)\right) \end{aligned}$$

إنّ اعتبار f كدالّة للمتغيّرين الجديدين u و v يعود إلى الدمج بينها وبين الدالّة المركبّة $f \circ g$. يمكن على ضوء المبرهنة أعلاه أن نحصل على:

$$d(f \circ g)(u,v) = df_{g(u,v)}.dg_{(u,v)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}\left(g(u,v)\right) & \dfrac{\partial f}{\partial y}\left(g(u,v)\right) \end{pmatrix}$$

وبالتالي:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial (f \circ g)}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial (f \circ g)}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}\left(g(u,v)\right) & \dfrac{\partial f}{\partial y}\left(g(u,v)\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial u} & \dfrac{\partial g_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial u} & \dfrac{\partial g_2}{\partial v} \end{pmatrix}$$

وهو ما يقود إلى هذه الجملة:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(f\circ g)}{\partial u} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial g_1}{\partial u} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial g_2}{\partial u}, \\ \dfrac{\partial(f\circ g)}{\partial v} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial g_1}{\partial v} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial g_2}{\partial v}. \end{cases} \qquad (1)$$

عمليّا وبصفة عامّة، نرمز للدالّة g_1 بـ x وg_2 بـ y و$f\circ g$ بـ f . تأخذ الجملة (1) بعد هذا الاتفّاق الشكل التالي:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial u} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u}, \\ \dfrac{\partial f}{\partial v} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial v}. \end{cases} \qquad (2)$$

نحصل هكذا على علاقة بين مشتقّي f الجزئيّين بالنسبة إلى المتغيّرين الجديدين u وv ومشتقّيها بالنسبة إلى المتغيّرين الأصليّين x وy. يمكن بطبيعة الحال أن نأتي بالجملة (2) على شكلها المصفوفيّ:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u} \\ \dfrac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

إذا تمعنّا في هذه الجملة لاحظنا أنّ مصفوفتها ما هي إلاّ المصفوفة اليعقوبيّة الملحقة بالدالّة g . ولمّا كانت هذه الأخيرة قابلة للقلب فرضا حقّ لنا الحصول على:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} \\ \frac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

6.5.2 مثالان

1) هب أنّه أعطيت لك دالّة $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ من الصنف $\mathscr{C}^2$ وقيل لك ضع $u = x - y$ و $v = x + y$ ثمّ إيتي بالعبارة $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} - \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}$ بدلالة مشتقّات f الجزئيّة بالنسبة إلى المتغيّرين الجديدين u و v. كنت في هذه الحالة تستخرج $x = \frac{u+v}{2}$ و $y = \frac{u-v}{2}$ ثمّ تلجأ إلى الدستور (2) لتجد:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y},$$
$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y};$$

وعليه:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v}. \end{cases}$$

ولمّا كانت f من الصنف $\mathscr{C}^2$ قمت بالاشتقاق الجزئي من جديد واستحضرت مبرهنة شوارز لتجد:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$
$$=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial v}\right)$$
$$=\frac{\partial^2 f}{\partial^2 u}+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$
$$=\frac{\partial^2 f}{\partial^2 u}+2\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2};$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$
$$=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{\partial f}{\partial v}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{\partial f}{\partial v}\right)$$
$$=\frac{\partial^2 f}{\partial^2 u}-\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}-\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$
$$=\frac{\partial^2 f}{\partial^2 u}-2\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}.$$

هكذا، تصل إلى المبتغى:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}-\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}=4\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}.$$

2) **لتكن** $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ **دالّة من الصنف** $\mathscr{C}^2$. **تسمّى العبارة :**

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

مؤثّر لابلاس[21] **أو اللابلاسيّ. لو طلب منك استحضار الاحداثيات القطبيّة** $x=r\cos\theta$ **و** $y=r\sin\theta$ **ثمّ القيام بالتعبير عن مؤثّر لابلاس**

21. Pierre-Simon Laplace : رياضياتي وفيزيائي فلكي فرنسيّ كبير. ولد بنورماندي في 23 مارس 1749 ومات بباريس في 5 مارس 1827. يعدّ من أبرز علماء فرنسا النابوليونيّة.

بدلالة مشتقّات f الجزئيّة بالنسبة إلى المتغيّرين r وθ كنت تفعل ما فعلته في المثال الأوّل، فتكتب:

$$\frac{\partial f}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}=\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}, \qquad (*)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}=-r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}+r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}. \qquad (**)$$

إذا ضربت العلاقة $(*)$ في $\cos\theta$ والعلاقة $(**)$ في $-\frac{\sin\theta}{r}$ ثمّ جمعت الحاصلين أتاك:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\cos\theta\frac{\partial f}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}. \qquad (***)$$

وإذا ضربت العلاقة $(*)$ في $\sin\theta$ والعلاقة $(**)$ في $\frac{\cos\theta}{r}$ ثمّ جمعت الحاصلين أتاك أيضا:

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\sin\theta\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}. \qquad (****)$$

استند الآن إلى العلاقة $(***)$ لتشتقّ من جديد (مستحضرا مبرهنة شوارز):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$=\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$=\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\cos\theta\frac{\partial f}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\cos\theta\frac{\partial f}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)$$

$$=\cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}-\left[-\frac{\sin 2\theta}{2r^2}\frac{\partial f}{\partial\theta}+\frac{\sin 2\theta}{2r}\frac{\partial^2 f}{\partial r\partial\theta}\right]-$$

$$-\left[-\frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{\sin 2\theta}{2r}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta\partial r}\right]+\left[\frac{\sin 2\theta}{2r^2}\frac{\partial f}{\partial\theta}+\frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}\right]$$

$$=\cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}-\frac{\sin 2\theta}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta\partial r}+\frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{\sin 2\theta}{r^2}\frac{\partial f}{\partial\theta}$$

وبالمثل، إذا لجأت إلى العلاقة (****) ظفرت دونما عناء ب:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$=\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$=\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)$$

$$=\sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\left[-\frac{\sin 2\theta}{2r^2}\frac{\partial f}{\partial\theta}+\frac{\sin 2\theta}{2r}\frac{\partial^2 f}{\partial r\partial\theta}\right]+$$

$$+\left[\frac{\cos^2\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{\sin 2\theta}{2r}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta\partial r}-\frac{\sin 2\theta}{2r^2}\frac{\partial f}{\partial\theta}+\frac{\cos^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}\right]$$

$$=\sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{\cos^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}+\frac{\sin 2\theta}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial r\partial\theta}+\frac{\cos^2\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial r}-\frac{\sin 2\theta}{r^2}\frac{\partial f}{\partial\theta}$$

ليس صعبا عليك بعد هذا أن تصل إلى الدستور المطلوب:

$$\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}+\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}=\frac{\partial^2 f}{\partial^2 r}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}.$$

6.2 الدوال الضمنيّة

1.6.2 تعريف

ليكن I **و** J **مجالين حقيقيّين و** f **دالّة حقيقيّة منطلقها** $I\times J$ **. إذا قبلت المعادلة** $f(x,y)=0$ **ذات المجهول** y **حلاً في** J **من أجل كلّ** x **من** I **قلنا عندئذ إنّ العلاقة** $f(x,y)=0$ **تعرّف ضمنيّا** y **بدلالة** x**، أي أنّه توجد دالّة** $\varphi: I\to J$ **بحيث:**

$$\forall x\in I,\quad f\left(x,\varphi(x)\right)=0.$$

تسمّى الدالّة φ **دالّة ضمنية لـ** x .

2.6.2 أمثلة

1) **لتكن الدالّة:**

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$$
$$(x,y)\mapsto x^2+y^2-4,$$

ولنضع من أجل كلّ x **من** $\mathbb{R}$:

$$\Gamma(x)=\{y\in\mathbb{R}: f(x,y)=0\}.$$

لدينا على الفور:

$$\Gamma(x)=\begin{cases}\phi & ;\ |x|>2,\\ \{0\} & ;\ |x|=2,\\ \left\{-\sqrt{4-x^2},\sqrt{4-x^2}\right\} & ;\ |x|<2.\end{cases}$$

أ. **لنتوهّم النقطة** $(x_0,y_0)=(0,2)$ **. لدينا** $f(0,2)=0$.

بوجد جوار $I=]-2,2[$ **لـ** $x_0=0$ **وآخر** $J=]0,+\infty[$ **لـ** y_0 **بحيث مهما يكن** x **من** I **فإنّ المعادلة** $f(x,y)=0$ **تقبل حلاً وحيدا** y **في** J **. وبالفعل، يكفي أخذ** $y=\sqrt{4-x^2}$.

هكذا، إذا أخذنا $\varphi(x)=\sqrt{4-x^2}$ ضمنّا $f(x,\varphi(x))=0$. الدالّة φ تلحق بكلّ عنصر x من $I=\left]-2,2\right[$ الحلّ الوحيد $y=\sqrt{4-x^2}$ في J . إنّها معرّفة هنا بشكل صريح.

ب. لنتصوّر الآن النقطة $(x_0,y_0)=(2,0)$. لدينا $f(2,0)=0$. إذا أخذنا الجوار $I=\left]0,+\infty\right[$ لـ $x_0=2$ والجوار $J=\left]-2,2\right[$ لـ $y_0=0$ فإنّ المعادلة $x^2+y^2-4=0$ تقبل حلّين في J هما $-\sqrt{4-x^2}$ و $\sqrt{4-x^2}$. يتعذّر، والحال هذه، صوغ y كدالّة لـ x . الدالّة الضمنيّة φ غير موجودة.

3.6.2 مبرهنة (الدوال الضمنيّة)

لتكن f دالّة حقيقيّة مستمرّة على جوار مفتوح Ω لنقطة (x_0,y_0) من $\mathbb{R}^2$. نفترض أنّ المشتقّ الجزئيّ $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ موجود على Ω . إذا كان $f(x_0,y_0)=0$ و $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$ فإنّه توجد عندئذ:

أ. بلاطة مفتوحة $I\times J$ بحيث $(x_0,y_0)\in I\times J\subset\Omega$

ب. دالّة $\varphi:I\to J$

بحيث:

1) من أجل كلّ x من I يكون $y=\varphi(x)$ الحلّ الوحيد في J للمعادلة $f(x,y)=0$.

2) وبالخصوص $\varphi(x_0)=y_0$.

وعلاوة على ما سبق، إذا قبلت f مشتقّا جزئيّا مستمرّا $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ عند (x_0,y_0) كانت φ عندئذ قابلة للاشتقاق عند x_0 وحقّق مشتقّها العلاقة:

$$\varphi'(x_0)=-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,\varphi(x_0))}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,\varphi(x_0))}.$$

وإذا كانت f دالّة من الصنف $\mathscr{C}^1$ على جوار مفتوح Ω لنقطة (x_0,y_0) من $\mathbb{R}^2$ فإنّ الدالّة φ تقبل الاشتقاق في جوار I لـ x_0 . وفضلا عن هذا، يمكن انطلاقا من العلاقة $f(x,\varphi(x))=0$ الظفر بـ:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x))+\varphi'(x)\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))=0;$$

وبالتالي:

$$\forall x\in I\quad \varphi'(x)=-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x))}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))}.$$

4.6.2 مثالان

1) **لنأخذ** $\Omega=\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$ **و** $f(x,y)=y\sin\dfrac{y}{x}+1-x^2$ **. من الواضح أنّ الدالّة f من الصنف $\mathscr{C}^1$ على Ω ولدينا:**

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}.$$

إذا اخترنا النقطة $(x_0,y_0)=(1,\pi)$ لاحظنا أنّ:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,\pi)=-\pi\neq 0.$$

يوجد بموجب مبرهنة الدوال الضمنيّة مجالان مفتوحان I و J ودالّة $\varphi:I\to J$ بحيث:

- $I\times J\subset\Omega,$
- $\forall x\in I\quad \varphi(x)\sin\dfrac{\varphi(x)}{x}+1-x^2=0,$
- $\varphi(1)=\pi,$

- $$\varphi'(x) = -\frac{-\frac{\varphi(x)^2}{x^2}\cos\frac{\varphi(x)}{x} - 2x}{\sin\frac{\varphi(x)}{x} + \frac{\varphi(x)}{x}\cos\frac{\varphi(x)}{x}}.$$

2) لنبيّن أنّ العلاقة $Log(1+x+y) - x^2 + y^2 = 0$ تعرّف ضمنيّا y بدلالة x في جوار النقطة $(0,0)$. نضع بغية ذلك:

$$f(x,y) = Log(1+x+y) - x^2 + y^2.$$

لدينا بطبيعة الحال $f(0,0) = 0$. ليكن U نصف المستوي العلويّ المفتوح المحدود بالمستقيم $1+x+y=0$. إنّه جوار مفتوح للنقطة $(0,0)$ والدالّة f من الصنف $\mathscr{C}^\infty$ عليه. لدينا أيضا:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{1+x+y} + 2y; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1 \neq 0.$$

يوجد بمقتضى مبرهنة الدوال الضمنيّة جوار V لـ 0 وجوار W لـ 0 ودالّة $\varphi : V \to W$، تزوّج كلّ عنصر x من V بـ $y = \varphi(x)$ الحل الوحيد في W للمعادلة $Log(1+x+y) - x^2 + y^2 = 0$. الدالّة φ من الصنف $\mathscr{C}^\infty$ وتحقّق:

$$\varphi'(x) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))} = \frac{\frac{1}{1+x+\varphi(x)} - 2x}{\frac{1}{1+x+\varphi(x)} + 2\varphi(x)}$$

$$= \frac{1 - 2x - 2x^2 - 2x\varphi(x)}{1 + 2\varphi(x) + 2x\varphi(x) + 2\varphi^2(x)}.$$

نقوم فيما يلي باستعراض تعميم لمبرهنة الدوال الضمنيّة إلى حالة المعادلات $f(x_1,\ldots,x_n,y) = 0$.

5.6.2 مبرهنة

لتكن $(x_{01}, x_{02}, ..., x_{0n}, y_0)$ نقطة من $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ و Ω جوارا لها. ولتكن $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دالّة مستمرّة على Ω وقابلة مشتقّا جزئيّا بالنسبة إلى y في Ω.

إذا كانت $f(x_{01}, x_{02}, ..., x_{0n}, y_0) = 0$ و $\frac{\partial f}{\partial y}(x_{01}, x_{02}, ..., x_{0n}, y_0) \neq 0$

فإنّه يوجد جواران $U(x_{01}, x_{02}, ..., x_{0n}, y_0)$ لـ $(x_{01}, x_{02}, ..., x_{0n}, y_0)$ و $V(y_0)$ لـ y_0 ودالّة $\varphi : U \to V$ بحيث:

- $U \times V \subset \Omega,$
- من أجل كلّ x من U يكون $y = \varphi(x)$ الحلّ الوحيد في V للمعادلة

  $f(x_1, x_2, ..., x_n, y) = 0$ ؛
- وبالخصوص، $\varphi(x_{01}, x_{02}, ..., x_{0n}) = y_0$ ؛
- وعلاوة على ذلك، إذا كانت f من الصنف $\mathscr{C}^1$ على Ω فإنّ φ تكون من الصنف $\mathscr{C}^1$ عند النقطة x_0 ولدينا:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}}{\frac{\partial f}{\partial y}}.$$

6.6.2 مثال

لنعتبر الدالّة الحقيقيّة f المعطاة على $\mathbb{R}^3$ بـ:

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1,$$

والنقطة $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 1)$.

إنّ الدالّة f من الصنف $\mathscr{C}^\infty$ على $\mathbb{R}^3$ وتحقّق:

$$\frac{\partial f}{\partial z}(0, 0, 1) = 2 \neq 0.$$

نجزم بفضل مبرهنة الدوال الضمنيّة بوجود جوار U لـ $(0,0)$ وجوار V لـ 1 ودالّة $\varphi : U \to V$ بحيث:

$$\forall (x,y) \in U \ , \ f(x,y,\varphi(x,y)) = x^2 + y^2 + \varphi^2(x,y) - 1 = 0;$$

وزيادة على ذلك، لدينا:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = \frac{-\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,\varphi)}{\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,\varphi)} = \frac{-x}{\varphi(x,y)},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = \frac{-\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,\varphi)}{\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,\varphi)} = \frac{-y}{\varphi(x,y)}.$$

7.2 تمارين محلولة

1) لتكن الدالّة $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ المعرّفة على النحو:

$$f(x,y)=2x^2-xy+y^2.$$

احسب، مستخدما التعريف، مشتقّيها $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ عند كلّ نقطة (x,y) من $\mathbb{R}^2$.

2) اثبت مستخدما التعريف أنّ الدالّة $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ المعطاة بـ:

$$f(x,y,z)=x-4y+z-y^2+5z^3.$$

تقبل الاشتقاق الجزئي من الرتبة الأولى على $\mathbb{R}^3$.

3) $1)$ جد الدالّة f في كلّ حالة من الحالات الثلاثة التالية:

$$1)\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0;\quad 2)\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0;\quad 3)\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y)=0.$$

4) لتكن الدالّة الحقيقيّة f المعرّفة في $\mathbb{R}^2$ بـ:

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2\sin\frac{y}{x}; & x\neq 0,\\ 0 ; & x=0.\end{cases}$$

$1)$ ادرس استمرار الدالّة f .

$2)$ أ. احسب $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y_0)$ و $\frac{\partial f}{\partial y}(0,y_0)$ من أجل عنصر y_0 من $\mathbb{R}$.

ب. احسب المشتقّين الجزئيّين $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ و $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ من أجل (x,y) من $\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$.

ج. هل المشتقّان الجزئيّان مستمرّان عند النقطة $(0,y_0)$ ؟

5) **لتكن الدالّة** $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ **المعرّفة على النحو:**

$$f(x,y)=\sqrt[3]{xy}.$$

1) **اثبت أنّ المشتقّين الجزئيّين** $\frac{\partial f}{\partial x}$ **و** $\frac{\partial f}{\partial y}$ **موجودان عند** $(0,0)$.

2) **هل الدالة** f **قابلة للمفاضلة عند** $(0,0)$ ؟

6) **لتكن الدالّة** $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ **المعرّفة تحت الشكل:**

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

1) **اثبت أنّ:**

$$f(x,y)\leq\frac{1}{4}\|(x,y)\|_2^2.$$

2) **استخلص أنّ** f **مستمرّة عند** $(0,0)$.

3) **احسب** $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ **و** $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

4) **اثبت أنّ** f **قابلة للمفاضلة عند** $(0,0)$.

7) **لنعتبر الدالّة الحقيقيّة** f **المعرّفة على** $\mathbb{R}^2$ **بـ:**

$$f(x,y)=\begin{cases}x\,Arctg\left(\dfrac{y}{x}\right) & ;\ x\neq 0,\\ 0 & ;\ x=0.\end{cases}$$

1) **ادرس استمرار الدالّة** f **على** $\mathbb{R}^2$.

2) **احسب إن وجدت، المشتقّات الجزئيّة من الرتبة الأولى التالية:**

أ. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ ، $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$

ب. $\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)$ ، $\frac{\partial f}{\partial y}(1,0)$

ج. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)$ ، $\frac{\partial f}{\partial y}(0,1)$

3) هل الدالّة f قابلة للمفاضلة عند النقط التالية: (برّر إجابتك)

أ. $(0,0)$

ب. $(1,0)$

ج. $(0,1)$

4) ماذا عن صحّة النهاية التالية:

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{xArctg\left(\frac{y}{x}\right)-y}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}=0?$$

8) لنعتبر الدالّة الحقيقيّة f المعرّفة على $\mathbb{R}^2$ على هذا النحو:

$$f(x,y)=\begin{cases} y\,th\left(\frac{x}{y}\right), & y\neq 0, \\ 0, & y=0. \end{cases}$$

1) اثبت أنّ f مستمرّة على $\mathbb{R}^2$.

2) احسب إن وجدت، المشتقّات الجزئيّة من الرتبة الأولى التالية:

أ. $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$,

ب. $\frac{\partial f}{\partial y}(1,0)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)$,

ج. $\frac{\partial f}{\partial y}(0,1)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)$,

3) ادرس قابلية المفاضلة للدالّة f عند النقاط $(0,0)$ و $(1,0)$ و $(0,1)$.

9) **لتكن الدالّة** $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ **المعرّفة على النحو:**

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(x+y)}{x^2+y^2}; & (x,y)\neq(0,0),\\ 0 ; & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

1) **تحقّق من أنّ** f **مستمرّة على** $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

2) **برهن أنّ المشتقّين الجزئيّين** $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ **و** $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ **موجودان على** $\mathbb{R}^2$ **ثمّ احسبهما.**

3) **هل تقبل** f **المفاضلة عند النقطة** $(0,0)$ **؟**

4) **هل** f **مستمرّة عند النقطة** $(0,0)$ **؟**

5) **لتكن الدالّة الحقيقيّة** g **المعطاة على** $\mathbb{R}^2$ **بـ:**

$$g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} ; & (x,y)\neq(0,0),\\ 0 ; & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

أ. **جد علاقة بسيطة تربط** g **بالدالّة** f .

ب. **استنتج أنّ** g **مستمرّة على** $\mathbb{R}^2$ **وقابلة للمفاضلة على ميدان يطلب تعيينه.**

10) **نعتبر الدالّة** $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ **المعرّفة كما يلي:**

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)^{xy} ; & (x,y)\neq(0,0),\\ 1 ; & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

1) **برهن أنّ الدالّة** f **مستمرّة على** $\mathbb{R}^2$.

2) **ادرس استمرار المشتقّين الجزئيّين** $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ **و** $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ **على** $\mathbb{R}^2$.

3) **هل** f **قابلة للمفاضلة عند النقطة** $(0,0)$ **؟**

11) **لتكن الدالّة** $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ **المعرّفة على النحو:**

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\sin y-y\sin x}{x^2+y^2} & ;\ (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & ;\ (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

1) **اثبت أنّ** f **تقبل المفاضلة عند الصفر** $(0,0)$.

2) **اثبت أنّ المشتقّ الجزئيّ** $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ **لا يقبل المفاضلة عند** $(0,0)$.

12) **ليكن** α **وسيطا حقيقيّا موجبا تماما ولتكن** $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ **الدالّة المعرّفة على النحو:**

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{|xy|^{\alpha}}{x^2-xy+y^2} & ;\ (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & ;\ (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

1) **اثبت أنّ** f **مستمرّة على** $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ **أيّا كانت قيم الوسيط** α .

2) **ما هي قيم الوسيط** α **التي من أجلها تكون الدالّة** f **مستمرّة عند الصفر؟**

3) **اثبت أنّ** f **قابلة للمفاضلة على** $\mathbb{R}^2\setminus\{(x,0),(0,y);x,y\in\mathbb{R}\}$.

4) **ادرس قابليّة** f **للمفاضلة عند النقاط** $(0,0)$ **و** $(x_0,0)$ **و** $(0,y_0)$ ، **حيث** x_0 **و** y_0 **من** $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

13) **لتكن الدالّة الحقيقيّة** $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ **المعطاة بالصيغة:**

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x^2+xy+y^2)^2}{x^2+y^2} & ;\ (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & ;\ (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

1) اثبتْ أنّ f من الصنف $\mathscr{C}^{\infty}$ على $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

2) اثبتْ أنّ f من الصنف $\mathscr{C}^{1}$ عند الصفر.

3) هل f من الصنف $\mathscr{C}^{2}$ عند الصفر؟

14) لتكن الدالّة الحقيقيّة $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ المعطاة بالصيغة:

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & ;\ (x,y)\neq(0,0), \\ 0 & ;\ (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

1) اثبتْ أنّ f من الصنف $\mathscr{C}^{\infty}$ على $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

2) اثبتْ أنّ:

أ. f مستمرّة عند الصفر.

ب. f تقبل مشتقّين جزئيّين $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ و $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ على $\mathbb{R}^2$.

3) ادرس استمرار $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ و $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ على $\mathbb{R}^2$.

4) هل تقبل f المفاضلة عند $(0,0)$؟

15) لتكن الدالّة الحقيقيّة $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ المعطاة بالصيغة:

$$f(x,y)=\begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & ;\ (x,y)\neq(0,0), \\ 0 & ;\ (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

1) اثبتْ أنّ f من الصنف $\mathscr{C}^{\infty}$ على $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

2) اثبتْ أنّ المشتقّين الجزئيّين $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ و $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ موجودان على $\mathbb{R}^2$ بأكمله.

3) اثبتْ أنّ f ليست من الصنف $\mathscr{C}^{1}$ عند $(0,0)$.

4) هل تقبل f المفاضلة عند $(0,0)$؟

16) ليكن a وسيطا حقيقيّا. نعتبر الدالّة f المعرّفة على $\mathbb{R}^2$ بـ:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x-x\cos y+ay^2\sin x}{x^2+y^2}\,; & (x,y)\neq(0,0),\\ 0\,; & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

1) اثبت أنّ f دالّة مستمرّة على $\mathbb{R}^2$.

2) احسب المشتقّ الجزئيّ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ من أجل $a=0$ و:

أ. $(x,y)\neq(0,0)$

ب. $(x,y)=(0,0)$

3) أ. عيّن من أجل $a=0$ النهاية $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$.

ب. هل الدالّة $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ مستمرّة على $\mathbb{R}^2$ ؟

17) لتكن الدالّة f المعرّفة على $\mathbb{R}^2$ بـ:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x-1)^3+(y-2)^3}{(x-1)^2+(y-2)^2}\,; & (x,y)\neq(1,2),\\ \beta\,; & (x,y)=(1,2).\end{cases}$$

1) عيّن قيمة الوسيط الحقيقيّ β التي من أجلها تقبل الدالّة f الاستمرار على $\mathbb{R}^2$.

نفترض فيما يلي أنّ هذه القيمة معيّنة.

2) احسب المشتقّ الجزئيّ الأوّل $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ من أجل:

أ. $(x,y)=(1,2)$.

ب. $(x,y)\neq(1,2)$.

3) ادرس استمرار الدالّة $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ عند النقطة $(1,2)$.

18) لتكن الدالّة $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ المعطاة تحت الشكل:

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{(ax^2+bxy+cy^2)^2}{x^2+y^2} & ; \ (x,y)\neq(0,0), \\ 0 & ; \ (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

1) ادرس استمرار f على $\mathbb{R}^2$.

2) احسب المشتّقين $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ و $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

3) ادرس قابليّة f للمفاضلة على $\mathbb{R}^2$.

4) أ. احسب المشتّقين الجزئيّين $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ و $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$.

ب. استنتج المشتّقين الجزئيّين المزدوجين $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$.

5) ما هو الشرط الذي ينبغي أن تحقّقه الثوابت a و b و c لكي نضمن المساواة:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0).$$

19) لتكن الدالّة $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ المعطاة بـ:

$$f(x,y,z)\mapsto (x+y^2-z, xy^2z, xy+x^2z).$$

1) برّر قبول f المفاضلة على ميدان تعريفها.

2) احسب مصفوفة f اليعقوبيّة عند نقطة (x_0,y_0,z_0) من ميدان تعريفها.

3) استنتج تفاضليّة f عند نقطة (x_0,y_0,z_0) من ميدان تعريفها.

20) **لتكن المعادلة التفاضليّة ذات المشتقّين الجزئيّين المعطاة على النحو:**

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=0. \qquad (1)$$

حيث f **من الصنف** $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$. **نضع** $u=x+y$ **و** $v=x-y$ **ثمّ نعرّف الدالّة** g **بـ:**

$$g(u,v)=f(x,y).$$

1) **اكتب المعادلة** (1) **بدلالة المشتقّين الجزئيّين لـ** g.

2) **استنتج حلول المعادلة** (1).

3) **لنعتبر الميدان:**

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2-y^2>0\right\},$$

والدالّة f **من الصنف** $\mathscr{C}^2(D,\mathbb{R})$ **المحقّقة للمعادلة:**

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}.$$

حل هذه المعادلة مستعينا بالتحويل السابق ذاته.

21) **إذا طلب منك تطبيق هذه العلاقة:**

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial u}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u},\\[2mm] \dfrac{\partial z}{\partial v}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial v}.\end{cases}$$

فبماذا تمدّك في الوضعيتين التاليتين:

1) $z=\sqrt{x+y};\ x=e^{u+v},\ y=Log v,$

2) $z=xy;\ x=\cos(u+v),\quad y=\sin(u+v).$

22) **إذا طلب منك تطبيق هذه العلاقة:**

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

فبماذا تمدّك في الوضعيات الثلاث التالية:

$$u = e^{3x+2y} \ ; \ x = \cos t, \ \ y = t^2 \qquad (1$$

$$u = \frac{x}{y} \ ; \ x = e^t \ , \ y = Logt \qquad (2$$

$$u = Log\left(\sin\frac{x}{\sqrt{y}}\right); \ x = 3t^2 \ , \ y = \sqrt{t^2+1} \qquad (3$$

23) احتفظ بالسؤال أعلاه بخصوص العلاقة:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt},$$

والوضعيتين:

$$u = xyz\,, \ \ x = t^2+1, \ y = Logt, \ \ z = tgt; \qquad (1$$

$$u = z^{x+y}, \ x = \cos t\,, \ y = \sin t, \ \ z = cht. \qquad (2$$

(1

24) استعمل القاعدة:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

لحساب المشتقّين الجزئيّين $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{dz}{dx}$ في الحالتين الموصوفتين على النحو:

$$z = Arctg\frac{y}{x}, \ y = x^2 \quad (1$$

$$z = x^y y, \ \ \ y = x^x \quad (2$$

25) نضع $u = x$ و $v = x + y$ و:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \qquad (*)$$

حيث f من الصنف $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

1) ما هو الشكل الذي تكون عليه المعادلة (*) إزاء المتغيّرين الجديدين u و v؟

2) هات حلّها في هذا الإطار.

3) استنتج حلول المعادلة $(*)$.

26) نضع $u=\dfrac{x}{y}$ و $v=x^2+y^2$ و $w=f^2$ و:

$$f\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)+x^2+y^2=0, \qquad (*)$$

حيث f من الصنف $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$.

1) ما هو الشكل الذي تكون عليه المعادلة $(*)$ إزاء المتغيّرات الجديدة u و v وكذا w ؟

2) هات حلها في هذا الإطار.

3) استنتج حلول المعادلة $(*)$.

27) لتكن $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ دالّة مشتقّاها الجزئيّين الأوليين مستمرّان.

نضع:

$$x=r\cos\theta \quad , \quad y=r\sin\theta \quad ; \quad F(r,\theta)=f(x,y)$$

1) اكتب $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ و $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ بدلالة $\dfrac{\partial F}{\partial r}$ و $\dfrac{\partial F}{\partial \theta}$

2) حوّل إلى الإحداثيات القطبية المعادلة:

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=0;$$

ثمّ جد حلولها.

3) ليكن n عددا طبيعيّا. نقول عن دالّة $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ من الصنف $\mathscr{C}^1$ إنّها متجانسة من الرتبة n إذا حقّقت:

$$f(tx,ty)=t^n f(x,y).$$

أ. برهن أنّ $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ متجانسان من الرتبة $n-1$.

ب. نضع $G(t)=f(tx,ty)=t^n f(x,y)$. احسب $G'(t)$ بطريقتين مختلفتين ثمّ استنتج أنّ:

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=nf.$$

28) لتكن f دالّة تحقّق المعادلة:

$$(x+y)\frac{\partial f}{\partial x}+(x-y)\frac{\partial f}{\partial y}=0. \qquad (*)$$

نضع $u=x^2-y^2-2xy$ و $v=y$. اكتب المعادلة (*) بدلالة u و v.

1) برهن أنّ:

$$f(x,y)=\varphi(x^2-y^2-2xy);$$

حيث φ دالّة حقيقيّة اختياريّة.

اثبت أنّ المعادلة:

$$e^{3x-2y}+x^2+y^2-5x-y-1=0,$$

1) تعرّف دالّة ضمنيّة $x\mapsto y=\varphi(x)$ بحيث $\varphi(2)=3$.

2) احسب $\varphi'(2)$ و $\varphi''(2)$.

29) لتكن الدالّة المعطاة بالصيغة:

$$f(x,y)=x^3+y^3+x^2+y^2+x+y-3.$$

1) اثبت أنّ العلاقة $f(x,y)=0$ تعرّف في جوار النقطة $(0,1)$ دالّة ضمنيّة $x\mapsto y=\varphi(x)$ من الصنف $\mathscr{C}^\infty$.

2) هات النشر الماكلوراني[22] من الرتبة الثالثة للدالّة φ.

22. Colin Mac-Laurin : رياضيّاتيّ وفيزيائيّ اسكتلنديّ. ولد في فيفري 1698 بكيلمودان ومات في 14 جوان 1746 بإدامبورف. له أعمال في الهندسة. تعلّق اسمه بدستوره عند الصفر.

8.2 حلول

1) لدينا:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{2(x+h)^2-(x+h)y+y^2-(2x^2-xy+y^2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{4hx-hy+2h^2}{h}=4x-y;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\lim_{k\to 0}\frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k}$$
$$=\lim_{k\to 0}\frac{2x^2-x(y+k)+(y+k)^2-(2x^2-xy+y^2)}{k}=2y-x.$$

2) وفعلا، إذا كان (x_0,y_0,z_0) عنصرا من $\mathbb{R}^3$ كتبنا بوضوح:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0,z_0)-f(x_0,y_0,z_0)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left((x_0+h)-4y_0+z_0-y_0^2+5z_0^3\right)-\left((x_0-4y_0+z_0-y_0^2+5z_0^3\right)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=1.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(x_0,y_0+k,z_0)-f(x_0,y_0,z_0)}{h}$$
$$=\lim_{k\to 0}(-4-2y_0+k=-4-2y_0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0,y_0,z_0+t)-f(x_0,y_0,z_0)}{t}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{\left(t+5(3tz_0^2+3t^2z_0+t^3\right)}{t}$$
$$=\lim_{t\to 0}(1+15z_0^2+15tz_0+5t^2)=1+15z_0^2.$$

3) لدينا:

$$1)\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \quad\Rightarrow\quad f(x,y)=F(y);$$

$$2)\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \quad\Rightarrow\quad f(x,y)=G(x);$$

$$3)\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y)=0 \quad\Rightarrow\quad f(x,y)=H(x)+K(y);$$

حيث F و G و H و K دوال حقيقيّة اختيارية.

4) 1) f مستمرّة على $\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$ كجداء وتركيب لدوال مستمرّة. وعند $x=0$ نلاحظ أنّ:

$$|f(x,y)|=\left|x^2\sin\frac{y}{x}\right|\le x^2 \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to 0} f(x,y)=0$$

وعليه، فإنّ f مستمرّة على $\mathbb{R}^2$.

2) حساب المشتقّين الجزئيّين عند النقطة $(0,y_0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y_0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,y)-f(0,y_0)}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{y}{x}=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,y_0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(x,y)-f(0,y_0)}{y}=\lim_{y\to 0}x\sin\frac{y}{x}=0.$$

3) حساب المشتقّات الجزئيّة عند نقطة (x,y) من $\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x\sin\frac{y}{x}-y\cos\frac{y}{x},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x\cos\frac{y}{x}.$$

4) لدينا:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{y}{x}-y\cos\dfrac{y}{x} & ;\ x\neq 0,\\ 0 & ;\ x=0,\end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}x\cos\dfrac{y}{x} & ;\ x\neq 0,\\ 0 & ;\ x=0.\end{cases}$$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ مستمرّ على $\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$ و $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ مستمرّ على $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

5) 1) لدينا تعريفا:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{h.0}-0}{h}=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{\sqrt[3]{0.k}-0}{k}=0.$$

2) لدينا:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h,k)-f(0,0)-0\,h-0\,k}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\sqrt[3]{hk}}{\sqrt{h^2+k^2}}.$$

نلاحظ أنّه إذا وضعنا $k=h$ جاءنا:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{h^2}}{\sqrt{h^2+h^2}}=\lim_{h\to 0}\frac{h^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{2}\,|h|}=\begin{cases}+\infty; & h\to 0^+,\\ -\infty; & h\to 0^-.\end{cases}$$

هذا كاف للردّ على السؤال بالنفي.

ملحوظة

أمامك دالّة تقبل مشتقّين جزئيّين عند $(0,0)$ بيد أنّها لا تقبل المفاضلة عند النقطة ذاتها.

6) 1) **لدينا بجلاء:**

$$\forall x,y\in\mathbb{R}\quad xy\leq\frac{1}{2}(x^2+y^2);$$

ومنه:

$$f(x,y)\leq\frac{1}{4}\|(x,y)\|_2^2.$$

2) **لدينا:**

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{4}\|(x,y)\|_2^2=0=f(0,0).$$

إذن، f **مستمرّة عند** $(0,0)$.

3) **لدينا تعريفا:**

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h^2}=0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{k^2}=0.$$

4) **لنحسب:**

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(0+h,0+k)-f(0,0)-h\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)-k\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}}=$$

$$=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\frac{h^2k^2}{h^2+k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{h^2k^2}{\sqrt{h^2+k^2}\,(h^2+k^2)}$$

يسمح اللجوء إلى الإحداثيات القطبيّة بالحصول توّا على:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^2k^2}{\sqrt{h^2+k^2}\,(h^2+k^2)} = \lim_{\substack{r\to 0\\ 0\le\theta<2\pi}} r\cos^2\theta\sin^2\theta = 0.$$

إذن، f قابلة للمفاضلة عند $(0,0)$.

7) 1) الدالّة f مستمرّة، تعريفا، على المجموعة:

$$E=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x\neq 0\right\}$$

أمّا عند النقط $(0,y_0)$ حيث y_0 من $\mathbb{R}$ فإنّه، انطلاقا من الحصر:

$$-\frac{\pi}{2} < Arctg\left(\frac{y}{x}\right) < \frac{\pi}{2},$$

نستنتج أنّ:

$$\forall x\in\mathbb{R}, \left|xArctg\left(\frac{y}{x}\right)\right| < \frac{|x|\pi}{2};$$

وبالتالي:

$$\lim_{(x,y)\to(0,y_0)} f(x,y) = \lim_{\begin{cases}x\to 0\\ y\to y_0\end{cases}} xArctg\left(\frac{y}{x}\right) = 0.$$

ومنه استمرار f عند النقطة $(0,y_0)$ أيضا، فعلى $\mathbb{R}^2$ بأكمله.

2) حساب المشتقّات الجزئيّة:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x\,Arctg\left(\frac{0}{x}\right)-0}{x-0} = 0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0}\frac{0-0}{y-0} = 0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = \lim_{x\to 1}\frac{f(x,0)-f(1,0)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x\,Arctg\,0 - Arctg\,0}{x-1} = 0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(1,y)-f(01,0)}{y-0}=\lim_{y\to 0}\frac{Arctg\, y-0}{y-0}=\lim_{y\to 0}\frac{\frac{1}{1+y^2}}{1}=1;$$

(قاعدة لوبيطال.)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,1)-f(0,1)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x\, Arctg\left(\frac{1}{x}\right)-0}{x-0};$$

$$=\lim_{x\to 0}Arctg\left(\frac{1}{x}\right)=\begin{cases}+\frac{\pi}{2},\ x\to 0^+\\ -\frac{\pi}{2},\ \ x\to 0^-\end{cases}$$

وهذا دليل على عدم وجود هذه النهاية.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,1)=\lim_{y\to 1}\frac{f(0,y)-f(0,1)}{y-1}=\lim_{y\to 1}\frac{0-0}{y-1}=0.$$

3) **دراسة القابليّة المفاضلة:**

لنذكّر أوّلا بتعريف القابليّة للمفاضلة عند نقطة (x_0,y_0) :

$$f(x,y)=\ f(x_0,y_0)+(x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+(y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)+$$
$$+\circ\left(\left\|x,y)-(x_0,y_0)\right\|\right)$$

أ.عند النقطة $(0,0)$:

$$x\, Arctg\left(\frac{y}{x}\right)=\circ\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\Leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x\, Arctg\left(\frac{x}{y}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$$

باختيار الاتّجاه $y=\lambda x$ ، **يتّضح أنّ النهاية تأخذ القيم** $\pm\frac{Arctg(\lambda)}{\sqrt{1+\lambda^2}}$،

وبالتالي فهي غير موجودة والدالّة f **لا تقبل المفاضلة عند النقطة** $(0,0)$.

ب. عند النقطة $(1,0)$، تقبل الدالّة f المفاضلة طبقا لمبرهنتي العمليات الحسابية والتركيب.

ج. عند النقطة $(0,1)$، لا تقبل الدالّة f المفاضلة لأنّ أحد مشتقّيها الجزئيّين غير موجود.

4) بما أنّ f تقبل المفاضلة عند $(1,0)$، نكتب:

$$x\,Arctg\left(\frac{y}{x}\right)= f(1,0)+(x-1)\,0+y.1+\mathrm{o}\left(\left\|(x,y)\right\|-(1,0)\right\|\right)$$

$$= y+\mathrm{o}\left(\sqrt{(x-1)^2+y^2}\right)$$

وعليه:

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)}\frac{x\,Arctg\left(\dfrac{y}{x}\right)-y}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}=0;$$

ومنه صحّة النهاية المعطاة.

8) 1) بما أنّ:

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad -1<thx<+1.$$

فإنّنا نستخلص الحصرين التاليين:

$$-y< f(x,y)<y\ ,\ \forall y>0,$$

$$y< f(x,y)<-y\ ,\ \forall y<0;$$

ومن ثمّة:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{y\to 0} y=0= f(0,0).$$

الدالّة f إذن مستمرّة عند الصفر؛ وما دامت مستمرّة خارج الصفر كتركيب لدوال مستمرّة، أصبحت مستمرّة على الفضاء $\mathbb{R}^2$ بأكمله.

2) **نحسب المشتقّات الجزئيّة من الرتبة الأولى، وفق التعريف. فنجد:**

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x-0}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to 0}\frac{0-0}{y}=0 \quad (th\,0=0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x,0)-f(1,0)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{0-0}{x-1}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(1,y)-f(1,0)}{y-0}=\lim_{y\to 0}\frac{y\,th\left(\frac{1}{y}\right)-0}{y-0}$$
$$=\lim_{y\to 0}th\left(\frac{1}{y}\right)=\begin{cases}+1\,, & y\to 0^{+}\\ -1\,, & y\to 0^{-}\end{cases}$$

وعليه، فإنّ المشتقّ الجزئيّ هنا غير موجود.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,1)-f(0,1)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{th\,x-0}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{ch^{2}x}=1,$$

(لوبيطال)

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,1)=\lim_{y\to 1}\frac{f(0,y)-f(0,1)}{y-1}=\lim_{y\to 1}\frac{0-0}{y-1}=0.$$

أ. دراسة القابلية للمفاضلة عند النقطة $(0,0)$:

الدالّة f مستمرّة وبالتالي فإنّنا لا نستطيع استنتاج طبيعة قابليّتها للمفاضلة. نرجع إلى التعريف بدراسة صحّة المساواة التالية:

$$f(x,y)=f(0,0)+x\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)+y\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)+\circ\left(\|x,y\|\right)$$
$$\Updownarrow$$
$$y\,th\left(\frac{x}{y}\right)=\circ\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\;\Leftrightarrow\;\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{y\,th\left(\frac{x}{y}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$$

إنّ هذه النهاية غير موجودة ذلك لو وضعنا، على سبيل المثال $x=\lambda y$، لجاء:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{y\,th\left(\frac{x}{y}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{y\to0,\lambda\in\mathbb{R}^*}\frac{y\,th\left(\frac{1}{\lambda}\right)}{|y|\sqrt{\lambda^2+1}}=\pm\lim_{y\to0,\lambda\in\mathbb{R}^*}\frac{th\left(\frac{1}{\lambda}\right)}{\sqrt{\lambda^2+1}},$$

وهذا دليل على عدم وجودها.

ب. عند النقطة $(1,0)$:

المشتقّ الجزئيّ $\frac{\partial f}{\partial y}(1,0)$ غير موجود ممّا يستلزم عدم قابلية f للمفاضلة عند هذه النقطة.

ج. عند النقطة $(0,1)$ (وكذا عند كلّ نقطة (x_0,y_0) بحيث $y_0\neq0$)، الدالّة f مركّبة من دوال قابلة للمفاضلة ومتمتّعة بمشتقّات جزئيّة مستمرّة، وعليه، فإنّها تقبل عندها المفاضلة.

9) 1) f مستمرّة على $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ كنسبة لدالّتين مستمرّتين.

2) من أجل كلّ y من $\mathbb{R}$ تكون الدالّة:

$$x\mapsto\frac{xy(x+y)}{x^2+y^2}$$

قابلة للاشتقاق من أجل كلّ x **مقيّد بالشرط** $x^2+y^2\neq 0$. **نستنتج عندئذ وجود** $\frac{\partial f}{\partial x}$ **على** $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. **وفضلا عن ذلك لدينا من أجل كلّ** (x,y) **من** $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{y^2+2xy-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,y^2.$$

وبالطريقة ذاتها نجد من أجل كلّ (x,y) **من** $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{x^2+2xy-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,x^2.$$

ومن جهة أخرى، نلاحظ أنّ:

$$\forall x,y\in\mathbb{R}\ \ f(0,y)=f(x,0)=0;$$

ومنه:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0.$$

3) **لدينا:**

$$\frac{f(x,y)-f(0,0)-x\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)-y\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{xy(x+y)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

بأخذ $x=y$ **نجد:**

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^3}{2^{\frac{3}{2}}x^3}=\frac{1}{\sqrt{2}}\neq 0.$$

نستخلص أنّ الدالّة f **لا تقبل المفاضلة عند** $(0,0)$.

4) f مستمرّة عند النقطة $(0,0)$. وفعلا، من أجل كلّ (x,y) من $\mathbb{R}^2$ لدينا:

$$|xy| \leq \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right);$$
$$|x|+|y| \leq 2\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

وعليه:

$$|f(x,y)| = \frac{|xy||x+y|}{x^2+y^2} \leq \frac{|xy|\left(|x|+|y|\right)}{x^2+y^2} \leq \sqrt{x^2+y^2}.$$

نستنتج بفضل مبرهنة الحصر أنّ:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0),$$

وهو ما يضمن الاستمرار المعلن.

5) أ. نلاحظ بادئ ذي بدء أنّ:

$$\forall x,y \in \mathbb{R} \quad x^3+y^3 = (x+y)\left(x^2-xy+y^2\right).$$

وعليه:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad g(x,y) = x+y-f(x,y).$$

هذه العلاقة تبقى صحيحة عند النقطة $(0,0)$.

ب. نستنتج على الفور أنّ g مستمرّة على $\mathbb{R}^2$ وقابلة للمفاضلة على $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$.

10) 1) نلاحظ أنّ خارج $(0,0)$ الدالّة f معطاة بالصيغة:

$$f(x,y) = e^{xyLog\left(x^2+y^2\right)},$$

وهو ما يظهرها تركيبا لدوال مستمرّة؛ إذن، فهي مستمرّة.

أمّا عند $(0,0)$ ، فنستعين بالإحداثيات القطبيّة لحساب النهاية:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{xyLog(x^2+y^2)} = e^{\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} xyLog(x^2+y^2)}$$
$$= e^{\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} r^2\cos\theta\sin\theta Logr^2} = e^0 = 1;$$

وهو ما يضمن استمرار f عند الصفر.

2) لدينا خارج الصفر:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \left(yLog(x^2+y^2)\frac{2x^2y}{x^2+y^2} \right)(x^2+y^2)^{xy},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \left(xLog(x^2+y^2)\frac{2xy^2}{x^2+y^2} \right)(x^2+y^2)^{xy}.$$

الدالّتان مستمرّتان على $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ بمقتضى مبرهنتي التركيب والعمليات الحسابيّة على الدوال المستمرّة.

وعند الصفر لدينا:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h-0} = \lim_{h\to 0}\frac{1-1}{h} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k-0} = \lim_{k\to 0}\frac{1-1}{k} = 0.$$

لنفحص الآن استمرار المشتقّين الجزئيّين $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ و $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ عند $(0,0)$. لدينا بالاستعانة بالإحداثيات القطبيّة:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(yLog(x^2+y^2)\frac{2x^2y}{x^2+y^2} \right)(x^2+y^2)^{xy}$$
$$= \lim_{\substack{r\to 0\\ \theta\in[0,2\pi[}}\left(\frac{1}{2}r^2\sin^2 2\theta Logr^2\right) f(r\cos\theta, r\sin\theta)$$
$$= 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0).$$

وبحكم تناظر المتغيّرين x و y في عبارتي المشتقّين الجزئيّين نجزم بأنّ:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{y}(x,y)=0=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

يظهر هذا الحساب أنّ $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ و $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ مستمرّان عند الصفر أيضا.

3) نعم، فذلك راجع إلى استمرار $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ و $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ عند $(0,0)$.

11) 1) لدينا:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0.$$

وعليه:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h,k)-f(0,0)-0h-0k}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{h\sin k-k\sin h}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

لحساب هذه النهاية والتي تلي نذكّر بهذه النشور المحدودة:

$$\sin h=h-\frac{h^3}{6}+h^3\varepsilon_1(h),\quad \lim_{h\to 0}\varepsilon_1(h)=0;$$

$$\sin k=k-\frac{k^3}{6}+k^3\varepsilon_2(k),\quad \lim_{k\to 0}\varepsilon_2(k)=0;$$

$$\cos h=1-\frac{h^2}{2}+h^3\varepsilon_3(h),\quad \lim_{k\to 0}\varepsilon_3(k)=0.$$

وعليه:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h\sin k - k\sin h}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h\left(k-\frac{k^3}{6}+k^3\varepsilon_2(k)\right)-k\left(h-\frac{h^3}{6}+h^3\varepsilon_1(h)\right)}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{1}{6}\frac{-hk^3+kh^3}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{hk^3}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}\varepsilon_2(k) - \frac{kh^3}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}\varepsilon_1(h)$$

$$= \lim_{\substack{r\to 0\\ \theta\in[0,2\pi[}} \frac{-r\sin 4\theta}{24} + \cos\theta\sin^3\theta\varepsilon_2(r\sin\theta) - \sin\theta\cos^3\theta\varepsilon_1(r\cos\theta) = 0$$

استعنّا في الأخير بالإحداثيات القطبيّة ليجلي لك الحساب.

نستنتج هكذا أنّ f تقبل المفاضلة عند الصفر $(0,0)$.

2) من أجل كلّ نقطة (x,y) من $\mathbb{R}^2$ لدينا:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2xy\sin x - y^3\cos x - x^2\sin y + y^2\sin y - x^2 y\cos x}{(x^2+y^2)^2} & ;\ (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ;\ (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

وفضلا عن هذا، نحسب:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(h,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,k)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{\frac{-k^3+k^2\sin k}{(k^2)^2}-0}{k}$$

$$=\lim_{k\to 0}\frac{-k^3+k^2\left(k-\frac{k^3}{6}+k^3\varepsilon(k)\right)}{k^5}=\lim_{k\to 0}\left(-\frac{1}{6}+\varepsilon(k)\right)=-\frac{1}{6}.$$

بعد هذا نحسب:

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(h,k)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)-0h+\frac{1}{6}k}{\sqrt{h^2+k^2}}=$$

$$=\frac{\frac{2hk\sin k-k^3 cosh-h^2\sin k+k^2\sin k-h^2k\, cosh}{(h^2+k^2)^2}+\frac{1}{6}k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$=\frac{2hk\sin k-k^3 cosh-h^2\sin k+k^2\sin k-h^2k\, cosh+\frac{1}{6}k(h^2+k^2)^2}{(h^2+k^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$=\frac{2hk\left(k-\frac{k^3}{6}+k^3\varepsilon_1(k)\right)-k^3\left(1-\frac{h^2}{2}+h^3\varepsilon_3(h)\right)}{(h^2+k^2)^{\frac{5}{2}}}+$$

$$+\frac{(k^2-h^2)\left(k-\frac{k^3}{6}+k^3\varepsilon_1(k)\right)-h^2k\left(1-\frac{h^2}{2}+h^3\varepsilon_3(h)\right)+\frac{1}{6}k(h^2+k^2)^2}{(h^2+k^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$=\frac{2hk^2-2h^2k+k^3h^2-\frac{hk^4}{3}+\frac{2kh^4}{3}}{(h^2+k^2)^{\frac{5}{2}}}+\frac{(k^2-h^2)k^3}{(h^2+k^2)^{\frac{5}{2}}}\varepsilon_1(k)-\frac{kh^5}{(h^2+k^2)^{\frac{5}{2}}}\varepsilon_3(h).$$

العبارة الأخيرة لا تقبل نهاية لمّا يؤول (h,k) إلى $(0,0)$، يكفي قصد التأكّد من ذلك اللجوء إلى التبديل المألوف $k=\lambda h$. إذن، المشتقّ $\frac{\partial f}{\partial x}$ لا يقبل المفاضلة عند $(0,0)$.

12) 1) الدالّة f معرّفة على $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. إنّها عبارة عن كسر مركّب من دالّتين أوّليين مستمرّتين $(x,y)\mapsto |xy|^{\alpha}$ و $(x,y)\mapsto x^2+y^2-xy$ أيّا كانت قيم الوسيط α في $\mathbb{R}_+^*$. إذن، فهي مستمرّة تبعا لذلك.

2) علينا أن ندرس النهاية:

$$\ell=\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|xy|^{\alpha}}{x^2+y^2-xy},$$ التي تصير، إذا ما استعنّا بالإحداثيات القطبيّة:

$$\begin{cases} x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta \\ r\in\,]0,+\infty[,\ \theta\in[0,2\pi[; \end{cases}$$

إلى:

$$\lim_{\substack{r\to 0\\ \theta\in[0,2\pi[}} r^{2(\alpha-1)}\frac{|\cos\theta\sin\theta|^{\alpha}}{(1-\cos\theta\sin\theta)}.$$

نميّز ثلاث حالات.

أ. إذا كان $\alpha>1$ جاءنا:

$$r^{2(\alpha-1)}\frac{|\cos\theta\sin\theta|^{\alpha}}{(1-\cos\theta\sin\theta)}=r^{2(\alpha-1)}\frac{\left|\frac{1}{2}\sin 2\theta\right|^{\alpha}}{\left(1-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)}\le r^{2(\alpha-1)}\frac{1}{\frac{1}{2}}=2r^{2(\alpha-1)}.$$

ولمّا كانت $\lim_{r\to 0}2r^{2(\alpha-1)}=0$ حصلنا، بموجب مبرهنة الحصر، على :

$$\ell=\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0=f(0,0).$$

ب. إذا كان $\alpha = 1$ تبيّن أنّ هذه النهاية:

$$\ell = \lim_{\substack{r\to 0\\ \theta\in[0,2\pi[}} \frac{\left|\frac{1}{2}\sin 2\theta\right|}{\left(1-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)},$$

غير موجودة لتعلّقها بـ θ فقط. إنّها، مثلا، تأخذ 0 من أجل $\theta = 0$ و1 من أجل $\theta = \frac{\pi}{4}$.

ج. إذا كان $\alpha < 1$ كتبنا:

$$\ell = \frac{\left|\frac{1}{2}\sin 2\theta\right|^{\alpha}}{r^{2(1-\alpha)}\left(1-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)} = \begin{cases} 0 & ;\ \theta = 0, \\ +\infty & ;\ \theta = \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

نستنتج أنّ النهاية غير موجودة.

خلاصة

مجموعة قيم الوسيط α التي تجعل f مستمرّة عند الصفر هي $]1,+\infty[$.

3) الدالّة f قابلة للمفاضلة على $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0),(0,y); x,y\in\mathbb{R}\}$ لكونها قسمة لدالّتين أوّليتين:

$$(x,y)\mapsto |xy|^{\alpha},$$

$$(x,y)\mapsto x^2+y^2-xy,$$

تتّصفان بذلك.

4) لنفحص قابليّة f للمفاضلة عند نقطة $(x_0,0)$، حيث $x_0 \neq 0$.

نكتب تعريفا:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,0)-f(x_0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{(x_0+h)^2} = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(x_0,k)-f(x_0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{1}{k}\frac{|k|^{\alpha}|x_0|^{\alpha}}{(x_0^2+k^2-x_0k)}.$$

النهاية الأخيرة موجودة إذا وفقط إذا انتمى الوسيط α إلى المجال $]1,+\infty[$. (يمكن قصد التأكّد من ذلك الاستعانة بالإحداثيات القطبيّة). إنّها في حالة تحقّق هذا القيد معدومة. نرى في الخلاصة أنّ الدالّة f تقبل مشتقّين جزئيّين من الرتبة الأولى عند $(x_0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0)=0;\quad \alpha>1.$$

لنعالج الآن النهاية:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x_0+h,k)-f(x_0,0)-0h-0k}{\sqrt{h^2+k^2}}=$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|k|^{\alpha}|x_0+h|^{\alpha}}{\left((x_0+h)^2+k^2-(x_0+h)k\right)\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|x_0+h|^{\alpha}}{\left((x_0+h)^2+k^2-(x_0+h)k\right)}\frac{|k|^{\alpha}}{\sqrt{h^2+k^2}}.$$

نلاحظ أنّ:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|x_0+h|^{\alpha}}{\left((x_0+h)^2+k^2-(x_0+h)k\right)}=\frac{|x_0|^{\alpha}}{x_0^2}\neq 0\ \ \forall\alpha\in\mathbb{R}_+^*,$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{|k|^{\alpha}}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{\substack{r\to 0\\ \theta\in[0,2\pi[}}r^{\alpha-1}|\sin\theta|^{\alpha}=0\quad\Leftrightarrow\quad\alpha\in\,]1,+\infty[.$$

نستخلص في الأخير أنّ الدالّة f تقبل المفاضلة عند النقطة $(x_0,0)$ تحت القيد $\alpha>1$.

نستقي ممّا سبق بفضل التناظر $\left(f(x,y)=f(y,x)\right)$ أنّ الدالّة f تقبل المفاضلة عند النقطة $(0,y_0)$ تحت القيد $\alpha>1$.

لكنه المطاف بالتوقّف عند الصفر. لدينا توّا:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=0.$$

إلى جانب هذا نحسب:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(h,k)-f(0,0)-0h-0k}{\sqrt{h^2+k^2}}=$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|hk|^{\alpha}}{(h^2+k^2-hk)\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$=\lim_{\substack{r\to 0\\ \theta\in[0,2\pi[}} r^{2\alpha-3}\frac{\left|\frac{1}{2}\sin 2\theta\right|^{\alpha}}{\left(1-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)}.$$

تنعدم هذه النهاية إذا وفقط إذا كان $\alpha>\frac{3}{2}$. هكذا، تقبل f المفاضلة عند الصفر إذا وفقط كان $\alpha>\frac{3}{2}$.

13) $1)$ إنّ مقصور الدالة f على $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$، المعرّف بـ :

$$(x,y)\mapsto\frac{(x^2+xy+y^2)^2}{x^2+y^2},$$

كسر ناطق، لا ينعدم مقامه. نستخلص توّا أنّه من الصنف $\mathscr{C}^{\infty}$ على $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

2) لدينا عند الصفر:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^4}{h^3}=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{k^4}{k^3}=0;$$

وخارج الصفر لدينا:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{2x^5+2x^4y+4x^3y^2+4x^2y^3+4xy^4+2y^5}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{2x^5+4x^4y+4x^3y^2+4x^2y^3+2xy^4+2y^5}{(x^2+y^2)^2}.$$

المشتقّان الجزئيّان $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ مستمرّان عند الصفر، ذلك لأنّ:

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)&=\lim_{\substack{r\to 0\\ \theta\in[0,2\pi[}}\left|\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta)\right|\\ &=\lim_{\substack{r\to 0\\ \theta\in[0,2\pi[}}18r=0=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0),\\ \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)&=\lim_{\substack{r\to 0\\ \theta\in[0,2\pi[}}\left|\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta)\right|\\ &=\lim_{\substack{r\to 0\\ \theta\in[0,2\pi[}}18r=0=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0).\end{aligned}$$

نختم على ضوء ما سبق بأنّ f من الصنف $\mathscr{C}^1$ عند الصفر.

3) تكون الدالّة f من الصنف $\mathscr{C}^2$ عند الصفر إذا وفقط إذا كانت المشتقّات الجزئيّة الأربع $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ مستمرّة عند الصفر.

لدينا عند الصفر:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(h,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{2h^5}{h^4}}{h}=2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,k)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{k}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{2k^5}{k^4}}{k}=2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{2h^5}{h^4}}{h}=2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,k)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{\frac{2k^5}{k^4}}{k}=2.$$

وخارج الصفر لدينا:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{2x^5+2x^4y+4x^3y^2+4x^2y^3+4xy^4+2y^5}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

$$=\frac{1}{x^2+y^2}\left(12xy+6x^2+6y^2\right)+$$

$$+\frac{1}{x^4+2x^2y^2+y^4}\left(-x^4-4y^4-20xy^3-20x^3y-24x^2y^2\right)+$$

$$+\frac{1}{x^6+y^6+3x^2y^4+3x^4y^2}\left(8xy^5+8x^5y+16x^2y^4+24x^3y^3+16x^4y^2\right)$$

نلاحظ أنّ:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=\frac{15}{4}\neq 2=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0).$$

إنّ هذا ينفي الاستمرار عن $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ عند الصفر ويكفي لحرمان f من الانتماء إلى الصنف $\mathscr{C}^2$ عند الصفر.

14) 1) إنّ مقصور الدالة f على $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$، المعرّف بـ :

$$(x,y) \mapsto \frac{xy^2}{x^2+y^2},$$

كسر ناطق، لا ينعدم مقامه. نستخلص توّا أنّه من الصنف $\mathscr{C}^\infty$ على $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

2) أ. لدينا:

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= \lim_{\substack{r\to 0\\ \theta\in[0,2\pi[}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\\ &= \lim_{\substack{r\to 0\\ \theta\in[0,2\pi[}} r\cos\theta\sin^2\theta = 0 = f(0,0).\end{aligned}$$

إذن، f مستمرّة عند الصفر.

ب. لدينا عند الصفر:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h^3} = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{0}{k^3} = 0;$$

وخارج الصفر نحصل بفضل قواعد الاشتقاق الاعتيادية، على:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases}\dfrac{y^4 - x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} & ; (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & ; (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases}\dfrac{2yx^3}{(x^2+y^2)^2} & ; (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & ; (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

3) المشتقّان الجزئيّان $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ كسران ناطقان على $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$، مقاماهما غير معدومين. إذن، فهما مستمرّان خارج الصفر. أمّا عند الصفر فنحسب:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{2n},\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n^4}-\frac{1}{4n^2}\frac{1}{n^2}}{\left(\frac{1}{4n^2}+\frac{1}{n^2}\right)^2}=\frac{12}{25}\neq 0=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0);$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{2}{n^4}}{\frac{4}{n^4}}=\frac{1}{2}\neq 0=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

نستنتج أنّ $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ ليسا مستمرّين بالتتالي عند الصفر. إذن، فهما ليسا مستمرّين.

ملحوظة

المرور المباشر إلى الإحداثيات القطبيّة يبيّن أنّ العبارتين:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta)=-\sin^2\theta\cos 2\theta,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta)=\cos^2\theta\sin 2\theta,$$

تتعلّقان بـ θ دون r. هذا كاف لحرمان $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ من التمتّع بنهاية عند الصفر.

4) **تقبل الدالّة f المفاضلة عند الصفر إن آلت العبارة:**

$$H(h,k)=\frac{f(h,k)-f(0,0)-0h-0k}{\sqrt{h^2+k^2}}=\frac{hk^2}{\left(h^2+k^2\right)^{\frac{3}{2}}},$$

نحو الصفر مع مآل (h,k) إلى $(0,0)$. ولكن نلاحظ أنّ:

$$\lim_{h\to 0}H(h,h)=\lim_{h\to 0}\frac{h^3}{2^{\frac{3}{2}}|h|^3}=\begin{cases}2^{\frac{3}{2}}; & h\to 0^+,\\ -2^{\frac{3}{2}}; & h\to 0^-.\end{cases}$$

إذن، H لا تقبل نهاية، وبالتالي f ليست قابلة للمفاضلة عند $(0,0)$.

15) 1) إنّ مقصور الدالّة f على $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$، المعرّف بـ :

$$(x,y) \mapsto (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2},$$

تركيب لدوال أولية من الصنف $\mathscr{C}^\infty$ على $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. يترتّب عن ذلك أنّ f من الصنف $\mathscr{C}^\infty$ على $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ مثلها.

2) من أجل كلّ (x,y) من $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ لدينا بالحساب المألوف:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}.$$

وعند الصفر لدينا بالمثل:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} h\sin\frac{1}{h^2} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} k\sin\frac{1}{k^2} = 0.$$

3) تكون f من الصنف $\mathscr{C}^1$ عند $(0,0)$ إن كان المشتقّان الجزئيّان $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ مستمرّين عند هذه النقطة. لنختبر ذلك. لدينا بالمرور إلى الإحداثيات القطبيّة:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{\substack{r\to 0\\ \theta\in[0,2\pi[}} \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

$$= \lim_{\substack{r\to 0\\ \theta\in[0,2\pi[}} 2r\cos\theta\sin\frac{1}{r^2} - \lim_{\substack{r\to 0\\ \theta\in[0,2\pi[}} \frac{2\cos\theta}{r}\cos\frac{1}{r^2}$$

$$= 2\lim_{\substack{r\to 0\\ \theta\in[0,2\pi[}} \frac{\cos\theta}{r}\cos\frac{1}{r^2}.$$

العبارة الأخيرة ليست لها نهاية. نستنتج أنّ $\frac{\partial f}{\partial x}$ ليس مستمرّا عند الصفر. تفضي الطريقة ذاتها بحكم التناظر إلى أنّ $\frac{\partial f}{\partial y}$ ليس مستمرّا عند الصفر بدوره. بذا نختم بأنّ f ليست من الصنف $\mathscr{C}^1$ عند $(0,0)$.

4) تقبل f المفاضلة عند $(0,0)$ إن آلت العبارة:

$$H(h,k) = \frac{f(h,k)-f(0,0)-0h-0k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \sqrt{h^2+k^2}\sin\frac{1}{h^2+k^2},$$

نحو الصفر مع مآل (h,k) إلى الصفر (كلّ صفر مذكور هنا في خندقه !). لدينا بكلّ وضوح:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \sqrt{h^2+k^2}\sin\frac{1}{h^2+k^2} = 0.$$

نخلص من هذا الحساب إلى أنّ f قابلة للمفاضلة عند الصفر.

16) 1) الدالّة f مستمرّة عند كلّ نقطة (x,y) مختلفة عن المبدإ $(0,0)$ كدالّة مركّب من دوال مستمرّة. لندرس استمرارها عند $(0,0)$. من أجل ذلك نذكّر بأنّ:

$$\forall x\in\mathbb{R}\ |x|\le\sqrt{x^2+y^2};\ \forall y\in\mathbb{R};$$

$$\forall t\in\mathbb{R}\ |\sin t|\le|t|;$$

$$\forall y \in \mathbb{R}\ \ 1-\cos y = 2\sin^2\left(\frac{y}{2}\right).$$

وعليه، يأتي:

$$|f(x,y)| \le \frac{\left|2x\sin^2\left(\frac{y}{2}\right)+ay^2\sin x\right|}{x^2+y^2} \le \frac{2|x|\left|\frac{y}{2}\right|^2+|a|\,y^2\,|x|}{x^2+y^2}$$

$$\le \frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}+|a|(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{x^2+y^2} \le \left(\frac{1}{2}+|a|\right)\sqrt{x^2+y^2}$$

ولكن:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{1}{2}+|a|\right)\sqrt{x^2+y^2}=0,$$

إذن:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0=f(0,0).$$

يتبيّن هكذا أنّ الدالّة f مستمرّة عند الصفر $(0,0)$.

2) لدينا من أجل $a=0$:

أ. $$\forall (x,y)\neq(0,0),\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{(x^2-y^2)(\cos y-1)}{(x^2+y^2)^2}$$

ب. $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{0-0}{x-0}=0$$

3) أ. من أجل $y=0$ و $x\neq0$ ، لدينا:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,0)=0.$$

ولكن من أجل $x=0$ و $y\neq 0$ لدينا:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)=\frac{-y^2(\cos y-1)}{y^4}=\frac{1-\cos y}{y^2};$$

وبالتالي:

$$\lim_{y\to 0}\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)=\frac{1}{2};$$

وهو ما يعني أنّ النهاية $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ غير موجودة.

ب. لا. الدالّة $\frac{\partial f}{\partial x}$ ليست مستمرّة عند $(0,0)$. ومع ذلك، فهي مستمرّة على $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ على ضوء صيغتها الواردة في البند (أ).

17) 1) **الدالّة f مستمرّة على $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$، كتركيب لدوال تتّصف بذلك. لا علاقة للوسيط β بذلك. أمّا عند المبدإ $(1,2)$ فنلجأ إلى حساب النهاية:**

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)}\frac{(x-1)^3+(y-2)^3}{(x-1)^2+(y-2)^2}.$$

يفضي التعويض المباشر فيها إلى حالة عدم تعيين من النمط $\frac{0}{0}$. لرفعها نستخدم الإحداثيات القطبية؛ فنكتب:

$$x-1=r\cos\theta,\quad y-2=r\sin\theta.$$

وعليه:

$$f(x,y)=g(r,\theta)=r(\cos^3\theta+\sin^3\theta);$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim_{r\to 0}g(r,\theta)=\lim_{(x,y)\to(1,2)}r(\cos^3\theta+\sin^3\theta)=0.$$

نستخلص أنّ قيمة الوسيط β الضامنة لاستمرار f عند $(1,2)$ هي الصفر.

2) أ. عند $(1,2)$ لدينا تعريفا:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x,y)-f(1,2)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\frac{(x-1)^3+(y-2)^3}{(x-1)^2+(y-2)^2}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^3+(y-2)^3}{(x-1)^3+(x-1)(y-2)^2}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)^2}{3(x-1)^2+(y-2)^2}=0.$$

ب. وخارج النقطة $(1,2)$ لدينا:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{3(x-1)^2\left((x-1)^2+(y-2)^2\right)-2(x-1)\left((x-1)^3+(y-2)^3\right)}{\left((x-1)^2+(y-2)^2\right)^2}$$
$$=\frac{(x-1)^4+(x-1)(y-2)^2\left[3x-2y+1\right]}{\left[(x-1)^2+(y-2)^2\right]^2}.$$

3) لنحسب النهاية:

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\lim_{(x,y)\to(1,2)}\frac{(x-1)^4+(x-1)(y-2)^2\left[3(x-1)-2(y-2)\right]}{\left[(x-1)^2+(y-2)^2\right]^2}$$
$$=\lim_{\substack{r\to 0\\ \theta\in[0,2\pi]}}\cos^4\theta+\cos\theta\sin^2\theta\left[3\cos\theta-2\sin\theta\right].$$

هذه النهاية غير موجودة. نستنتج أنّ $\frac{\partial f}{\partial x}$ ليست مستمرّة عند $(1,2)$.

18) 1) الدالّة f مستمرّة على $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$، كتركيب لدوال تتّصف بذلك. أمّا عند المبدإ $(0,0)$ فنلجأ إلى حساب النهاية:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(ax^2+bxy+cy^2)^2}{x^2+y^2}.$$

يفضي التعويض المباشر فيها إلى حالة عدم تعيين من النمط $\frac{0}{0}$. لرفعها نتذكّر أنّ:

$$\forall x\in \mathbb{R}\ \ |x|\le \sqrt{x^2+y^2},\ \forall y\in \mathbb{R}.$$

وعليه، يأتي:

$$\frac{(ax^2+bxy+cy^2)^2}{x^2+y^2}\le \frac{\left(|a|(x^2+y^2)+|b|(x^2+y^2)+|c|(x^2+y^2)\right)^2}{x^2+y^2}$$
$$\le \left(|a|+|b|+|c|\right)^2 (x^2+y^2).$$

ولمّا كانت $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(|a|+|b|+|c|\right)^2 (x^2+y^2)=0$ استنتجنا بموجب مبرهنة الحصر أنّ:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0=f(0,0).$$

إذن، f مستمرّة عند $(0,0)$ كذلك.

ملحوظة

يمكن بشأن الحساب الأخير أن نستعين بالإحداثيات القطبيّة؛ فنكتب:

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta$$

وعليه:

$$f(x,y)=g(r,\theta)=r^2(a\cos^2\theta+b\cos\theta\sin\theta+c\sin^2\theta)^2;$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{r\to 0} g(r,\theta)=0=f(0,0).$$

2) لدينا تعريفا:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0} a^2x^2=0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\lim_{x\to 0} c^2y^2=0.$$

3) لدينا تعريفا:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)-f(0,0)-h\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)-k\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\left(ah^2+bhk+ck^2\right)^2}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}}$$
$$=0.$$

إذن، f قابلة للمفاضلة عند $(0,0)$.

4) أ. لنحسب:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,y)-f(0,y)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[\frac{(ax^2+bxy+cy^2)^2}{x^2+y^2}-c^2y^2\right]$$
$$=2bcy$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(x,y)-f(x,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{y}\left[\frac{(ax^2+bxy+cy^2)^2}{x^2+y^2}-a^2x^2\right]$$
$$=2abx.$$

ب. لدينا تعريفا:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2abx}{x}=2ab,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y}=\lim_{x\to 0}\frac{2cby}{y}=2cb.$$

5) لدينا على الفور:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0) \iff (b=0)\vee(a=c).$$

19) 1) المركّبات الثلاث للدالّة f دوال حدوديّة تقبل المفاضلة على $\mathbb{R}^3$، ميدان تعريفها المشترك. هذه حجّة كافية لقبول f المفاضلة على $\mathbb{R}^3$، ميدان تعريفها.

2) مصفوفة f اليعقوبيّة $Jf_{(x_0,y_0)}$ عند نقطة (x_0,y_0,z_0) من $\mathbb{R}^3$ معطاة بـ:

$$Jf_{(x_0,y_0)}=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) & \frac{\partial f_3}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) & \frac{\partial f_3}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 2y_0 & -1 \\ y_0^2 z_0 & 2x_0y_0z_0 & x_0y_0^2 \\ y_0+2x_0z_0 & x_0 & x_0^2 \end{pmatrix}.$$

3) تفاضليتها عند نقطة (x_0,y_0,z_0) من $\mathbb{R}^3$ معرّفة على هذا المنوال:

$$df_{(x_0,y_0,z_0)}(h,k,\ell)=Jf_{(x_0,y_0,z_0)}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2y_0 & -1 \\ y_0^2 z_0 & 2x_0y_0z_0 & x_0y_0^2 \\ y_0+2x_0z_0 & x_0 & x_0^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ k \\ \ell \end{pmatrix}$$

$$=\left(h+2y_0k-\ell,\ y_0^2z_0h+2x_0y_0z_0k,\ x_0y_0^2\ell,(y_0+2x_0z_0)h+x_0k+x_0^2\ell\ \right).$$

20) 1) نجد باستعمال خاصية اشتقاق الدوال المركّبة:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial g}{\partial u}\times\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial v}\times\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial g}{\partial u}+\frac{\partial g}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 g}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial g}{\partial u}\times\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial v}\times\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial g}{\partial u}-\frac{\partial g}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}-2\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}.$$

بالتعويض يأتي فورا:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=4\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}=0.$$

2) نلاحظ أنّ الدالّة g من الصنف $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ بدورها؛ وعليه، نجد بالمكاملة:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial g}{\partial v}=h(v);$$

حيث h دالة اختيارية من الصنف $\mathscr{C}(\mathbb{R})$ لـ v. وعليه، يأتي:

$$g(u,v)=\int h(v)dv+K(u)=H(v)+K(u),$$

حيث H و K دالّتان اختياريتان من الصنف $\mathscr{C}^2(\mathbb{R})$ لـ v و u على الترتيب.

3) التبديل المقترح يحوّل معادلتنا إلى:

$$4\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}=\frac{1}{\sqrt{uv}}.$$

نبحث عن الحلول في الميدان:

$$D'=\left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 : uv>0\right\}=D_1\cup D_2 \ / \ \begin{cases} D_1=\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^* \\ D_2=\mathbb{R}_-^*\times\mathbb{R}_-^* \end{cases}$$

على D_1 نكتب:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)(u,v)=\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{uv}}=\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{u}\sqrt{v}};$$

وبالكاملة بالنسبة إلى u نجد:

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}}+A(v); \ \ A\in\mathscr{C}\left(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R}\right).$$

وفي الأخير، نجد بالكاملة بالنسبة إلى v:

$$g(u,v)=\sqrt{uv}+\int A(v)dv+B(u)=\sqrt{uv}+C(v)+B(u);$$

حيث B و C دالّتان اختياريتان من $\mathscr{C}^2\left(\mathbb{R}^*,\mathbb{R}\right)$.

وبالمثل، إذا كان (u,v) من D_2 كتبنا:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}(u,v)=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)(u,v)=\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{(-u)(-v)}}$$

وعليه:

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)=-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{-u}}{\sqrt{-v}}+E(v);\ \ E\in\mathscr{C}(\mathbb{R}_-^*,\mathbb{R}),$$

وبالتالي:

$$g(u,v)=\sqrt{uv}+\int E(v)dv=\sqrt{uv}+F(v)+G(u);\ \ F,G\in\mathscr{C}^2\left(\mathbb{R}_-^*,\mathbb{R}\right).$$

نخلص ممّا هو معروض إلى أنّ الحلّ العام للمعادلة المقترحة يكتب في الميدان D' على النحو:

$$f(x,y)=\sqrt{x^2-y^2}+F(x+y)+G(x-y),$$

حيث F و G دالّتان اختياريتان من $\mathscr{C}^2\left(\mathbb{R}_-^*,\mathbb{R}\right)$.

21) لدينا:

(1

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{1}{2\sqrt{x+y}}e^{u+v}=\frac{1}{2\sqrt{e^{u+v}+Logv}}e^{u+v}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{1}{2\sqrt{x+y}}e^{u+v}+\frac{1}{2\sqrt{x+y}}.\frac{1}{v}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{e^{u+v}+Logv}}e^{u+v}+\frac{1}{2\sqrt{e^{u+v}+Logv}}.\frac{1}{v}$$

(2

$$\frac{\partial z}{\partial u}=y\left(-\sin(u+v)\right)+x\cos(u+v)$$

$$=\sin(u+v)+\left(-\sin(u+v)\right)+\cos^2(u+v),$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=y\left(-\sin(u+v)\right)+x\cos(u+v)=\cos(2u+2v)$$

22) لدينا على التوّ:

$$\frac{du}{dt}=3e^{3x+2y}(-\sin t)+2e^{3x+2y}(2t)=(-3\sin t+4t)e^{3\cos t+2t^2} \quad (1$$

$$\frac{du}{dt}=\frac{1}{y}e^{t}+\frac{-x}{y^2}\frac{1}{y}=\frac{1}{Logt}e^{t}-\frac{e^{t}}{(Logt)^2}\frac{1}{t} \quad (2$$

$$\frac{du}{dt}=\frac{\frac{1}{\sqrt{y}}\cos\frac{x}{\sqrt{y}}}{\sin\frac{x}{\sqrt{y}}}6t+\frac{-\frac{1}{2}\frac{x}{y^{\frac{3}{2}}}\cos\frac{x}{\sqrt{y}}}{\sin\frac{x}{\sqrt{y}}}\frac{t}{\sqrt{t^2+1}} \quad (3$$

$$=\frac{1}{(t^2+1)^{\frac{1}{4}}}\frac{\cos\frac{3t^2}{(t^2+1)^{\frac{1}{4}}}}{\sin\frac{3t^2}{(t^2+1)^{\frac{1}{4}}}}6t+\frac{-\frac{1}{2}\frac{3t^2}{(t^2+1)^{\frac{3}{2}}}\cos\frac{3t^2}{(t^2+1)^{\frac{1}{4}}}}{\sin\frac{3t^2}{(t^2+1)^{\frac{1}{4}}}}\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}.$$

23) لدينا:

$$\frac{du}{dt}=yz(2t)+\frac{(xz)}{t}+xy(1+tg^2t) \quad (1$$

$$=2t(Logt)(tgt)+\frac{(t^2+1)\,tgt}{t}+(t^2+1)(Logt)(1+tg^2t)$$

$$\frac{du}{dt}=-z^{x+y}Logz\sin t+z^{x+y}Logz\cos t+z^{x+y-1}sht \quad (2$$

$$=cht^{\cos t+\sin t}\left(Logcht\cos t-Logcht\sin t+tht\right)$$

24) لدينا ببساطة:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{-y}{x^2}\right)+\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}(2x)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{1+x^2}, \quad (1$$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}=yx^{y-1}+(x^y+x^y Logx)(Logx)x^x \qquad (2$$

$$=x^y+x^{x+y}\left(1+Logx\right)(Logx).$$

25) $1)$ لدينا طبقا للدستور المألوف:

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\\ \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial v}\\ \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial v}\end{cases}$$

وعليه:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial v}\right)$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}.$$

هكذا، يأتي الشكل الجديد المطلوب للمعادلة (*) على النحو:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=$$
$$=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)-2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)$$
$$=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}=0.$$

2) معالجة المعادلة:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}=0,$$

تعطي توّا:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}=0 \iff \frac{\partial f}{\partial u}=\varphi(v) \iff f(u,v)=u\varphi(v)+\psi(v),$$

حيث φ و ψ دالّتان حقيقيّتان من الصنف $\mathscr{C}^2$ على $\mathbb{R}$.

3) نستنتج من السؤال الثاني أنّ حلول المعادلة (*) هي الدوال f من الصنف $\mathscr{C}^2$ المتمتّعة بالشكل:

$$f(x,y)=x\varphi(x+y)+\psi(x+y).$$

26) 1) لدينا:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}\end{cases} \iff \begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=\left(\dfrac{1}{y}\right)\dfrac{\partial f}{\partial u}+(2x)\dfrac{\partial f}{\partial v}\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y}=\left(-\dfrac{x}{y^2}\right)\dfrac{\partial f}{\partial u}+(2y)\dfrac{\partial f}{\partial v}\end{cases}$$

$$f\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)+x^2+y^2=f\left(\begin{array}{l} x\left(\frac{1}{y}\frac{\partial f}{\partial u}+2x\frac{\partial f}{\partial v}\right)+ \\ \qquad\qquad +y\left(-\frac{x}{y^2}\frac{\partial f}{\partial u}+2y\frac{\partial f}{\partial v}\right)\end{array}\right)+v$$

$$=\frac{x}{y}f\frac{\partial f}{\partial u}+2x^2f\frac{\partial f}{\partial v}+2y^2f\frac{\partial f}{\partial v}=2vf\frac{\partial f}{\partial v}$$

ولكن $w=f^2$ إذن:

$$\frac{\partial w}{\partial v}=2f\frac{\partial f}{\partial v};$$

وبالتالي:

$$f\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)+x^2+y^2=2v\frac{\partial w}{\partial v}=0.$$

2) لدينا على الفور:

$$2v\frac{\partial w}{\partial v}=0\iff\frac{\partial w}{\partial v}=0\iff w=\varphi(u),$$

حيث φ دالّة حقيقيّة من الصنف $\mathscr{C}^2$ على $\mathbb{R}$.

3) لدينا على ضوء ما سبق:

$$f\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)+x^2+y^2=0\iff f^2(x,y)=\varphi\left(\frac{x}{y}\right).$$

27) 1) لدينا:

$$\frac{\partial F}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}=\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y},$$

$$\frac{\partial F}{\partial\theta}=-r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}+r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}.$$

وعليه:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\cos\theta\frac{\partial F}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial F}{\partial\theta},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\sin\theta\frac{\partial F}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial F}{\partial\theta}.$$

2) بناء على ما توصّلنا إليه نكتب:

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=nf.$$

28) 1) نضع $f(x,y)=F(u,v)$ ثمّ نقوم بالاشتقاق المألوف:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=(2x-2y)\frac{\partial F}{\partial u}, \qquad (*)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=(-2y-2x)\frac{\partial F}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial v}. \qquad (**)$$

إذا ضربنا طرفي $(*)$ في $x+y$ وطرفي $(**)$ في $x-y$ وجمعنا الحاصلين طرفا طرفا حصلنا على الشكل المطلوب:

$$(x+y)\frac{\partial f}{\partial x}+(x-y)\frac{\partial f}{\partial y}=(x+y)\frac{\partial F}{\partial v}.$$

2) انطلاقا من الشكل الأخير نقوم بحلّ المعادلة:

$$(x+y)\frac{\partial F}{\partial v}=0. \qquad (**)$$

لدينا:

$$(x+y)\frac{\partial F}{\partial v}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial v}=0 \quad \Rightarrow \quad F(u,v)=\varphi(u);$$

حيث φ دالّة حقيقيّة اختياريّة. يأتي تبعا لذلك أنّ:

$$f(x,y)=\varphi(x^2-y^2-2xy).$$

29) 1) لتكن الدالّة $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ المعطاة بـ:

$$(x,y)\mapsto f(x,y)=e^{3x-2y}+x^2+y^2-5x-y-1.$$

إنّها من الصنف $\mathscr{C}^\infty$ على ميدان تعريفها $\mathbb{R}^2$ وتحقّق بالخصوص :

أ. $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-2e^{3x-2y}+2y-1,$

ب. $\dfrac{\partial f}{\partial y}(2,3)=3\neq 0.$

يوجد بموجب مبرهنة الدوال الضمنيّة جوار مفتوح $I\times J$ للنقطة $(0,1)$ ودالّة $\varphi:I\to J$ بحيث:

- $f\left(x,\varphi(x)\right)=0,\ \forall x\in I;$
- $\varphi(2)=3;$
- الدالّة φ من الصنف $\mathscr{C}^\infty$ على I.

2) نعلم أنّ:

$$\forall x\in I \quad \varphi'(x)=-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x))}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))}=-\frac{3e^{3x-2\varphi(x)}+2x-5}{-2e^{3x-2\varphi(x)}+2\varphi(x)-1}.$$

ومنه:

$$\varphi''(x) = -\frac{\left((9-6\varphi'(x))e^{3x-2\varphi(x)} + x\right)\left(-2e^{3x-2\varphi(x)} + 2\varphi(x) - 1\right)}{\left(-2e^{3x-2\varphi(x)} + 2\varphi(x) - 1\right)^2} +$$
$$+\frac{\left(3e^{3x-2\varphi(x)} + 2x - 5\right)\left((4\varphi(x)' - 6)e^{3x-2\varphi(x)} + 2\varphi'(x)\right)}{\left(-2e^{3x-2\varphi(x)} + 2\varphi(x) - 1\right)^2}.$$

نستخلص بالخصوص:

$$\varphi'(2) = \frac{3e^{6-2\varphi(2)} - 1}{-2e^{6-2\varphi(2)} + 2\varphi(2) - 1} = -\frac{2}{3}.$$
$$\varphi''(2) = -\frac{25}{9}.$$

30) 1) **الدالّة** f **من الصنف** $\mathscr{C}^\infty$ **على** $\mathbb{R}^2$ **وتحقّق:**

أ. $f(0,1) = 0$

ب. $\frac{\partial f}{\partial y}(2,3) = 3 \neq 0.$

يوجد جوار مفتوح $I \times J$ **للنقطة** $(0,1)$ **ودالّة** $\varphi : I \to J$ **بحيث:**

- $f\left(x, \varphi(x)\right) = 0,\ \forall x \in I;$
- **الدالّة** φ **من الصنف** $\mathscr{C}^\infty$ **على** I ،

2) **لدينا:**

$$(x^3 + x^2 + x - 3) + (\varphi(x))^3 + (\varphi(x))^2 + \varphi(x) = 0. \qquad (*)$$

باشتقاق طرفي هذه العلاقة يأتي:

$$(3x^2 + 2x + 1) + 3\varphi'(x)(\varphi(x))^2 + 2\varphi'(x)\varphi(x) + \varphi'(x) = 0. \qquad (**)$$

ومنه:

$$1 + 3\varphi'(0) + 2\varphi'(0) + \varphi'(0) = 0;$$

وبالتالي:

$$\varphi'(0) = -\frac{1}{6}.$$

يسمح اشتقاق العلاقة (**) بالحصول على:

$$6x+2+3\varphi''(x)(\varphi(x))^2+6(\varphi'(x))^2\varphi(x)+2\varphi''(x)\varphi(x)+$$
$$+2(\varphi'(x))^2+\varphi''(x)=0. \quad (***)$$

وعليه:

$$6\varphi''(0)+2+\frac{1}{6}+\frac{1}{18}=0;$$

ومنه، $\varphi''(0)=-\frac{10}{27}$. **أخيرا، نحصل من اشتقاق العلاقة** $(***)$ **على:**

$$6+3\varphi'''(x)(\varphi(x))^2+6\varphi''(x)\varphi'(x)\varphi(x)+$$
$$+12\varphi''(x)\varphi'(x)\varphi(x)+6(\varphi'(x))^3+2\varphi'''(x)\varphi(x)+$$
$$+2\varphi''(x)\varphi'(x)+4\varphi''(x)\varphi'(x)+\varphi'''(x)=0.$$

وبالتالي:

$$6\varphi'''(0)+6+\frac{40}{27}-\frac{1}{36}=0;$$

ومنه:

$$\varphi'''(0)=-\frac{805}{648}.$$

النشر الماكلورانيّ المطلوب هو:

$$\varphi(x)=1-\frac{1}{6}x-\frac{5}{27}x^2-\frac{805}{3868}x^3+\circ(x^3).$$

9.2 تمارين للبحث

1) احسب المشتقّين الجزئيّين من الرتبة الأولى لكلّ واحدة من الدوال التالية:

$$a(x,y)=e^x;\ \ b(x,y)=1+2x^2-y^2;\ \ c(x,y)=e^{\sin x-y\cos y};$$

$$d(x,y)=Arctg(x+y);\ e(x,y)=\frac{Arc\sin(x+3y)}{Arc\cos(3x-y)};$$

$$f(x,y,z)=e^x\cos y\sin z;\ \ g(x,y,z)=e^{xyz}(1+x^2+y^2+z^2);$$

$$h(x,y,z)=e^{sh(x-y)ch(x+y)};\ i(x,y,z)=e^x Log(y^2+1)Arctgz.$$

2) احسب المشتقّات الجزئيّة من الرتبة الثانية لكلّ واحدة من الدوال التالية:

$$a(x,y)=e^x\cos y;\ \ b(x,y)=yLog(1+x);\ \ c(x,y)=Arctgxy;$$

$$d(x,y)=\frac{Arc\sin x}{y};\ \ e(x,y)=ch\frac{x}{y};\ \ f(x,y)=y^x.$$

3) أ. لتكن الدالّة الحقيقيّة f المعرّفة على $\mathbb{R}^3$ بـ:

$$f(x,y,z)=xy+yz+xz.$$

احسب جميع مشتقّاتها الجزئيّة من الرتبة الثانية.

ب. جد المشتقّ النوني للدالّة $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ المعطاة على النحو:

$$g(t)=(cht,sht,t).$$

4) جد الدالّة $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ التي تحقّق المعادلة:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{x},\\ f(1,y)=\sin y.\end{cases}$$

5) لتكن الدالّة الحقيقيّة f المعرّفة على $\mathbb{R}^2$ بالصيغة:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4}{x^2+y^2} & ;(x,y)\neq(0,0),\\ 0 & ;(x,y)=(0,0).\end{cases}$$

1) اثبت أنّ f مستمرّة عند $(0,0)$.

2) اثبت أنّ f تتمتّع بمشتقّين جزئيّين مستمرّين من الرتبة الأولى عند $(0,0)$.

3) بيّن أنّ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$ و $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ متساويان.

6) لتكن الدالّة الحقيقيّة f المعرّفة على $\mathbb{R}^2$ بالصيغة:

$$f(x,y)=\begin{cases}xy\sin\dfrac{\pi}{2}\dfrac{x+y}{x-y} & ;x\neq y,\\ 0 & ;x=y.\end{cases}$$

1) احسب $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$ و $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$.

2) ماذا تلاحظ؟

7) لتكن الدالّة الحقيقيّة f المعرّفة على $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ بـ:

$$f(x,y)=Log(x^2+xy+y^2).$$

اثبت أنّ:

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\quad x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2.$$

2) لتكن الدالّة الحقيقيّة f المعرّفة على $\mathbb{R}^3$ بـ:

$$f(x,y,z)=(x-y)(y-z)(z-x).$$

اثبت أنّ:

$$\forall (x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)+\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=0.$$

8) 1) احسب المشتقّات الجزئيّة من الرتبة الأولى والثانية عند نقطة (x,y) للدوال التالية:

$$1)\ a(x,y)=x^2+y^2-2xy\ ;\ 2)\ b(x,y)=Log(x+y);$$

$$3)\ c(x,y)=Arctg\frac{y}{x};\ 4)\ d(x,y)=e^{xy^2}\sin x^2y;$$

$$5)\ e(x,y)=Arctg\frac{x+y}{1-xy}\ ;6)\ f(x,y)=Arctg\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}};$$

$$7)\ g(x,y)=Log\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}};\ 8)\ h(x,y,z)=(xy)^z;$$

$$9)\ i(x,y,z)=z^{xy};\quad 10)\ j(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

2) أ. عيّن ميدان تعريف الدالّة c .

ب. بيّن أنّ:

$$\Delta c=\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 c}{\partial y^2}=0.$$

ملحوظة: تدعى كلّ دالّة يحقّق $\Delta=0$ بالدالّة التوافقيّة.)

ج. اثبت أنّ الدالّة j توافقيّة.

9) اثبت أنّ الدوال الموالية توافقيّة على ميادين تعريفها:

$$1)\ a(x,y)=Log\sqrt{x^2+y^2}\ ;\ 2)\ b(x,y)=e^{x^2-y^2}\cos 2xy;$$

$$3)\, c(x,y,z)=x^2+y^2-2z^2\ ;\ 4)\ d\,(x,y,z)=2z^3-3(x^2+y^2)z.$$

10) لتكن الدالّة الحقيقيّة f المعرّفة على $\mathbb{R}^2$ بالصيغة:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^5}{(y-x^2)^2+x^8} & ;\ (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & ;\ (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

1) اثبت أنّ f تقبل عند $(0,0)$ مشتقّات وفق كلّ شعاع من $\mathbb{R}^2$.

2) اثبت أنّ f ليست مستمرّة عند $(0,0)$.

11) 1) احسب مشتقّ الدالة الحقيقيّة $f(x,y)=Log\sqrt{x^2+y^2}$ عند النقطة $(1,1)$ حسب منصّف الربع الأوّل.

2) احسب مشتقّ الدالة الحقيقيّة $f(x,y)=x^2-xy-y^2$ عند النقطة $(1,1)$ حسب الاستقامة التي تصنع مع محور الفواصل زاوية قدرها $\frac{\pi}{3}$.

3) احسب مشتقّ الدالة الحقيقيّة $f(x,y)=x^2\sin^2 y$ عند النقطتين $\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$ و $\left(2,\frac{\pi}{4}\right)$ حسب الاستقامة التي تصنع مع محور الفواصل زاوية قدرها $\frac{\pi}{6}$.

12) لتكن f و g دالّتين حقيقيّتين قابلتين للمفاضلة على $\mathbb{R}^n$. اثبت عندئذ أنّ:

$$\nabla(fg)=g\nabla f+f\nabla g;$$
$$div(fg)=g\,div f+f\,div g.$$

13) (مقياس يونـڠ)

إذا كان المشتقّان الجزئيّان $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ موجودين في جوار نقطة (a,b) من $\mathbb{R}^2$ وكان هذان المشتقّان قابلين للمفاضلة عند هذه النقطة كان المشتقّان الجزئيّان $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ متساويين عند (a,b).

عد إلى المثال الوارد في الملحوظة (7.1.2) للتأكّد من أنّ مقياس **يونـڠ** كاف وليس لازما.

14) لتكن الدالّة:

$$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto \begin{cases} xy\sin\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & ; \ (x,y)\neq(0,0), \\ 0 & ; \ (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

1) احسب المشتقّين المزدوجين $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$.

2) ماذا تستخلص؟

15) لتكن الدالّة الحقيقيّة f المعطاة على $\mathbb{R}^2$ بـ:

$$f(x,y)=|xy|.$$

1). هل المشتقّان الجزئيّانِ $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ و $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ موجودان عند كلّ نقطة (a,b) منٍ $\mathbb{R}^2$؟

2). إن نعم، احسبهما واختبر استمرارهما.

3) ردّ على التساؤلات ذاتها بخصوص الدالّتين:

$$g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$$
$$(x,y)\mapsto g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^2}{x} & ;\ x\neq 0,\\ y & ;\ x=0;\end{cases}$$

$$h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$$
$$(x,y)\mapsto h(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin xy}{|x|+|y|} & ;\ (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & ;\ (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

16) **لتكن** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **دالّة قابلة للاشتقاق مرّتين و** $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ **دالّة معرّفة بـ:**

$$g(x,y)=x\,f\left(\frac{y}{x}\right).$$

بيّن أنّ $g(x,y)$ **حلّ للمعادلة ذات المشتقّات الجزئيّة:**

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y)\,\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y)=\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}(x,y)\right)^2.$$

17) **اثبت أنّ الدالّة الموالية تقبل عند الصفر مشتقّات وفق كل اتجاه بيد أنّها غير مستمرّة عند الصفر:**

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$$
$$(x,y)\mapsto f(x,y)=\begin{cases}e^{\frac{y}{x}}(x^2+y^2) & ;\ x\neq 0,\\ 0 & ;\ x=0.\end{cases}$$

18) بيّن مستعملا التعريف أنّ الدوال التالية قابلة للمفاضلة عند النقاط المرفقة:

(1 $f(x,y)=xy^2+y\ ;\quad (x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$

(2 $g(x)=\left(x,\dfrac{1}{2x}\right);\quad x_0=1;$

(3 $h(x,y)=(x\sin y, y, \cos y)\ ;\quad \left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{4}\right).$

19) لتكن الدالّة الحقيقيّة f المعرّفة على $\mathbb{R}^2$ بـ:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & ;\ (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & ;\ (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

1) اثبت أنّ f مستمرّة على $\mathbb{R}^2$.

2) اثبت أنّ f لا تقبل المفاضلة عند $(0,0)$.

20) 1) استخدم التعريف لتمتحن وجود المشتقّات الجزئيّة لدى الدالتين التاليتين:

$$1)\ h(x,y)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & ;\quad (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & ;\quad (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

$$2)\ k(x,y)=\begin{cases}\dfrac{e^{-(x^2+y^2)}-1}{x^2+y^2} & ;\quad (x,y)\neq(0,0),\\ -1 & ;\quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

2) هل هاتان الدالتان مستمرّتان عند $(0,0)$ ؟

3) نفس السؤال بالنسبة لمشتقّاتهما الجزئيّة.

21) لتكن الدالّتان الحقيقيّتان المعرّفتان بـ:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+x^3}{x^2+y^2} & ;\ (x,y)=0,\\ 0 & ;\ (x,y)=0,\end{cases}$$

$$g(x,y)=\begin{cases}x\,Arctg\left(\dfrac{y}{x}\right)^2 & ;\ x\neq 0,\\ 0 & ;\ x=0.\end{cases}$$

1) أ. **هل f مستمرّة على $\mathbb{R}^2$ ؟**

ب. **هل f قابلة للمفاضلة على $\mathbb{R}^2$ ؟**

ج. **جد مشتقّيها الجزئيّين الأوليين وادرس استمرارهما.**

2) **نفس الأسئلة بخصوص الدالّة g .**

22) برهن أنّ الدالّة $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ المعرّفة بـ:

$$f(x,y)=|xy|^k \quad (3$$

قابلة للمفاضلة عند النقطة $(0,0)$ أيّا كانت القوّة $0<k$.

23) ادرس القابلية للمفاضلة لدى الدوال الحقيقيّة التالية:

$$f(x,y)=\max(x,y);\ \ g(x,y)=\min(x,y);$$
$$h(x,y)=\max(x^2,y);\ k(x,y)=\min(x^2,y).$$

24) لتكن $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ دالّة قابلة للمفاضلة على $\mathbb{R}^n$. اثبت أنّه إذا انعدمت كافّة المشتقّات الجزئيّة $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{1\le i\le n}$ على $\mathbb{R}^n$ أضحت f عندئذ ثابتة.

25) لتكن الدالّة $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ المعرّفة بـ:

$$f(x,y,z)=\begin{cases} x^2 Arctg\dfrac{yz^2}{x} & ; \ x\neq 0, \\ 0 & ; \ x=0. \end{cases}$$

1) اثبت أنّ المشتقّات الجزئيّة $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ و $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ و $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ موجودة على عند $(0,0,0)$.

2) هل تقبل f المفاضلة عند $(0,0,0)$ ؟

26) لتكن الدالّة الحقيقيّة $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ المعرّفة بـ:

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2\sin y + y^2 \sin x}{x^2+y^2} & ; \ (x,y)\neq(0,0), \\ 0 & ; \ (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

1) برهن أنّ:

$$\forall (x,y)\in \mathbb{R}^2 \quad \left| f(x,y)\right| \leq \left\|(x,y)\right\|_2 .$$

2) ادرس استمرار الدالّة f عند الصفر.

3) احسب كلاًّ من $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ و $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

4) لتكن الدالّة:

$$g(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2\sin y + y^2 \sin x}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}} & ; (x,y)\neq(0,0), \\ 0 & ; (\ x,y)=(0,0). \end{cases}$$

1) عيّن النهايتين $\lim\limits_{x\to 0} g(x,x)$ و $\lim\limits_{x\to 0} g(x,-x)$.

2) ادرس قابليّة f للمفاضلة عند $(0,0)$.

27) لتكن f الدالّة الحقيقيّة المعرّفة على $\mathbb{R}^2$ كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{(x-y)^3}{x^2+y^2} & ;\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ;\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

1) ادرس استمرار الدالّة f على $\mathbb{R}^2$.

2) احسب المشتقات الجزئيّة من الرّتبة الأولى على $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

3) هل تقبل f مشتقّات جزئيّة من الرّتبة الأولى عند النقطة $(0,0)$.

4) هل تقبل f المفاضلة على $\mathbb{R}^2$ ؟

5) احسب $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ و $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$. ماذا تستنتج ؟

28) لتكن الدالّة الحقيقيّة $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ المعرّفة بـ:

$$f(x,y)=\frac{xArctgy-yArctgx}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

1) برهن أنّ:

$$\forall u\in\mathbb{R}\quad Arctgu\leq u.$$

2) عيّن ميدان التعريف D_f لـ f .

3) تحقّق من أنّ f مستمرّة على D_f .

4) اثبت أنّ f قابلة للتمديد بالاستمرار عند $(0,0)$. نرمز لمدّدها بـ $\tilde{f}$.

5) اثبت أنّ f قابلة للمفاضلة على $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

6) احسب كلاّ من $\dfrac{\partial\tilde{f}}{\partial x}(0,0)$ و $\dfrac{\partial\tilde{f}}{\partial y}(0,0)$.

7) ادرس قابليّة $\tilde{f}$ للمفاضلة عند $(0,0)$.

29) **لتكن** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **دالّة مستمرّة ولنعتبر الدوال الحقيقيّة** F **و** G **و** H **المعرّفة على** $\mathbb{R}^2$ **بـ:**

$$F(x,y)=\int_0^{x+y} f(t)dt;\ \ G(x,y)=\int_x^{y} f(t)dt;\ \ H(x,y)=\int_0^{xy} f(t)dt.$$

1) **احسب مشتقّاتها الجزئيّة من الرتبة الأولى عند نقطة** (a,b) **من** $\mathbb{R}^2$.

2) **اثبت أنّها تقبل المفاضلة على** $\mathbb{R}^2$.

3) **احسب تفاضلياتها عند نقطة** (a,b) **من** $\mathbb{R}^2$.

30) **لتكن** $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ **دالّة من الصنف** $\mathscr{C}^2$ **ولتكن** g **الدالّة الحقيقيّة المعرّفة على** $\mathbb{R}^3$ **بـ :**

$$g(x,y,z)=f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right).$$

1) **احسب** Δg .

2) **كيف ينبغي اختيار** f **لضمان** $\Delta g=0$ ،

31) 1) **لتكن** $f:[-1,1]\to\mathbb{R}^2$ **دالّة من الصنف** $\mathscr{C}^2$ **ولتكن** F **الدالّة الحقيقيّة المعطاة على** $\mathbb{R}^2$ **النحو:**

$$F(x,y)=f\left(\frac{\cos 2x}{ch 2y}\right).$$

احسب ΔF .

2) **لتكن** $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ **الدالّة العرّفة بـ:**

$$f(x,y)=Log\frac{x^2-y^2}{xy}.$$

احسب بدلالة x^3 **و** y^3 **العبارة:**

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,y)+\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(x,y)-\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(x,y)-\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x,y).$$

32) ما هو الشكل الذي يكون عليه المؤثّر اللابلاسيّ $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ عندما نقوم بالتبديل في المتغيّرين x و y على النحو :

$$x = \frac{a^2 x'}{x'^2 + y'^2};\ \ y = \frac{a^2 y'}{x'^2 + y'^2},\ \ a \in \mathbb{R}^* ?$$

33) ليكن عددا حقيقيّا غير معدوم و r و φ و ψ ثلاث دوال حقيقيّة معطاة على $\mathbb{R}^3$ بـ:

$$r(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};\ \ \varphi(x,y,z) = \frac{\cos ar}{r};\ \ \psi(x,y,z) = \frac{\sin ar}{r}.$$

اثبت أنّ :

$$(\Delta + a^2)\ \varphi = 0 = (\Delta + a^2)\psi.$$

34) نعرّف **الإحداثيات الأسطوانيّة** (ρ, φ, z) لنقطة $M(x,y,z)$ (غير منتمية إلى المحور $0z$) بـ:

$$(*) \qquad \begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

حيث ρ من $\mathbb{R}_+^*$ و φ من $[0, 2\pi]$، وإحداثياتها الكروية (r, θ, φ) بـ:

$$(**) \qquad \begin{cases} x = \rho\cos\varphi\cos\theta, \\ y = \rho\sin\varphi\cos\theta, \\ z = r\sin\theta, \end{cases}$$

حيث r من $\mathbb{R}_+^*$ و φ من $[0, 2\pi]$ و θ من $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

لتكن F و G الدالتين من جزء $\mathbb{R}^3$ نحو $\mathbb{R}^3$ والمعرّفتين بالعلاقتين $(*)$ و $(**)$ على التوالي:

$$F(\rho, \varphi, z) = (x, y, z);\quad G(r, \theta, \varphi) = (\rho, \varphi, z).$$

1) اكتب الدساتير التي تعطي (x,y,z) بدلالة (ρ,φ,z) .

2) تأكّد من أنّ مصفوفة الدالّة المركّبة $F\circ G$ اليعقوبيّة تساوي فعلا جداء مصفوفتي الدالّتين F و G اليعقوبيّتين.

35) 1) لتكن الدالّة $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ المعرّفة بـ:

$$f(x,y)=\left(x^2y-3y^2,2x-y-3,x^3+y^2-4xy\right).$$

اثبت أنّ f تقبل المفاضلة عند $\mathbb{R}^2$ ثمّ عيّن مصفوفتها اليعقوبيّة عند نقطة (a,b) من $\mathbb{R}^2$.

3) أجب على السؤال ذاته بخصوص الدالّة:

$$(x,y)\mapsto g(x,y)=\left(x^2\sqrt{1+y^2},\sin(x^2+y^2),e^{x+y^2}\right).$$

36) عيّن تفاضلية كلّ واحدة من الدوال التالية:

$$(x,y)\mapsto f(x,y)=\left(sh(x^2+y^2),e^{\sin y}\right);$$
$$(x,y)\mapsto g(x,y)=\left(Log(1+x^2y^2),xy\right);$$
$$(x,y,z,t)\mapsto h(x,y,z,t)=\left(ch(x+z),sh(y-t)\right).$$

37) 1) اثبت أنّ الدالّة:

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R}^3&\to\mathbb{R}^3\\ (x,y,z)&\mapsto (x+y^2-z,xy^2z,xy+x^2z)\end{aligned}$$

من الصنف $\mathscr{C}^\infty$ على $\mathbb{R}$.

2) احسب مصفوفتها اليعقوبيّة $df(x,y,z)$ عند كلّ نقطة (x,y,z) من $\mathbb{R}^3$.

38) لتكن الدالّتان:

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R}^2&\to\mathbb{R}\\ (x,y)&\mapsto \sin(x^2-y^2),\end{aligned} \quad ; \quad \begin{aligned} g:\mathbb{R}^2&\to\mathbb{R}^2\\ (x,y)&\mapsto (x+y,x-y).\end{aligned}$$

عيّن المصفوفة اليعقوبيّة للدالّة المركّبة $f \circ g$ عند كل نقطة (a,b) من $\mathbb{R}^2$:

أ. بالحساب المباشر،

ب. باستخدام مبرهنة تركيب دوال قابلة للمفاضلة.

39) لتكن $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ دالّة معرّفة بـ :

$$f(x,y,z) = xz^2 Arctg\frac{y}{z}.$$

نعمد إلى الإحداثيات القطبيّة:

$$x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta,\quad F(r,\theta,z) = f(x,y,z).$$

جد المشتقّين $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ بدلالة المشتقّين $\frac{\partial F}{\partial r}$ و $\frac{\partial F}{\partial \theta}$.

40) جد حلاًّ للمعادلات ذات المشتقّات الجزئيّة التالية:

$$\frac{\partial f^2}{\partial x^2} = 0;\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0;\quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = 0.$$

41) لتكن $\varphi:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ دالّة قابلة للمفاضلة مرّتين و ψ دالّة معرّفة على $\mathbb{R}^2$ بـ:

$$\psi(x,y) = e^{\varphi(x,y)}.$$

1) احسب $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}$.

2) استنتج الدوال φ التي تحقّق المعادلة ذات المشتقّات الجزئيّة التالية:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0.$$

42) لتكن الدوال التالية:

$$F:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto F(x,y) = \sin(x^2+y^2);$$
$$g:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$
$$(u,v,w) \mapsto g(u,v,w) = u^2+vw;$$
$$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$
$$t \mapsto f(t) = \left(e^t, \frac{3}{1+t^2}, \cos t\right);$$

$$G = g \circ f;$$

$$h:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$
$$(x,y) \mapsto h(x,y) = (x^2e^y, y\cos x, x+y);$$
$$k:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$
$$(u,v,w) \mapsto k(u,v,w) = u^2+uw;$$

$$H = k \circ h.$$

احسب $G'(t)$ و $\frac{\partial F}{\partial x}$ و $\frac{\partial F}{\partial y}$ و $\frac{\partial H}{\partial x}$ و $\frac{\partial H}{\partial y}$.

43) احسب تدرّج كلّ من الدوال التالية عند النقاط المرفقة:

$$u = xyz;\ (1,1,1),$$
$$v = x^2+y^2-1;\ (0,0),$$
$$w = e^x Log|y| + z;\ (1,2,3).$$

44) 1) لتكن الدالّة $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ المعطاة بـ :

$$f(x,y) = e^{x-2y},$$

ولنضع $x = \sin t$ و $y = t^3$. احسب $\frac{df}{dt}$.

2) احتفظ بالسؤال من أجل الحالة:

$$f(x,y) = Arctg(x-y);\ x = 4t^3;\ y = 3t.$$

45) لتكن المعادلة ذات المشتقّات الجزئيّة التالية:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \qquad (*)$$

نضع $u = x - ct$ و $v = x + ct$.

1) اكتب المعادلة بدلالة u و v .

2) اثبت أنّ:

$$y = f(x - ct) + g(x + ct),$$

حيث f و g دالّتان اختياريتان.

46) لتكن الدالّة الضمنية للمتغيّرين x و y والمعرّفة بالمعادلة:

$$z^3 - 2xz + y = 0$$

التي تأخذ $z = 1$ من أجل $x = 1$ و $y = 1$.

اعط حدودا كثيرة لنشر الدالّة z وفق القوى المتزايدة لـ $x - 1$ و $y - 1$.

47) احسب y' و y'' حيث y هي الدالّة الضمنيّة لـ x المعطاة بالعلاقة:

$$f(x,y) = (x^2 + y^2)^3 - 3(x^2 + y^2) + 1 = 0;$$

$$f(x,y) = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - 1 = 0;$$

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + 10xy = 0;$$

$$f(x,y) = 1 + xy - Log\left(e^{xy} + e^{-xy}\right) = 0.$$

48) 1) اثبت أنّ العلاقة:

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy - 1 = 0;$$

تعرّف في جوار الصفر دالّة ضمنية $\varphi : x \mapsto \varphi(x) = y$ بحيث $\varphi(0) = 1$.

2) هات النشر المحدود من الرتبة الثالثة في جوار الصفر للدالّة φ .

3) أجب على السؤالين بخصوص العلاقة:

$$f(x,y)=1-ye^{x}+xe^{y}=0.$$

49) لتكن $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ الدالّة المعرّفة على النحو:

$$f(x,y)=2e^{x+y}+y-x.$$

1) تأكّد من أنّ $f(1,-1)=0$.

2) اثبت أنّه يوجد مجالان I و J ودالّة $\varphi:I\to J$ معرّفة ضمنيّا بالعلاقة $f(x,y)=0$ وتحقّق $\varphi(1)=-1$.

3) احسب $\varphi'(1)$ و $\varphi''(1)$.

الفصل الثالث
النشر التايلوريّ[23] والنقاط الحرّيّة

1.3 النشر التايلوريّ

تتوخّى هذه الفقرة تقديم تعميما للدستور التايلوريّ الذي مرّ بك في الدوال $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

1.1.3 تعريف

لتكن f دالّة حقيقيّة منطلقها جزء D_f من $\mathbb{R}^2$ ولتكن (a,b) نقطة من D_f . نفترض أنّ f من الصنف $\mathscr{C}^{n+1}$. لنعتبر من أجل كلّ (h,k) من $\mathbb{R}^2$ الدالّة:

$$F : t \mapsto F(t) = f(a+ht, b+kt).$$

لدينا:

$$F'(t) = h\frac{\partial f}{\partial x}(a+ht, b+kt) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a+ht, b+kt)$$

ومن أجل $t=0$ يأتي:

$$F'(0) = h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b).$$

وبالمثل، لدينا:

$$F''(t) = h^2\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(a+ht, b+kt) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a+ht, b+kt) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(a+ht, b+kt)$$

---

23. Brook Taylor : رياضيّاتيّ انڤليزيّ. ولد في 18 أوت 1685 بإدمنتون ومات في 29 ديسمبر 1731 بلندن. اشتهر بالدستور المستعرض أعلاه. لقد نشره بدون الباقي ودونما اكتراث بالجوانب التقاربيّة له. استخدمه لإيجاد حلول تقريبيّة لمعادلة من النوع $f(x)=0$.

ومن أجل $t=0$ يأتي:

$$F''(0)=h^2\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(a,b)+2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)+k^2\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(a,b).$$

يمكن أن نعمّم هذه الخطوات بالتدريج فنجد:

$$F^{(n)}(t)=h^n\frac{\partial^n f}{\partial x^n}+C_n^1h^{n-1}k\frac{\partial^n f}{\partial y\partial x^{n-1}}+...+C_n^ih^{n-i}k^i\frac{\partial^n f}{\partial y^i\partial x^{n-i}}+...+k^n\frac{\partial^n f}{\partial y^n},$$

حيث $C_n^i=\dfrac{n!}{i!(n-i)!}$. يمكن لهذه الصيغة أن تأخذ الشكل:

$$F^{(n)}(t)=\left(\left[h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(n)}f\right)(a+ht,b+kt);$$

ومن أجل $t=0$ يأتي:

$$F^{(n)}(0)=\left(\left[h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(n)}f\right)(a,b).$$

2.1.3 ملحوظة

هذه العلاقة الأخيرة تظلّ صالحة من أجل عدد كيفيّ m من المتغيّرات:

$$F^{(n)}(t)=\left(\left[h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+...+h_m\frac{\partial}{\partial x_m}\right]^{(n)}f\right)(a_1+h_1t,a_2+h_2t,...,a_m+h_mt)$$

ومن أجل $t=0$ يأتي:

$$F^{(n)}(0)=\left(\left[h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+...+h_m\frac{\partial}{\partial x_m}\right]^{(n)}f\right)(a_1,a_2,...,a_m).$$

نرى هكذا، أنّ F تقبل نشرا تايلوريّا رتبته n عند الصفر. إذا اعتبرنا $t=1$ حصلنا على المبرهنة الموالية:

3.1.3 مبرهنة

لتكن f دالة حقيقيّة لـ m متغيّرا حقيقيّا من الصنف $\mathscr{C}^{n+1}$ على جوار مفتوح Ω لنقطة $A=(a_1,a_2,...,a_n)$. يوجد عندئذ عدد θ من $]0,1[$ بحيث:

$$\begin{aligned}
f(A+H) &= f(a_1+h_1,a_2+h_2,...,a_m+h_m)\\
&= \underbrace{f(A)+\left[h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+...+h_m\frac{\partial}{\partial x_m}\right]f(A)+\frac{1}{2!}\left[h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+...+h_m\frac{\partial}{\partial x_m}\right]^{(2)}f(A)+\frac{1}{3!}\left[h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+...+h_m\frac{\partial}{\partial x_m}\right]^{(3)}f(A)+....+\frac{1}{n!}\left[h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+...+h_m\frac{\partial}{\partial x_m}\right]^{(n)}f(A)}_{(I)}+\\
&\quad+\underbrace{\left[\frac{1}{(n+1)!}\left[h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+...+h_m\frac{\partial}{\partial x_m}\right]^{(n+1)}f(a+\theta h_1,a_2+\theta h_2,...,a_m+\theta h_m)\right]}_{(II)}.
\end{aligned}$$

تسمّى العبارة الأولى (I) بالجزء النظامي للنشر من الرتبة n في حين تدعى العبارة الثانية (II) باقي لاقرانج[24] للنشر.

24. Joseph Louis Lagrange: رياضيّاتيّ إيطاليّ كبير في الفيزياء والتحليل الرياضيّاتيّ ونظرية الأعداد. ولد في 25 جانفي 1736 بطورينو ومات بباريس في 10 أفريل 1813. ساهم بشكل خاص في حسبان التغيّرات والميكانيكا التحليليّة والفلك. إليه يعود رمز المشتقّ f' .

وفي الحالة الخاصّة $m=2$ نجد:

$$f(A+H)=f(a+h,b+k)=f(a,b)+h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)+k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)+$$

$$+\frac{1}{2!}\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)+2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)+k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\right)$$

$$+\frac{1}{3!}\left(h^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a,b)+3h^2k\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2}(a,b)+3hk^2\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(a,b)+k^3\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(a,b)\right)+$$

$$+\ldots+\frac{1}{n!}\left(h^n\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(a,b)+C_n^1h^{n-1}k\frac{\partial^n f}{\partial y\partial x^{n-1}}(a,b)+\ldots+k^n\frac{\partial^n f}{\partial y^n}(a,b)\right)$$

$$\underbrace{+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1}}(a+\theta h,b+\theta k)+\frac{C_{n+1}^1}{(n+1)!}h^nk\frac{\partial^{n+1} f}{\partial y\partial x^n}(a+\theta h,b+\theta k)+\ldots+}$$

$$\underbrace{+\frac{k^{n+1}}{(n+1)!}\frac{\partial^{n+1} f}{\partial y^{n+1}}(a+\theta h,b+\theta k)}$$

4.1.3 ملحوظة

يمكن للباقي الوارد في هذا النشر أن يأخذ الشكل:

$$\circ\left(\|h-a,k-b\|^n\right)=\|h-a,k-b\|^n\,\varepsilon(h-a,k-b),$$

حيث $\lim\limits_{(h,k)\to(a,b)}\varepsilon(h-a,k-b)=0$. هذا الشكل معروف تحت تسمية باقي يونڤ.

5.1.3 مثالان

1) لتكن الدالّة الحقيقيّة المعطاة على $\mathbb{R}^2$ بـ:

$$f(x,y)=x^4+y^3+x^2-y^2-3xy+5.$$

لنكتب نشرها التايلوريّ من الرتبة الثالثة في جوار $(1,0)$. نحسب في سبيل ذلك:

$$f(x,y)=x^4+y^3+x^2-y^2-3xy+5 \quad ; \quad f(1,0)=7$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=4x^3+2x-3y \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1,0)=6$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=3y^2-2y-3x \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)=-3$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=12x^2+2 \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0)=12$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=6y-2 \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,0)=-2$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=-3 \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,0)=-3$$
$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,y)=24x \quad ; \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(1,0)=24$$
$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x,y)=6 \quad ; \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(1,0)=6$$
$$\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2}(x,y)=\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(x,y)=0 \quad ; \quad \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(x,y)=24;$$
$$\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}(x,y)=\frac{\partial^4 f}{\partial y\partial x^3}(x,y)=\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^3}(x,y)=\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}(x,y)=0.$$

وعليه:

$$f(1+h,k)= f(1,0)+h\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)+k\frac{\partial f}{\partial y}(1,0)+$$
$$+\frac{1}{2!}\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0)+2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,0)+k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,0)\right)+$$
$$+\frac{1}{3!}\left(h^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(1,0)+3h^2k\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2}(1,0)+3hk^2\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(1,0)+k^3\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(1,0)\right)$$

$$+\frac{1}{4!}\begin{pmatrix} h^4\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(1+\theta h,\theta k)+4h^3k\frac{\partial^4 f}{\partial x^3\partial y}(1+\theta h,\theta k)+6h^2k^2\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}(1+\theta h,\theta k) \\ +4hk^3\frac{\partial^4 f}{\partial x\partial y^3}(1+\theta h,\theta k)+k^4\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}(1+\theta h,\theta k) \end{pmatrix}$$

$$=-7+6h-3k+\frac{1}{2!}\left(12h^2-4hk-4k^2\right)+\frac{1}{3!}\left(24h^3+6k^3\right)+\frac{1}{4!}\left(24h^4\right)$$

$$=h^4+4h^3+k^3+6h^2-2hk-2k^2+6h-3k-7.$$

2) **لنكتب نشر تايلور- يونغ من الرتبة الثالثة في جوار النقطة $\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}\right)$ للدالّة:**

$$f:(x,y)\mapsto f(x,y)=\cos(x-2y).$$

لدينا بغية ذلك:

$$f(x,y)=\cos(x-2y) \quad ; \quad f\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-\sin(x-2y) \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2\sin(x-2y) \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}\right)=-1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=-\cos(x-2y) \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=2\cos(x-2y) \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=-4\cos(x-2y)\quad;\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}\right)=-2\sqrt{3}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,y)=\sin(x-2y)\quad;\quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2}(x,y)=-2\sin(x-2y)\;;\quad \frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2}\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}\right)=-1$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(x,y)=4\sin(x-2y)\quad;\quad \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}\right)=-2$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x,y)=-\sin(x-2y)\quad;\quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}\right)=-4$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(x,y)=-8\cos(x-2y);\ \frac{\partial^4 f}{\partial x^3\partial y}(x,y)=16\cos(x-2y)$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial^2 x\partial y^2}(x,y)=4\cos(x-2y);\ \frac{\partial^4 f}{\partial x\partial y^3}(x,y)=-8\cos(x-2y)$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}(x,y)=16\cos(x-2y).$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}+h,\frac{\pi}{6}+k\right)=f\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}\right)+h\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}\right)+k\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}\right)$$

$$+\frac{1}{2!}\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}\right)+2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}\right)+k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$+\frac{1}{3!}\left(\begin{array}{r}h^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}\right)+3h^2k\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2}\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}\right)+3hk^2\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}\right)+\\ +k^3\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}\right)\end{array}\right)$$

$$+\frac{1}{4!}\left(\begin{array}{r}h^4\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}+4h^3k\frac{\partial^4 f}{\partial x^3\partial y}+6h^2k^2\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}+\\ +4hk^3\frac{\partial^4 f}{\partial x\partial y^3}+k^4\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}\end{array}\right)\left(\frac{\pi}{2}+\theta h,\frac{\pi}{6}+\theta k\right)$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}+h,\frac{\pi}{6}+k\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(-\frac{1}{2}h-k\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}h^2+2\sqrt{3}hk-2\sqrt{3}k^2\right)$$
$$+\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{2}h^3+-3h^2k+6hk^2-4k^3\right)+$$
$$+\frac{1}{4!}\left(\begin{array}{r}-8h^4+64h^3k+24h^2k^2-\\-24hk^3+16k^4\end{array}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta h-2\left(\frac{\pi}{6}+\theta k\right)\right).$$

2.3 النقاط الحديّة الطليقة

1.2.3 تعريف

لتكن f دالّة حقيقيّة منطلقها جزء D_f من $\mathbb{R}^n$.

نقول عن نقطة a من D_f إنّها **نقطة حدّية عظمى محليّة** إذا وجد جوار لها V_a بحيث:

$$f(a) \geq f(x), \ \ \forall x \in V_a \cap D_f.$$

ونقول عنها إنّها **نقطة حدّية عظمى مطلقة** إذا تحقّق:

$$f(a) \geq f(x), \ \ \forall x \in D_f.$$

نقول عن نقطة a من D_f إنّها **نقطة حدّية صغرى محليّة** إذا وجد جوار لها V_a بحيث:

$$f(a) \geq f(x), \ \ \forall x \in V_a \cap D_f.$$

ونقول عنها إنّها **نقطة حدّية صغرى مطلقة** إذا تحقّق:

$$f(a) \leq f(x), \ \ \forall x \in D_f.$$

وأخيرا، نقول عن f إنّها تقبل **نقطة حدّية** عند a إذا كانت قيمتها عند a عظمى أو صغرى.

فلو اعتبرنا مثلا الدالّتين $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ المعطاتين بـ:

$$f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2;$$
$$g(x) = g(x_1, x_2, ..., x_n) = -x_1^2 - x_2^2 - ... - x_n^2,$$

لكتبنا بداهة:

$$f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 \geq 0 = f(0), \ \ \forall x \in \mathbb{R}^n;$$
$$g(x) = g(x_1, x_2, ..., x_n) = -x_1^2 - x_2^2 - ... - x_n^2 \leq 0 = f(0), \ \ \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

وهو ما يظهر أنّ الصفر نقطة حدّية صغرى مطلقة لـ f وعظمى مطلقة لـ g .

أمّا إذا اعتبرنا الدالة $f(x,y)=x^3+y^3$ والنقطة $(0,0)$ فإنّنا نلاحظ بشأنهما:

$$f(x,y)-f(0,0)=x^3+y^3,$$
$$f(-x,-y)-f(0,0)=-x^3-y^3;$$

وهو ما يبيّن أنّ الفرق يغيّر إشارته في جوار $(0,0)$ ، وبالتالي، فإنّ هذه الأخيرة ليست حدّيّة.

2.2.3 ملحوظة

نصطلح على تسمية القيمة العظمى بالذروة والصغرى بالحضيض.

3.2.3 تمهيد

إذا كانت f من الصنف $\mathscr{C}^3$ في جوار النقطة a فإنّها تقبل نشرا تايلوريّا من الرتبة الثانية في جوار a :

$$f(a+h)-f(a)=\sum_{i=1}^{n}h_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)+\sum_{i=1}^{n}h_ih_j\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)+\circ\left(\|h\|^2\right).$$

من الواضح أنّه إذا قبلت f نقطة حديّة عند a فإنّ الفرق $f(a+h)-f(a)$ يحتفظ بإشارة ثابتة. ولكن إشارة هذا الفرق متعلّقة بإشارة الجزء النظامي $\sum_{i=1}^{n}h_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ إذا ما سلّمنا بأنّ باقي النشر مهمل في جوار a . نلاحظ أنّ إشارة العبارة $\sum_{i=1}^{n}h_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ متغيّرة ما لم يكن:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)=0,\quad \forall i=1,2,\dots,n.$$

بعد هذا التمهيد نضع:

4.2.3 مبرهنة

لتكن a نقطة من ميدان تعريف دالّة $f : D_f \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. إذا :

- كان D_f جوارا لـ a،
- قبلت f نقطة حدّية محليّة عند a،
- المشتقّات الجزئيّة من الرتبة الأولى $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ موجودة، فإنّ:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0, \quad \forall i = 1, 2, ..., n.$$

5.2.3 تعريف

ليكن U جزءا مفتوحا من $\mathbb{R}^n$ و a نقطة منه. نقول عن a إنّها **نقطة حرجة** لدالّة $f : U \to \mathbb{R}$ إذا كانت مشتقّات f الجزئيّة من الرتبة الأولى عند a موجودة ومعدومة.

تبيّن هذه المبرهنة السابقة أنّه إذا قبلت دالّة مشتقّات جزئيّة على U فإنّ النقاط التي تقبل فيها قيمة حدّية موجودة ضمن نقاطها الحرجة. هكذا، إذا كانت f دالّة من الصنف $\mathscr{C}^3$ وقبلت نقطة حدّية محلّية عند a فإنّ:

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{i,j=1}^{n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) + \circ\left(\|h\|^2\right). \qquad (*)$$

نختصّ بالدراسة الآن الدوال $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

6.2.3 قاعدة

ليكن U **مفتوحا من** $\mathbb{R}^2$ **و** $f:U\to\mathbb{R}$ **دالّة من الصنف** $\mathscr{C}^3$ **على** U **و** (a,b) **إحدى نقاطها الحرجة.**

تأخذ العلاقة $(*)$ **أعلاه الشكل :**

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)=h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)+2hk\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(a,b)+$$
$$+k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)+\circ\left(\|(h,k)\|^2\right).$$

إذا ما وضعنا:

$$r=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b);\quad s=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b);\quad t=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\ .$$

كتبنا من جديد:

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)=rh^2+2shk+tk^2+\circ\left(\|(h,k)\|^2\right).$$

ومن أجل $k\neq 0$ **نضع** $X=\dfrac{h}{k}$ **ونكتب أخيرا:**

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)=k^2(rX^2+2sX+t)+\circ\left(\|(h,k)\|^2\right).$$

إذا كانت (a,b) **نقطة حديّة لـ** f **كان على ثلاثي الحدود:**

$$P(X)=rX^2+2sX+t,$$

أن يحتفظ بإشارة ثابتة على U **؛ (إشارة الباقي مهملة ولا تؤخذ في الحسبان) وهو ما يستدعي كون مميّزه** $\Delta=s^2-rt$ **سالبا أو معدوما.**

يمكن الآن أن نميّز الحالات التالية (**قاعدة سيلفستر**[25]):

1) إذا كان $\Delta < 0$ و $r > 0$ كانت (a,b) نقطة حدّية صغرى؛

2) إذا كان $\Delta < 0$ و $r < 0$ كانت (a,b) نقطة حدّية عظمى؛

3) إذا كان $\Delta > 0$ كانت (a,b) نقطة **سرجيّة** (لا تقبل f عندها قيمة حدّية).

4) إذا كان $\Delta = 0$ **لا يمكن الحكم على طبيعة** (a,b). يستدعى التحكّم بهذه الطبيعة دراسة أعمق (بنشر تايلوري أوسع مثلا). سوف نستعرض نماذج تخصّ هذه الحالة في الأمثلة والتمارين اللاحقة.

7.2.3 أمثلة

1) لنتأكّد من أنّ النقطتين $(1,-1)$ و$(-1,1)$ حدّيّتين صغروين للدالّة الحقيقيّة f المعطاة على $\mathbb{R}^2$ بـ :

$$f(x,y) = x^4 + y^4 + (x-y)^2.$$

إذا حسبنا التدرّج :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 - 2(x-y), \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3 + 2(x-y); \end{cases}$$

25. James Joseph Sylvester: رياضيّاتيّ انـﭬليزيّ. ولد في 3 سبتمبر 1814 بلندن ومات بها في 15 مارس 1897. درس القانون وعمل في حقله وواصل بالتوازي نشاطه الرياضياتي بالتواصل مع الرياضياتي كايلي. ابتكر بمعية هذا الأخير اللا متغيّرات الجبريّة.

اتّضح لنا بسهولة أنّ النقطتين المقترحتين تعدمانه. إنّهما حرجتان إذن.

نحسب إلى جانب ذلك:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=12x^2-2;\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=0;\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=12y^2-2$$

وعليه:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,-1)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,1)=10=r;\\
&\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(1,-1)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(-1,1)=0=s;\\
&\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,-1)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1,1)=10=t;\\
&\Delta=s^2-rt=-100<0.
\end{aligned}$$

هذه النتائج تحسم الردّ بفضل القاعدة السلفستريّة أعلاه.

2) لنعيّن النقاط الحدّية للدالّة $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ المعطاة بـ:

$$f(x,y)=x^2+xy+y^2+\frac{1}{4}x^3.$$

إنّ هذه الدالّة من الصنف $\mathscr{C}^\infty$ على $\mathbb{R}^2$. نقاطها الحرجة تعدم تدرّجها، أي أنّها حلول للجملة:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+y+\dfrac{3}{4}x^2=0\\[2mm] x+2y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x,y)=(0,0),\\ \text{أو}\\ (x,y)=(-2,1).\end{cases}$$

نجد هكذا أنّ لـ f نقطتين حرجتين هما $(0,0)$ و $(-2,1)$. نطبّق قصد تعيين طبيعتهما قاعدة سيلفستر الموصوفة سابقا فنحسب:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=2+\frac{2}{3}x;\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=1;\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=2.$$

يوضّح الجدول أدناه الطبيعة المطلوبة:

الطبيعة	s^2-rt	t	s	r	النقطة الحرجة
حضيض	-3	2	1	2	$(0,0)$
سرجيّة	3	2	1	-1	$(-2,1)$

3) لندرس وجود وطبيعة القيم الحديّة للدالّة الحقيقيّة f المعرّفة على $\mathbb{R}^2$ بـ:

$$f(x,y)=x^3+3xy^2-15x-12y.$$

من أجل ذلك نبحث أوّلا عن نقاط f الحرجة. إنّها في حصيلة هذه الحسابات:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}xy-2=0\\ x^2+y^2-5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\dfrac{2}{x},\ \ x\neq 0\\ x^4-5x^2+4=0\end{cases}$$

بوضع $z=x^2$ في المعادلة الأخير يأتي:

$$\begin{cases}y=\dfrac{2}{x}\\ z=x^2\\ z^2-5z+4=(z-4)(z-1)=0.\end{cases}$$

نحصل على أربع نقاط حرجة هي:

$$A(2,1);\quad B(-2,-1);\quad C(1,2);\quad D(-1,-2).$$

لفحص طبيعة كلّ واحدة منها نستعين بقاعدة سيلفستر بعد وضع:

$$r=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=6x;\quad s=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=6y;\quad t=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=6x.$$

النقطة الحرجة	r	s	t	s^2-rt	الطبيعة
A	0	-2	-4	4	سرجيّة
B	0	2	-4	4	سرجيّة
C	-2	0	2	4	سرجيّة
D	$-\frac{2}{3}$	0	-2	$-\frac{4}{3}$	ذروة

4) **للدالّة** $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ **المعطاة بـ:**

$$f(x,y)=x^4+y^4.$$

نقطة حرجة وحيدة، هي المعدمة للتدرّج :

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}x^3=0\\ y^3=0\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad (x,y)=(0,0).$$

لدينا بشأنها $s^2-rt=0$ **. لا يمكن عبر قاعدة سيلفستر أن نعرف طبيعة هذه النقطة. نقوم بنشر دالّتنا تايلوريّا إلى أوّل رتبة لا تنعدم مشتقّات** f **الجزئيّة كلّها. ليس صعبا أن نرى أنّ الرتبة الرابعة تؤدّي المطلوب. لدينا توّا:**

$$f(h,k)=\frac{1}{4!}\begin{pmatrix} h^4\dfrac{\partial^4 f}{\partial x^4}(0,0)+4h^3k\dfrac{\partial^4 f}{\partial x^3\partial y}(0,0)+ \\ +6h^2k^2\dfrac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}(0,0)+4hk^3\dfrac{\partial^4 f}{\partial x\partial y^3}(0,0)+ \\ +k^4\dfrac{\partial^4 f}{\partial y^4}(0,0)\end{pmatrix}+\circ\left(\|(h,k)\|^4\right)$$

$$=\frac{1}{4!}\left(24h^4+24k^4\right)+\circ\left(\|(h,k)\|^4\right)=h^4+k^4+\circ\left(\|(h,k)\|^4\right).$$

نستخلص أنّ إشارة الفرق $f(h,k)-f(0,0)$ **من إشارة المقدار** h^4+k^4 **الموجبة. نخلص منه إلى أنّ النقطة** $(0,0)$ **حديّة صغرى.**

8.2.3 ملحوظة

هذه النتيجة منتظرة ولا تحتاج إلى ما سبق، ذلك لأنّ:

$$f(0,0)=0\le x^4+y^4;\ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

3.3 النقاط الحديّة المقيّدة

1.3.3 تعريف

لتكن $f,g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ دالّتين من الصنف $\mathscr{C}^1$ في جوار نقطة (a,b) من $\mathbb{R}^2$. إذا قبلت f قيمة حدّيّة عند (a,b) بحيث $g(x,y)=0$ قيل عن (a,b) إنّها **قيمة حديّة مقيّدة** (بالشرط أو **القيد** $g(x,y)=0$).

لمعالجة هذه النقاط نقدّم طريقتين:

2.3.3 الأولى: طريقة التعويض

إذا سمح القيد $g(x,y)=0$ بصوغ y بدلالة x (كأن نكتب $y=\varphi(x)$)

أمكن عندئذ انتهاج التعويض بالبحث عن القيم القصوى الطليقة للدالّة:

$$F(x)=f(x,\varphi(x)).$$

إذا كانت x_0 نقطة حديّة للدالّة F كان الزوج (x_0,y_0)، حيث $y_0=\varphi(x_0)$، **نقطة حديّة مقيّدة للدالّة** f.

إذا تعذّر استعمال هذه الطريقة يمكن اللجوء إلى الطريقة:

3.3.3 الثانية: طريقة لاڤرانج

تعتمد طريقة لاڤـرانج على دالّة وسيطيّة $\mathscr{L}$ تدعى **اللاڤـرانجي**:

$$\mathscr{L}(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y);$$

حيث λ عدد حقيقيّ، وتجزم بأنّه إذا كان الزوج (a,b) نقطة حدّية للدالّة f تذعن للقيد $g(a,b)=0$ فإنّ السلمي λ يكون مضمون الوجود وبه تصبح (a,b) حلّا لجملة المعادلات:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial x}(x,y,\lambda)=0, \\ \dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial y}(x,y,\lambda)=0, \\ \dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda}(x,y,\lambda)=0. \end{cases}$$

تسمّى هذه المعادلات **الشروط من الرتبة الأولى**، وعادة ما توضع تحت الشكل:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\lambda\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y), \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\lambda\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y), \\ g(x,y)=0; \end{cases}$$

أو والأمر سيان:

$$\begin{cases} \nabla f(x,y)=\lambda\nabla g(x,y), \\ g(x,y)=0. \end{cases}$$

يكون التدرّجان $\nabla f(a,b)$ و $\nabla g(a,b)$، والحال هذه، **مرتبطين خطّيا**. بعد حلّ هذه الجملة ينبغي في النهاية اختبار حلولها بغية الوقوف على طبيعتها: هل هي حدّيّة عظمى، أو حدّيّة صغرى أو لا هذا ولا ذاك.

4.3.3 قضية (الشروط من الرتبة الثانية)

إنّ العبارة:

$$\Delta(x,y,\lambda)=\frac{\partial^2\mathscr{L}}{\partial x^2}(x,y,\lambda)\left(\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\right)^2- \\ -2\frac{\partial^2\mathscr{L}}{\partial x\partial y}(x,y,\lambda)\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)+ \\ +\frac{\partial^2\mathscr{L}}{\partial y^2}(x,y,\lambda)\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\right)^2,$$

تحدّد طبيعة النقطة الحدّية (a,b) :

إذا كان $\Delta(a,b,\lambda)<0$ كانت (a,b) حدّيّة عظمى مقيّدة،

إذا كان $\Delta(a,b,\lambda)>0$ كانت (a,b) حدّيّة صغرى مقيّدة.

5.3.3 أمثلة

1) **لنبيّن أنّ الدالّة $f(x,y,z)=2xy+yz+zx$ تقبل قيمة عظمى عند النقطة $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$ عندما تذعن المتغيّرات x و y و z للقيد $x+y+z=1$.**

يتعلّق الأمر بنقطة حدّيّة مقيّدة. نستخدم طريقة تعويض القيد في عبارة الدالّة المعطاة. نكتب في هذا الشأن:

$$z=1-x-y,$$
$$f(x,y,z)=f(x,y,1-x-y)=2xy+(x+y)(1-x-y)$$
$$=x+y-x^2-y^2=h(x,y),$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,y)=1-2x=0\\[2mm]\dfrac{\partial h}{\partial y}(x,y)=1-2y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}\\[2mm]y=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,y)=-2=r<0;\quad \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x,y)=-2=t;\quad \frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y}(x,y)=0=s$$

$$s^2-rt=-4<0$$

نستخلص على ضوء قاعدة سيلفستر أنّ الدالّة h تدرك عند النقطة $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ ذروة، وهو ما يقود إلى أنّ النقطة $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$ حدّيّة عظمى مقيّدة للدالّة f .

2) **لنبحث عن النقاط الحدّيّة التي تأخذها عندها الدالّة الحقيقيّة:**

$$f(x,y)=x^2+y^2,$$

قيمها القصوى على القطع الناقص $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}-1=0$.

نطبّق منهج القيم الحدية المقيّدة الموصوف، فنكتب:

$$g(x,y)=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}-1;\ \nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}2x\\2y\end{pmatrix};\ \nabla g(x,y)=\begin{pmatrix}\frac{x}{2}\\\frac{y}{8}\end{pmatrix}.$$

توجد النقاط الحدّية المقيّدة ضمن النقاط التي يتحقّق بها الارتباط الخطّي للتدرّجين الحاضرين، أي أنّها من بين حلول الجملة:

$$\begin{cases}\begin{vmatrix}\nabla f(x,y)\\\nabla g(x,y)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2x & \frac{x}{2}\\2y & \frac{y}{8}\end{vmatrix}=xy\begin{vmatrix}1 & 1\\1 & \frac{1}{4}\end{vmatrix}=-\frac{3}{4}xy=0\\\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}-1=0.\end{cases}$$

هذه الحلول هي:

$$A(0,4);\ B(0,-4);\ C(2,0);\ D(-2,0);$$

وعندها تأخذ الدالّة f **القيم:**

$$f(A)=f(B)=16;\quad f(C)=f(D)=4;$$

نستخلص على الفور أنّ النقطتين A **و** B **حديّتان عظميان و** C **و** D **حديّتان صغرويان.**

يمكن بخصوص هذه الخلاصة الاستنجاد بالشروط من الرتبة الثانية، فنحسب:

$$\mathscr{L}(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y)=x^2+y^2-\frac{\lambda}{4}x^2-\frac{\lambda}{16}y^2+\lambda$$
$$=\left(1-\frac{\lambda}{4}\right)x^2+\left(1-\frac{\lambda}{16}\right)y^2+\lambda;$$

$$\frac{\partial^2 \mathscr{L}}{\partial x^2}(x,y,\lambda)=2-\frac{\lambda}{2};\ \ \frac{\partial^2 \mathscr{L}}{\partial y^2}(x,y,\lambda)=2-\frac{\lambda}{8};\ \ \frac{\partial^2 \mathscr{L}}{\partial y\partial x}(x,y,\lambda)=0$$

$$\lambda_A=\lambda_B=16;\ \ \lambda_C=\lambda_D=4;$$

$$\Delta_A(0,4,16)=\Delta_B(0,-4,16)=-\frac{3}{2}<0;$$

$$\Delta_C(2,0,4)=\Delta_D\left(-2,0,4\right)=\frac{3}{2}>0.$$

إنّه ضمان للنتيجة المعلنة.

3) **لنبحث في المستقيم** $x+2y=3$ **عن أقرب نقطة إلى المبدإ** $(0,0)$.

لنشر أوّلا إلى أنّ مفهوم "القرب" المقصود هنا هو القرب المسافتيّ المعهود في الهندسة الإقليديّة. ونذكّر بأنّ المسافة بين نقطة من المستوي والصفر معطاة بـ:

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}.$$

تردّ المسألة إلى البحث عن النقاط التي تأخذ عندها هذه الدالّة حدّها الأدنى على المستقيم الموضوع. يمكن بغية ذلك أن نتّبع الطريقة السابقة خطوة خطوة، فنضع:

$$g(x,y)=x+2y-3;\ \ \nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\\[2ex] \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{pmatrix};\ \ \nabla g(x,y)=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}.$$

توجد النقاط المطلوبة ضمن حلول الجملة:

$$\begin{cases}\begin{vmatrix}\nabla f(x,y)\\ \nabla g(x,y)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & 1\\[2ex] \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & 2\end{vmatrix}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\begin{vmatrix}x & 1\\ y & 2\end{vmatrix}=\dfrac{2x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0,\\[2ex] x+2y-3=0.\end{cases}$$

نجد حلاّ وحيدا (كما هو منتظر !!!) هو $M\left(\frac{3}{5},\frac{6}{5}\right)$.

للتأكّد من أنّه حضيض نلجأ إلى الشروط من الرتبة الثانية، فنحسب كما سبق:

$$\lambda_M = \frac{\sqrt{5}}{5};$$
$$\mathscr{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} - \lambda x - 2\lambda y + 3\lambda;$$
$$\frac{\partial^2 \mathscr{L}}{\partial x^2}(x,y,\lambda) = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}};\quad \frac{\partial^2 \mathscr{L}}{\partial y^2}(x,y,\lambda) = \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}};$$
$$\frac{\partial^2 \mathscr{L}}{\partial y \partial x}(x,y,\lambda) = \frac{-xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}};$$
$$\Delta_M\left(\frac{3}{5},\frac{6}{5},\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = \frac{121}{75}\sqrt{5} > 0;$$

إنّه ضمان للنتيجة المعلنة.

6.3.3 ملحوظتان

1) يمكن بطبيعة الحال أن نحلّ هذه المسألة الأخيرة بالطريقة التعويضيّة على المنوال الموالي المألوف في الأطوار السابقة من دراستك. علينا أن نقف على النقطة التي تأخذ عندها الدالّة:

$$h(x) = \sqrt{x^2 + \left(\frac{3-x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{5x^2-6x+9},$$

القيمة الصغرى. توجد فاصلة هذه النقطة المطلوبة من بين حلول المعادلة:

$$h'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{5x^2-6x+9} = \frac{5x-3}{\sqrt{5x^2-6x+9}} = 0;$$

وهي على الفور $x_0 = \frac{3}{5}$. نستنتج أنّ ترتيبتها هي $y_0 = \frac{6}{5}$. الآن، إذا حسبنا:

$$h''(x) = \frac{5(5x^2-6x+9)-(5x-3)^2}{(5x^2-6x+9)^{\frac{3}{2}}} = \frac{36}{(5x^2-6x+9)^{\frac{3}{2}}} > 0;$$

تأكّدنا أنّ النقطة $\left(\frac{3}{5}, \frac{6}{5}\right)$ حديّة صغرى.

2) هناك طريقة هندسيّة تستحضرها من ماضيك، وهي القائلة بأنّ النقطة

المعنية هي نقطة التقاء المستقيم العموديّ النازل من الصفر Δ على المستقيم المقترح D مع هذا المستقيم D . لهذا الأخير المعادلة:

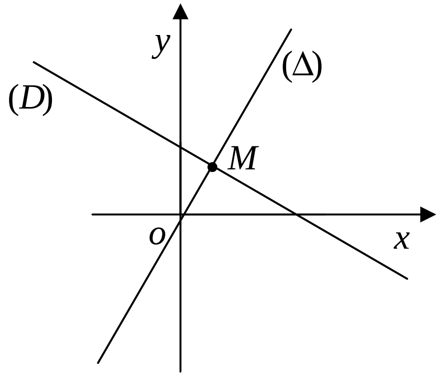
$$D: \ y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2};$$

نستخلص أنّ معادلة Δ هي:

$$\Delta: \ y = 2x.$$

النقطة M المطلوبة هي:

$$D \cap \Delta = \left\{\left(\frac{3}{5}, \frac{6}{5}\right)\right\}.$$



4.3 تمارين محلولة

1. هات نشر تايلور لاقرانج من الرتبة الثالثة عند $(0,0)$ للدالّتين الحقيقيّتين f و g المعطاتين على $\mathbb{R}^2$ بـ:

$$f(x,y)=ch(2x+3y);\quad g(x,y)=sh(3x-2y).$$

2. اكتب دستور تايلور يونغ من الرتبة الثالثة عند $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ للدالّتين الحقيقيّتين f و g المعطاتين على $\mathbb{R}^2$ بـ:

$$f(x,y)=\sin(2x+3y);\quad g(x,y)=\cos(3x-2y).$$

3. 1) اكتب دستور تايلور يونغ من الرتبة الرابعة عند الصفر للدالّتين الحقيقيّتين f و g المعطاتين على $\mathbb{R}^2$ بـ:

$$f(x,y)=e^{1+\sin 2x-\cos 3y};\quad g(x,y)=Log(ch3x+sh2y).$$

1) استنتج النهاية $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{1+\sin 2x-\cos 3x}-1}{Log(ch3x+sh2x)}$.

4. لتكن f و g الدالّتين الحقيقيّتين المعرّفتين على $\mathbb{R}^2$ بـ:

$$g(x,y)=x^2+y^3.\ \ f(x,y)=y^3-2y^2+y-x^2y;$$

1) عيّن نقاط هما الحرجة.

2) عيّن طبيعة كلّ واحدة من هذه النقاط.

5. ليكن λ عددا حقيقيّا.

1) برهن أنّ الدالّة $k:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ المعرّفة بـ:

$$k(x,y)=x^2+xy+y^2-\frac{1}{1+\lambda^2x^2+y^2},$$

تقبل قيمة صغرى محلّية عند النقطة $(0,0)$. .

2) هل تقبل نقاط حدّية من دون النقطة $(0,0)$.

6. جد القيم الحدّية للدالّة الحقيقيّة f المعطاة على $\mathbb{R}^2$ بـ:

$$f(x,y)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{3}y^3-xy.$$

7. ادرس وجود وطبيعة النقاط الحدّيّة للدالّة الحقيقيّة المعطاة على $\mathbb{R}^2$

بـ: $f(x,y)=x^3+y^3,$

والمذعنة للقيد $x^2+y^2-1=0$.

8. ادرس وجود وطبيعة النقاط الحدّيّة للدالّة الحقيقيّة المعطاة على النحو:

$$f(x,y)=e^{3xy},$$

والمذعنة للقيد $x^3+y^3+x+y-4=0$.

9. علبة شكلها متوازي مستطيلاتي ومساحتها الجانبيّة (من دون القاعدة) تساوي $3h^2$. ما هي الأبعاد التي ينبغي أن تكون عليها العلبة لكي يكون لها أكبر حجم ممكن.

5.3 حلول

1) لدستور تايلور لاقرانج من الرتبة الثالثة عند الصفر الشكل:

$$f(x,y)=f(0,0)+x\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)+y\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)+$$
$$+\frac{1}{2!}\left(x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)\right)$$
$$+\frac{1}{3!}\left(h^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0)+3h^2k\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2}(0,0)+3hk^2\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(0,0)+k^3\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0,0)\right)+$$
$$+\frac{1}{4!}\left(x^4\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(\theta x,\theta y)+4x^3y\frac{\partial^4 f}{\partial y\partial x^3}(\theta x,\theta y)+6x^2y^2\frac{\partial^4 f}{\partial y^2\partial x^2}(\theta x,\theta y)+\right.$$
$$\left.+4xy^3\frac{\partial^4 f}{\partial x\partial y^3}(\theta x,\theta y)+y^4\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}(\theta x,\theta y)\right)$$

لدينا في حالة الدالّة f :

$$f(x,y)=ch(2x+3y);\quad f(0,0)=ch(0)=1,$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2sh(2x+3y);\quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=2sh(0)=0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=3sh(2x+3y);\quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=3sh(0)=0,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=4ch(2x+3y);\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=4ch(0)=4,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=9ch(2x+3y);\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)=9ch(0)=9,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=6ch(2x+3y);\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=6ch(0)=6,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,y)=8sh(2x+3y);\quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0)=8sh(0)=0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^3}(x,y)=27sh(2x+3y);\quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0,0)=27sh(0)=0,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2}(x,y)=12sh(2x+3y);\ \frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2}(0,0)=12sh(0)=0,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(x,y)=18sh(2x+3y);\ \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(0,0)=18sh(0)=0,$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(x,y)=16ch(2x+3y);\ \frac{\partial^4 f}{\partial y\partial x^3}(x,y)=24ch(2x+3y),$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial y^2\partial y^2}(x,y)=36ch(2x+3y);\ \frac{\partial^4 f}{\partial x\partial y^3}(x,y)=54ch(2x+3y),$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}(x,y)=81ch(2x+3y).$$

نجد بعد التعويض:

$$ch(2x+3y)=$$
$$=1+2x^2+6xy+\frac{9}{2}y^2+\left(\frac{2}{3}x^4+4x^3y+9x^2y^2+9xy^3+\frac{27}{8}y^4\right)ch(2\theta x+3\theta y)$$

اقتف أثرنا وعالج الحالة الثانية.

2) لدستور تايلور- يونـڤ من الرتبة الثالثة عند النقطة $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ الشكل:

$$f(x,y)=f\left(0,\frac{\pi}{2}\right)+x\frac{\partial f}{\partial x}\left(0,\frac{\pi}{2}\right)+y\frac{\partial f}{\partial y}\left(0,\frac{\pi}{2}\right)+$$
$$+\frac{1}{2!}\left(x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(0,\frac{\pi}{2}\right)+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(0,\frac{\pi}{2}\right)+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right)$$
$$+\frac{1}{3!}\begin{pmatrix} h^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\left(0,\frac{\pi}{2}\right)+3h^2k\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2}\left(0,\frac{\pi}{2}\right)+ \\ +3hk^2\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}\left(0,\frac{\pi}{2}\right)+k^3\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\end{pmatrix}+\circ\left\|\left(x,y-\frac{\pi}{2}\right)\right\|^3.$$

لدينا:

$$f(x,y)=\sin(2x+3y);\ \ f\left(0,\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2\cos(2x+3y);\ \frac{\partial f}{\partial x}\left(0,\frac{\pi}{2}\right)=2\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=3\cos(2x+3y);\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=3\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)=0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=-4\sin(2x+3y);\ \ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(0,\frac{\pi}{2}\right)=-4\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)=4,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=-9\sin(2x+3y);\ \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(0,\frac{\pi}{2}\right)=-9\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)=9,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=-6\sin(2x+3y);\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\left(0,\frac{\pi}{2}\right)=-6\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)=6,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,y)=-8\cos(2x+3y);\ \ \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\left(0,\frac{\pi}{2}\right)=-8\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)=0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^3}(x,y)=-27\cos(2x+3y);\ \ \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\left(0,\frac{\pi}{2}\right)=-27\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)=0,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2}(x,y)=-12\cos(2x+3y);\ \frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2}\left(0,\frac{\pi}{2}\right)=-12\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)=0,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(x,y)=-18\cos(2x+3y);\ \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(0,0)=-18\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)=0,$$

نجد بعد التعويض:

$$\sin(2x+3y)=-1+2x^2+3xy+\frac{9}{2}y^2+\circ\left(\left\|\left(x,y-\frac{\pi}{2}\right)\right\|^3\right).$$

افعل بالدالّة الثانية ما فعلناه بالأولى !!!

3) 1) لدينا:

$$f(x,y)=e^{1+\sin 2x-\cos 3y)};\quad f(0,0)=e^{0}=1,$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=(2\cos 2x)e^{1+\sin 2x-\cos 3y)};\ \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=2,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=(3\sin 3y)e^{1+\sin 2x-\cos 3y)};\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=(-4\sin 2x+4\cos^2 2x)e^{1+\sin 2x-\sin 3y};\ \ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=4,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=(9\sin 3y+9\sin^2 3y)e^{1+\sin 2x-\sin 3y};\ \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)=9,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=(6\cos 2x\sin 3y)e^{1+\sin 2x-\sin 3y};\ \ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=0.$$

وعليه:

$$e^{1+\sin 2x-\cos 3y}=1+2x+2x^2+\frac{9}{2}y^2+\circ\left(\left\|(x,y)\right\|^2\right).$$

وبالمثل، لدينا:

$$g(x,y)=Log(ch3x+sh2y);\ \ g(0,0)=Log1=0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{3sh3x}{ch3x+sh2y};\ \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{2ch2y}{ch3x+sh2y};\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=2,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=\frac{9+9ch3x\,sh2y}{(ch3x+sh2y)^2};\ \ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=9,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=\frac{-4+4ch3x\,sh2y}{(ch3x+sh2y)^2};\ \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)=-4,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=\frac{-6ch3x\,sh2y}{(ch3x+sh2y)^2};\ \ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=0.$$

وعليه:

$$Log(ch3x+sh2y)=2y+\frac{9}{2}x^2-2y^2+\circ\left(\left\|(x,y)\right\|^2\right).$$

2) التعويض المباشر يفضي إلى حالة عدم التعيين من النمط $\frac{0}{0}$. لرفعها نستعين بالحساب السابق لنحصل دونما عناء على:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{1+\sin 2x-\cos 3x}-1}{Log(ch3x+sh2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,x)-1}{g(x,x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x+\frac{13}{2}x^2+\circ(x^2)}{2x+\frac{5}{2}x^2+\circ(x^2)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2+\frac{13}{2}x+\circ(x)}{2+\frac{5}{2}x+\circ(x)}=1.$$

4) لنستهل الدراسة بحالة الدالّة f .

1) لدينا:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-2xy, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=3y^2-x^2-4y+1.$$

النقاط الحرجة حلول للجملة الجبريّة:

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=xy=0, & (*)\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=3y^2-x^2-4y+1=0. & (**)\end{cases}$$

تفضي المعادلة $(*)$ إلى أنّ $x=0$ أو $y=0$.

التعويض بـ $y=0$ في $(**)$ ينتج المعادلة $1-x^2=0$، التي تعطي بدورها، $x=1$ أو $x=-1$. أخيرا، يقود التعويض بـ $x=0$ في $(**)$ إلى المعادلة:

$$3y^2-4y+1=\left(y-\frac{1}{3}\right)(y-1)=0;$$

التي تقبل الجذرين $y=\frac{1}{3}$ **أو** $y=1$ **. بناء على هذا الحساب تكون النقاط المطلوبة أربع، هي:**

$$A(1,0),\ B(-1,0),\ C(0,1),\ D\left(0,\frac{1}{3}\right).$$

2) **لفحص طبيعة هذه النقاط الحرجة نحسب أوّلا:**

$$r=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=-2y,\ s=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=-2x,\ t=\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x,y)=6y-4.$$

وعليه، يأتي حسب قاعدة سيلفستر:

الطبيعة	s^2-rt	t	s	r	النقطة الحرجة
سرجيّة	4	-4	-2	0	A
سرجيّة	4	-4	2	0	B
سرجيّة	4	2	0	-2	C
ذروة	$-\frac{4}{3}$	-2	0	$-\frac{2}{3}$	D

لنعالج الآن حالة الدالّة g .

1) **لدينا توّا:**

$$\nabla g(x,y)=\begin{pmatrix}2x\\3y^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\iff (x,y)=(0,0).$$

يتبيّن هكذا أنّ g **تقبل نقطة حرجة واحدة، هي المبدأ** $(0,0)$.

2) **لا تسمح قاعدة سيلفستر بتحديد طبيعة هذه النقطة، إذ لدينا:**

$$r=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=2,\ s=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=0,\ t=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)=0,$$
$$\Delta=s^2-rt=0.$$

نسلك طريقا مغايرا، فنلاحظ أنّ:

$$f(0,y)=y^3,$$

وهذه العبارة تغيّر إشارتها مع y المتواجد في جوار الصفر. نستنتج أنّ f لا تقبل نقطة حديّة عند $(0,0)$.

5) $1)$ **لدينا:**

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x+y+\frac{2\lambda^2 x}{(1+\lambda^2x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x+2y+\frac{2y}{(1+\lambda^2x^2+y^2)^2}.$$

وعليه، يأتي توّا أنّ:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

إلى جانب هذا نحسب كالمعتاد:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=2+\frac{2\lambda^2}{(1+\lambda^2x^2+y^2)^2}-\frac{8\lambda^4x^2}{(1+\lambda^2x^2+y^2)^3},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=2+\frac{2}{(1+\lambda^2x^2+y^2)^2}-\frac{8y^2}{(1+\lambda^2x^2+y^2)^3},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=1-\frac{8\lambda^2xy}{(1+\lambda^2x^2+y^2)^3}.$$

وبالتالي:

$$r=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=2+2\lambda^2;\ \ t=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)=4;\ \ s=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=1;$$
$$\Delta=s^2-rt=-7-8\lambda^2<0.$$

نستنتج أنّ الدالّة f تقبل قيمة صغرى عند النقطة $(0,0)$. .

2) الدالّة f لا يمكنها أن تقبل نقاط حدّية أخرى من دون النقطة $(0,0)$. لأنّ مشتقّيها الجزئيّين من الرتبة الأولى موجودان على كلّ $\mathbb{R}^2$ ولا ينعدمان خارج $(0,0)$.

6) تعطي الجملة الجبريّة:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x^2 - y = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = y^2 - x = 0, \end{cases}$$

نقطتين حرجتين للدالّة f ، هما $(1,1)$ و $(0,0)$. من جهة أخرى، نحسب:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2x, \ \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2y, \ \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -1,$$

$$\Delta(x,y) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\right).\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\right) = 1 - 4xy.$$

عند النقطة $(0,0)$ لدينا:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0; \ \Delta = 1,$$

وعليه، النقطة $(0,0)$ سرجيّة. وعند النقطة $(1,1)$ لدينا:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = 2 \ \Delta = -3,$$

وعليه، فالنقطة $(1,1)$ حدّية صغرى.

7) لدينا حسب الإطار الذي وصفنا للنقاط الحدّة المقيّدة:

$$g(x,y) = x^2 + y^2 - 1; \ \nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 \\ 3y^2 \end{pmatrix}; \ \ \nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}.$$

توجد النقاط الحدّية المقيّدة ضمن النقاط التي يتحقّق بها الارتباط الخطّي للتدرّجين الحاضرين، أي أنّها من بين حلول الجملة:

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} \nabla f(x,y) \\ \nabla g(x,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3x^2 & 2x \\ 3y^2 & 2y \end{vmatrix} = 6xy \begin{vmatrix} x & 1 \\ y & 1 \end{vmatrix} = 6xy(x-y) = 0. \\ x^2+y^2-1=0. \end{cases}$$

هذه الحلول هي:

$$A(0,1);\ B(0,-1);\ C(1,0);\ D(-1,0);\ E\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right);\ F\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right);$$

وعندها تأخذ الدالّة f القيم:

$$f(A)=f(C)=1;\quad f(B)=f(D)=-1;$$
$$f(E)=\frac{\sqrt{2}}{2};\quad f(F)=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

نستخلص على الفور أنّ النقطتين E و F ليستا حديّتين، في حين أنّ A و C حديّتان عظميان و B و D حديّتان صغريان.

يمكن بخصوص الشقّ الأخير من هذه الخلاصة الاستنجاد بالشروط اللاقراجيّة من الرتبة الثانية، فنحسب:

$$\mathscr{L}(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y)=x^3+y^3-\lambda x^2-\lambda y^2+\lambda;$$
$$\frac{\partial^2\mathscr{L}}{\partial x^2}(x,y,\lambda)=6x-2\lambda;\ \frac{\partial^2\mathscr{L}}{\partial y^2}(x,y,\lambda)=6y-2\lambda;$$
$$\frac{\partial^2\mathscr{L}}{\partial y\partial x}(x,y,\lambda)=0;\ \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=2x;\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=2y.$$
$$\lambda_A=\lambda_C=\frac{3}{2};\ \lambda_B=\lambda_D=-\frac{3}{2};$$

$$\Delta_A(0,1,\lambda_A)=\Delta_A\left(0,1,\frac{3}{2}\right)=\Delta_C\left(1,0,\frac{3}{2}\right)=-12<0;$$
$$\Delta_B(0,-1,\lambda_B)=\Delta_B\left(0,-1,-\frac{3}{2}\right)=\Delta_D\left(-1,0,-\frac{3}{2}\right)=12>0.$$

إنّه ضمان للنتيجة المعلنة.

8) بعد وضع:

$$g(x,y)=x^3+y^3+x+y-4,$$

نبحث عن النقاط المرشّحة ضمن حلول الجملة (التي بدأنا نألفها):

$$\begin{cases}\begin{vmatrix}\nabla f(x,y)\\ \nabla g(x,y)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3ye^{3xy} & 3x^2+1\\ 3xe^{xy} & 3y^2+1\end{vmatrix}=3e^{3xy}(3y^3+y-3x^3-x)=0.\\ x^3+y^3+x+y-4=0.\end{cases}$$

أي:

$$\begin{cases}(3y^3+y-3x^3-x)=(y-x)(3y^2+3xy+3x^2+1)=0.\\ x^3+y^3+x+y-4=0.\end{cases}$$

تنعدم المعادلة الأولى من هذه الجملة من أجل $x=y$، ويمكّن التعويض بهذه النتيجة المعادلة الثانية من أن تصبح:

$$x^3+x-2=(x-1)(x^2+x+2)=0,$$

وهو ما يجعلها تقبل الجذر الوحيد $x=1$. نستخلص أنّ النقطة الحدّية المقيّدة المحتملة الوحيدة هي $A(1,1)$. لتبيان طبيعتها نحسب :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(1,1)=\frac{\partial g}{\partial y}(1,1)=4;\ \lambda_A=\frac{3e^3}{4};$$

$$\mathscr{L}(x,y,\lambda)= f(x,y)-\lambda g(x,y)=e^{3xy}-\lambda x^3-\lambda y^3-\lambda x-\lambda y+4\lambda;$$
$$\frac{\partial^2\mathscr{L}}{\partial x^2}(x,y,\lambda)=9y^2e^{3xy}-6\lambda x;\ \frac{\partial^2\mathscr{L}}{\partial y^2}(x,y,\lambda)=9x^2e^{3xy}-6\lambda y;$$
$$\frac{\partial^2\mathscr{L}}{\partial y\partial x}(x,y,\lambda)=3e^{3xy}+9xye^{3xy};$$
$$\Delta\left(1,1,\frac{3}{4}e^3\right)=16\left(9e^3-\frac{9}{2}e^3\right)-384e^3+16\left(9e^3-\frac{9}{2}e^3\right)$$
$$=-240e^3<0.$$

نرى هكذا أنّ نقطتنا حدّية عظمى.

9) نذكّر بأنّه إذا كانت x و y و z أطوال العلبة المعنية كان حجمها على النحو:

$$f(x,y,z)=xyz.$$

المطلوب البحث عن النقطة التي تأخذ عندها الدالّة f قيمتها العظمى تحت القيد الموضوع والقاضي بأنّ المساحة الجانبيّة، دون القاعدة، تحقّق:

$$2xz+2yz+xy=3h^2, \qquad (*)$$

علما بأنّ الأطوال موجبة تماما. نقوم باستخراج المتغيّر z من (*) فنجد:

$$z=\frac{1}{2}\frac{3h^2-xy}{x+y}. \qquad (**)$$

يمكن الآن أن نردّ المسألة الآن إلى البحث عن النقطة الحدية العظمى للدالّة:

$$g(x,y)= f\left(x,y,\frac{1}{2}\frac{3h^2-xy}{x+y}\right)=\frac{1}{2}\frac{3h^2xy-x^2y^2}{x+y},\ (x,y)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2.$$

نتّبع المنهج الموصوف في قاعدة سيلفستر فنحلّ في البداية الجملة الموالية:

$$(S)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)=\dfrac{1}{2}\dfrac{-x^2y^2+3h^2y^2-2xy^3}{(x+y)^2}=0, \\ \\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y)=\dfrac{1}{2}\dfrac{-x^2y^2+3h^2x^2-2yx^3}{(x+y)^2}=0. \end{cases}$$

لدينا بشأنها:

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2+3h^2-2xy=0, \\ y^2-3h^2+2yx=0. \end{cases}$$

بجمع هاتين المعادلتين طرفا طرفا نجد:

$$y^2-x^2=0;$$

وهو ما يفضي إلى أنّ $y=x$. تسمح عودة سريعة هذه النتيجة إلى إحدى المعادلتين بالحصول على $y=x=h$. وفضلا عن هذا نحسب:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y)=\frac{-y^4-3h^2y^2}{(x+y)^3};\ \ \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(h,h)=-\frac{1}{2}h<0;$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y)=\frac{-x^4-3h^2x^2}{(x+y)^3};\ \ \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(h,h)=-\frac{1}{2}h;$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{-yx^3-xy^3+3h^2xy-3y^2x^2}{(x+y)^3};\ \ \frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}(h,h)=-\frac{1}{4}h.$$

$$\Delta=\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}(h,h)\right)^2-\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(h,h)\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(h,h)=-\frac{3h^2}{16}<0.$$

نستخلص أنّ الدالّة g تدرك قيمتها العظمى عند (h,h) . وعليه، فإنّ الدالّة f تدرك قيمتها العظمى عند $\left(h,h,\frac{h}{2}\right)$. الحجم المقصود هو:

$$f\left(h,h,\frac{h}{2}\right)=\frac{h^3}{2}.$$

6.3 تمارين للبحث

1) 1) اكتب دستور تايلور من الرتبة الثالثة عند النقطة $(1,1)$ مع باقي لاقرانج للدوال:

$$f(x,y)=x^2y;\ \ g(x,y)=e^x\cos y;\ \ h(x,y)=\frac{x-y}{x+y}.$$

2) اعط نشر تايلور ـ يونـڤ من الرتبة الثالثة عند النقاط المرفقة بالدوال التالية:

أ. $f(x,y)=x^2+2xy+3y^2-6x-2y-4;\ \ (-2,1),$

ب. $g(x,y)=e^{x+y};\ \ (-1,1),$

ج. $h(x,y)=\sin x\sin y;\ \ (0,0),$

د. $j(x,y)=Log(x^2+y^2);\ \ (1,1),$

2) اعط نشر ماك لوران ـ يونـڤ من الرتبة الثالثة لكلّ واحدة من هذه الدوال:

أ. $f(x,y)=\dfrac{1}{1-x-xy+xy};$

ب. $f(x,y)=\sin(x^2+y^2);$

ج. $f(x,y)=Log\left(\dfrac{1-x-y+xy}{1-x-y}\right);$

د. $f(x,y)=Log(1-x)Log(1-y);$

ه. $f(x,y)=\dfrac{chx}{chy}.$

3) أ. هات النشر التايلوري من الرتبة الثانية مع باقي لاقـرانج في جوار النقطة $(0,0)$ للدالّتين الحقيقيّتين f و g المعطاتين على النحو:

$$f(x,y)=xchy; \quad g(x,y)=e^{x}Log(1+y).$$

ب. هل يمكن للنقطة $(0,0)$ أن تشكّل نقطة حدّية لـ f و g ؟

4) 1) اكتب دستور تايلور ـ يونـڤ حتى الرتبة الثانية في جوار النقطة $(0,0)$ للدوال:

$$a)\ f(x,y)=Log(1+x^2+y^2),\ b)\ f(x,y)=shx\,shy,$$

$$c)\ f(x,y)=\frac{1}{(1-x)(1+y)},\ d)\ f(x,y)=e^{x+y}.$$

5) هات نشر تايلور ـ يونـڤ من الرتبة الثالثة في جوار النقطة $(0,0)$ للدالّة :

$$f(x,y)=\sin x\cos y,$$

أ. معتبرا f كدالة لمتغيّرين؛

ب. معتبرا f كجداء لدالّتين لمتغيّر واحد.

6) لتكن الدالّة الحقيقيّة f المعطاة على $\mathbb{R}^2$ بـ:

$$f(x,y)=(x+y)e^{-x^2-y^2}$$

1) اثبت أنّ f من الصنف $\mathscr{C}^\infty$ على $\mathbb{R}^2$.

2) اثبت أنّ نقاط f المستقرّة هما $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ و $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$.

3) عيّن طبيعتيهما.

7) لمستطيل طول بـ 24 سم وعرض بـ 10 سم.

1. احسب القيمة التقريبيّة لطول قطره بعدما يمدّد طوله بـ 4 مم وينتقص من عرضه 1 مم.

2. قارن هذه القيمة التقريبيّة بالقيمة الحقيقيّة الدقيقة.

8) عيّن النقاط الحرجة للدوال الحقيقيّة:

$$f(x,y)=2xy-3x^2-2y^2+10;$$
$$g(x,y)=4(x-y)-x^2-y^2;$$
$$h(x,y)=2x^3+xy^2+5x^2+y^2;$$

ثمّ حدّد طبيعة كلّ واحدة منها.

9) ادرس القيم الحديّة للدوال التالية:

$$f(x,y)=x^2-xy+y^2-3x-2y+1;$$
$$f(x,y)=x^3+2xy+y^2-1;$$
$$f(x,y)=x^3+3xy^2-15x-12y;$$
$$f(x,y)=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2;$$
$$f(x,y)=\frac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)}.$$

10) ادرس القيم الحديّة للدوال التالية:

$$f_1(x,y)=x^2+y^4;\ f_2(x,y)=-x^2-y^2;\ f_3(x,y)=x^2y^3(1+3x+2y);$$
$$f_4(x,y)=-x^2+y^2+y^3;\ \ f_5(x,y)=x^2+y^2-4x+6y+25;$$
$$f_6(x,y)=x^4+y^4-4(x-y)^2;\ f_7(x,y)=\frac{x^2-1}{1+x^2+y^2};$$
$$f_9(x,y)=x^2+y^2+xy+\frac{1}{x}+\frac{1}{y};\ f_8(x,y)=\frac{x+2y-3}{1+x^2+y^2};$$

$$f_{10}(x,y)=xy^2(7-x^2-y);\quad f_{11}(x,y)=e^{\frac{x}{2}}(x+y^2).$$

11) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقيّ α وجود وطبيعة نقاط الدوال التالية الحرجة:

$$f(x,y)=x^3+3xy^2-\alpha x-6y,$$

$$g(x,y)=xy(\alpha-x-y),$$

$$h(x,y)=(2\alpha x-x^2)(2\alpha y-y^2).$$

12) هل للدوال الحقيقيّة:

$$f(x,y)=(y-x)^2(1-x^2-y^2),$$

$$g(x,y)=(y-x^2)(y-2x^2),$$

$$h(x,y,z)=x^2y^2+(x^2-y^2)z-4z,$$

نقاط حدّية؟ إن نعم، قم عندئذ بتعيين طبيعتها.

13) ليكن α وسيطا حقيقيّا. نعتبر الدالّة الحقيقيّة f المعطاة على البلاطة $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ بـ:

$$f(x,y)=\sin^2 x+\sin^2 y-\alpha(x+y).$$

1) عين نقاط f الحرجة.

2) ادرس طبيعة كلّ واحدة منها.

14) ادرس وجود وطبيعة النقاط الحديّة للدوال التالية:

$$a(x,y)=x^2+y^2+2x+4y+10;$$

$$b(x,y)=x^3+y^3-3xy;$$
$$c(x,y)=x^3+y^3-3x-12y+20;$$
$$d(x,y)=x^4+y^4-6(x^2+y^2)+8xy;$$
$$e(x,y)=\sin^2 x\cos y+\sin^2 y\cos x,\ \ 0\le x<\pi;\ 0\le y<\pi.$$

15) **ليكن λ وسيطا حقيقيّا؛ نرمز بـ f_λ للدالّة الحقيقيّة المعرّفة على $\mathbb{R}^2$ بـ:**

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \ f_\lambda(x,y)=x^4+y^4-x^2-2\lambda xy-y^2.$$

1) **برهن أنّه لكي تقبل الدالّة f_λ قيمة قصوى عند نقطة (a,b) يلزم ويكفي أن تقبل الدالّة $f_{-\lambda}$ قيمة قصوى عند النقطة $(a,-b)$.**

2) **اكتب جملة من معادلات تسمح بتعيين نقاط f_λ الحرجة ثمّ قم بتحديد العدد الأقصى لهذه النقاط الحديّة.**

3) **نضع فيما يلي:**

$$s^2-rt=\Delta.\ \frac{\partial^2 f_\lambda}{\partial y^2}=t;\quad \frac{\partial^2 f_\lambda}{\partial x\partial y}=s;\quad \frac{\partial^2 f_\lambda}{\partial x^2}=r;$$

احسب كلّ واحد من هذه المقادير عند كلّ نقطة من $\mathbb{R}^2$.

4) **اثبت أنّه أيّا كان الوسيط λ فإنّ النقطة $M_0=(0,0)$ حرجة للدالّة f_λ ، ثمّ حدّد ما إذا لدينا عندها نقطة حدّية صغرى أم عظمى.**

5) **نهتمّ فيما يلي بحالة الوسيط $0\le\lambda$ ونقاط f_λ الحرجة المختلفة عن الصفر.**

أ. اثبت أنّ f_λ نقطتين حرجتين M_1 و M_2 على المستقيم ذي المعادلة $y=x$ والمبتور صفره M_0.

ب. عيّن طبيعة كلّ واحد منهما.

ج. اثبت أنّ الدالّة f_λ لا تقبل سوى ثلاثة نقاط حرجة هي M_0 وM_1 وM_2 في الحالة $\lambda \geq 1$.

د. نعتبر الآن الحالة $0 \leq \lambda < 1$ ولا نهتمّ سوى بالنقاط الحرجة M المختلفة عن M_0 وM_1 وM_2.

اثبت أنّ f_λ تقبل نقطتين حرجتين M_3 وM_4 على المستقيم ذي المعادلة $y=-x$ ثمّ حدّد طبيعة كلّ منهما في الحالات:

$$\alpha)\ \frac{1}{2} < \lambda < 1;\quad \beta)\ 0 \leq \lambda < \frac{1}{2};\quad \delta)\ \lambda = \frac{1}{2}.$$

16) ادرس النقاط الحدّية للدالّة $f(x,y) = x^2 + y^2$ على القطع الزائد:

$$x^2 + 8xy + 7y^2 - 225 = 0.$$

دليل المصطلحات

انتهجنا إرجاع القارئ إلى الصفحة التي يظهر فيه المصطلح المذكور للمرّة الأولى.

Homogène	177	متجانسة
Compact	40	متراص
Successive	49	متعاقبة
Variable	13	متغيّر
Convergente	31	متقاربة
Locale	43	محلّيّة
Axe	17	محور
Périmètre	7	محيط
Composante	19	مركّبة
Centre	26	مركز
Elasticité	9	مرونة
Aire	7	مساحة
Stable	101	مستقرّة
Niveau (ligne de …)	16	مستوى (خطّ ...)
Plan	15	مستوي
Droite	15	مستقيم
Dérivées partielles	9	مشتقّات جزئيّة
Dérivées partielles mixtes	120	مشتقّات جزئيّة مزدوجة
Matrice jacobienne	153	مصفوفة يعقوبيّة
Différentiable	130	مفاضلة (قابلة لـ ...)
Restriction	19	مقصور
Arrivée	18	مستقر

دليل الرياضياتيّين المذكورين

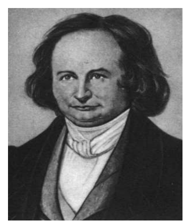
عمدنا في وضع هذا الدليل وقصد الاستئناس، إلى الإتيان بصور الرياضيّاتيّين وتمّ إرجاع القارئ إلى أوّل صفحة ذكر فيها العالم.


كليرو (8)


أولر (8)


كوندورسيه (8)


لوجاندر (9)


جاكوبي (9)


فوريي (9)


شوارز (9)


بيانو (10)

الصورة غير متوفرة

إقليدس (25)


كوشي (38)

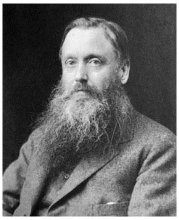

بناخ (39)


بيكار (40)

بولزانو (40)

فيرشتراس (40)

هاين (71)



يونـڤ (75)

هولدر (76)

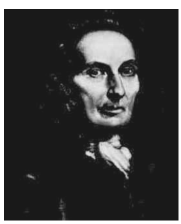
مينكوفسكي (76)

ريمان (79)

دو لوبيطال (117)

لابلاس (162)

ماك لوران (182)



تايلور (241)

لاڤرانج (243)

سيلفستر (253)

مراجع

1. م. حازي : الطلع النضيد للطالب والمعيد، دار القصبة للنشر، 2010.
2. م. حـازي: الفـالج المقـروض في الامتحانـات والفـروض، الجـزء الثـاني، ديوان المطبوعات الجامعيّة، 1999.
3. J. M.Arnaudies, H.Frayssé: Cours de mathématiques 2, Analyse, Dunod-Université; 1988.
4. C. Baba-Hamed, K. Ben Habib : Analyse 2 : Rappels de cours et Exercices avec solutions, O.P.U; 1993.
5. M.Boukra, A.Djadane, D.E.Mejdadi, B.K.Sadallah : Analyse mathématique, fonctions d'une variable réelle, volume 2, OPU; 1994.
6. R. Couty, J.Ezra: Analyse, tome2, Armand Collin; 1967.
7. C. Deschamps, A.Warusfel: mathématiques 1re année; Dunod; 1999.
8. J. Dixmier: Cours de mathématiques du premier cycle, Gauthier-Villars; 1976 .
9. M.Hazi: S.E.M 300 par ses Examens, tome 2, O.P.U; 2004.
10. Paul Broussous, Fonctions de Plusieurs variables, Parcours renforcés, première année, 2009 /2010, Université de Poitier.

الفهرس

تصدير

الفصل الثاني : الاشتقاق الجزئيّ والقابليّة للمفاضلة

الفصل الثالث : النشر التايلوريّ والنقاط الحدّية

تمّ إخـــرَاج وطبــع بـ :

دار الخلدونية للطباعة والنشر والتوزيع

05، شارع محمد مسعودي القبة القديمة-الجزائر

الهواتف: 021.68.86.49-021.68.86.48-05.42.72.40.22

البريد الإلكتروني :khaldou99_ed@yahoo.fr

هذا الكتاب ...

... مؤلّفه من مواليد فجر الثورة التحريريّة الكبرى المباركة بسمّاش، إحدى قرى أعالي جرجرة الشماء؛

خرّيج المدرسة العليا للأساتذة القبّة، وجامعة هواري بومدين للعلوم والتكنولوجيا، وكذا جامعتي باريس السادسة والحادية عشرة (مركز أورساي)؛

أستاذ مشارك بالمدارس الوطنيّة: للأشغال العموميّة بالقبّة والمتعدّدة التقنيات بالحرّاش والعليا للأساتذة بالأغواط، وكذا كلّيّة المجتمع برفحاء) المملكة العربيّة السعوديّة).

مدير سابق للدراسات والتداريب بالمدرسة العليا للأساتذة بالقبّة، رئيس سابق لقسم الرياضيّات بالمدرسة العليا للأساتذة بالقبّة، ولا يزال بها مدرّسا.

أصدرت له كتب عديدة تأليفا وترجمة،

... هو الشرفة التي يطلّ منها على الحساب التفاضلي، أحد أبرز بطون التحليل الرياضيّاتيّ. سقنا لك فيه من المفاهيم ما يهمّ المرحلة الأولى الجامعيّة. فصّلنا لك فيه على الوجه الأدقّ الخصائص الأساسيّة للدوال ذات المتغيّرات الحقيقيّة المتعدّدة من حيث نهاياتها واستمرارها وقابليتها للمفاضلة؛ وعرجنا على الدوال الضمنية والنشور التايلوريّة والنقاط الحدّية، الطليقة منها والمقيّدة.

جلبنا إليه ما رأيناه ضروريّا من التعاريف والمبرهنات والنتائج ونثرنا فيه من الأمثلة ما هو موضّح ومكمّل؛ ثُمّ عمدنا إلى سلسلة من التمارين قدّها مئة وثلاثة وستّون وحدة، بين محلولة ومتروك حلّها للمستخدم، يختبر بها فهمه ويسبر هضمه ويزن محصوله !

يوفّر ذلك لكلّ واحد من الجمهور العريض المستهدف، بكافّة أصنافه المختلفة ومشاربه المتعدّدة، أينما كان موقعه في الجامعات أو المدارس العليا، معينا يغرف منه بقدر رغبته وقدرته وتوجّهه.

المجلس الأعلى للغة العربية

شارع فرنكلين روزفلت، ، الجزائر

الهاتف: 25/ 213 021.23.07.24 الفاكس: 213 021.23.07.07

ص.ب: 575 الجزائر - ديدوش مراد

www.csla.dz

البريد الالكتروني: manchourat.csla@gmail.com

ISBN : 978-9947-821-92-3