Chapitre III: Réponses temporelles des systèmes linéaires (Systèmes du premier et du second ordre)

III.1 MODELISATION

Il existe un nombre important de systèmes réels (Circuits RC, RLC, système Masse Ressort, …etc) qui peuvent être décrits par des simples équations différentielles du premier et du second ordre. La complexité d'un système est en réalité est dû à la multitude de sous-systèmes d'ordre inférieur ou égal à 2 qui le composent. Par exemple un système de troisième ordre peut être décomposé, en trois sous-systèmes du premier ordre ou en un système du premier ordre et un système du second ordre. Il est donc très important de comprendre et de maitriser les comportements et les caractéristiques des systèmes du premier et du second ordre.

III.2 LES DIFFERENTES ENTREES CLASSIQUES

III.2.1 L'échelon

C'est l'entrée la plus utilisée de toutes. Elle correspond à un changement brusque de consigne. Cette fonction est définie par :

$$f(t) = a \qquad \forall t > 0 \qquad \text{et} \qquad f(t) = 0 \qquad \forall t \leq 0 \tag{III.1}$$

Sa transformée de Laplace est :

$$F(p) = \frac{a}{p}$$

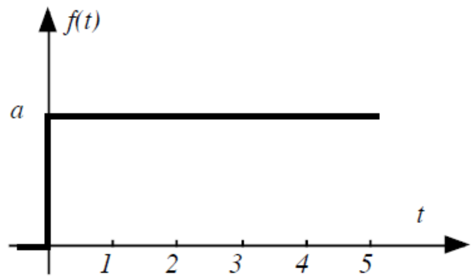


Figure III.1: La fonction échelon

On appelle **échelon unitaire** la fonction dont la TL est 1/p (a = 1). On le note souvent u(t). On appelle **réponse indicielle** la réponse à l'échelon unité.

III.2.2 La rampe

La rampe de pente à est la primitive de l'échelon de hauteur a. Elle est définie par :

$$\forall t > 0, f(t) = at \qquad \forall t \leq 0, f(t) = 0 \tag{III.2}$$

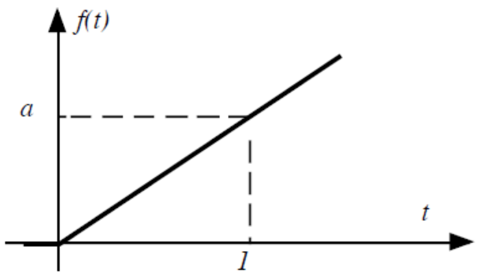


Figure III.2: La fonction rampe de pente a

Sa transformée de Laplace est définie par :

$$F(p) = \frac{a}{p^2}$$

On peut définir également la rampe unitaire : la rampe de pente 1.

III.2.3 L'impulsion

L'impulsion unité est, dans l'espace des distributions, la **dérivée de l'échelon unitaire**. On l'appelle aussi **impulsion de Dirac**. On la note généralement δ(t). Sa transformée de Laplace est TL[δ(t)] = 1.

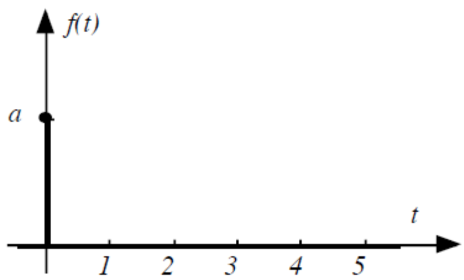


Figure III.3: La fonction impulsion de Dirac de poids a

III.3 SYSTEME DU PREMIER ORDRE

Un système est dit du premier ordre s'il est régi par une équation différentielle de premier ordre de la forme :

$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = Ke(t) \qquad \text{(III.3)}$$

Avec : ***e(t)*** et ***s(t)*** représentent respectivement l'entrée et la sortie du système

En supposant que les conditions initiales soient nulles (**CI=0**), il est possible de calculer la fonction de transfert G(p) du système en appliquant la transformée de Laplace aux deux membres de l'équation (III.1):

$$\tau[pS(p) - s(0)] + S(p) = KE(P)$$

$$S(p)[\tau p + 1] = KE(P)$$

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \tau p} \qquad \text{(III.4)}$$

$$G(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$$

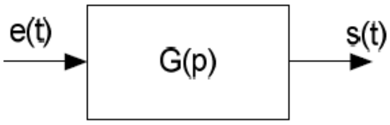
Les paramètres de la fonction de transfert ou du système sont alors :

K : Gain statique

τ: Constante de temps

III.3.1 Réponse Impulsionnelle

La réponse impulsionnelle d'un système est sa réponse à l'impulsion de Dirac δ(t).



Nous avons dans ce cas-là e(t)=δ(t), et puisque la transformée de Laplace de δ(t) vaut 1, le signal de sortie s'exprime comme suit

$$S(p) = E(p)G(p) = G(p)$$

$$S(p) = \frac{K}{1 + \tau p} \qquad \text{(III. 3)}$$

La sortie temporelle correspondante ***s(t)*** s'écrit :

$$s(t) = TL^{-1}\left\{\frac{K}{1 + \tau p}\right\} = TL^{-1}\left\{\frac{K}{\tau} \times \frac{K}{p + \frac{1}{\tau}}\right\}$$

$$s(t) = \frac{K}{\tau} TL^{-1}\left\{\frac{K}{p + \frac{1}{\tau}}\right\}$$

$$s(t) = \frac{K}{\tau} \times \mathrm{e}^{\left(-\frac{t}{\tau}\right)} \quad pour\ t \geq 0 \qquad \text{(III. 4)}$$

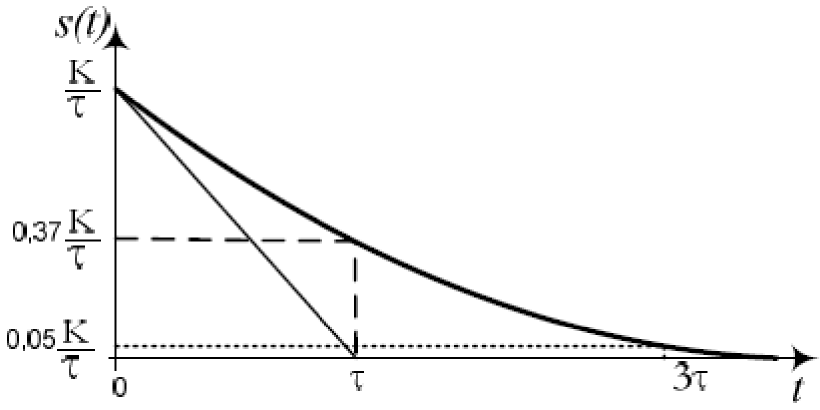


Figure III.4: Réponse impulsionnelle d'un système du premier ordre

Les points particuliers de cette réponse sont donnés dans le tableau ci-dessous :

- **Point de départ** :

$$s(0) = \lim_{p \to +\infty} pS(p) = \frac{K}{\tau} \quad [\textit{théorème de la valeur initiale}]$$

- **Point d'arrivé** :

$$\lim_{t \to +\infty} s(t) = \lim_{p \to 0} pS(p) = 0 \quad [\textit{théorème de la valeur finale}]$$

t	0	τ	3τ	+∞
s(t)	$\frac{K}{\tau}$	$0{,}37\frac{K}{\tau}$	$0{,}05\frac{K}{\tau}$	0
ds(t)/dt	$-\frac{K}{\tau^2}$	$-0{,}37\frac{K}{\tau^2}$	$-0{,}05\frac{K}{\tau^2}$	0

III.3.2 Réponse Indicielle

La réponse indicielle d'un système est sa réponse quand un échelon d'amplitude E_0 est appliqué à son entrée. Dans ce cas-là

$$S(p) = \frac{E_0}{p} \times G(p) \qquad \left(car\ la\ TL\{E_0 u(t)\} = \frac{E_0}{p}\right)$$

$$S(p) = \frac{E_0}{p} \times \frac{K}{1+\tau p} = \frac{\frac{E_0 K}{\tau}}{p\left(p+\frac{1}{\tau}\right)}$$

Nous avons deux pôles (*p=**0*** et *p=**-1/τ***), alors S(p) s'écrit :

$$S(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+\frac{1}{\tau}} = \frac{KE_0}{p} - \frac{KE_0}{p+\frac{1}{\tau}}$$

La réponse indicielle temporelle a comme expression :

$$s(t) = KE_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \; pour \; t \geq 0 \qquad (III.5)$$

La courbe correspondante est donnée par la figure ci-dessous

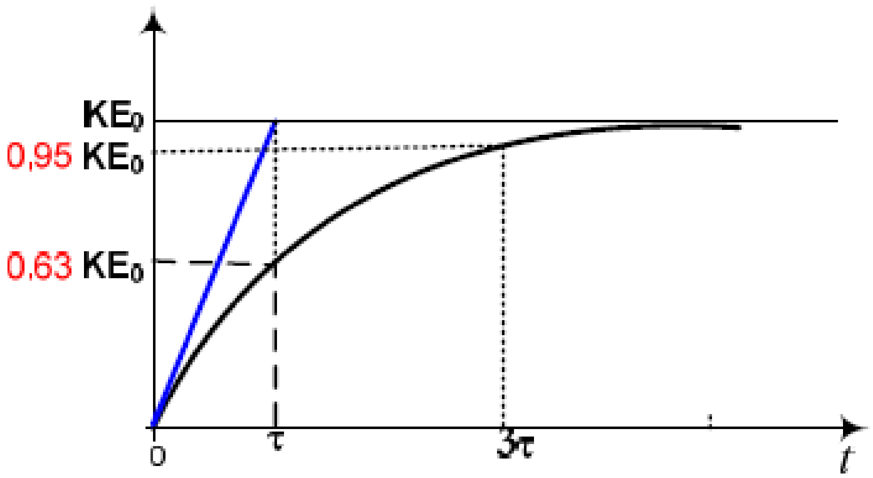


Figure III.2: Réponse indicielle d'un système du premier ordre

Les points particuliers de cette réponse sont donnés dans le tableau ci-dessous :

Point de depart

$$s(0) = \lim_{p\to+\infty} pS(p) = 0 \qquad [théorème\ de\ la\ valeur\ initiale]$$

Point d'arrivé

$$\lim_{t\to+\infty} s(t) = \lim_{p\to 0} pS(p) = KE_0 \qquad [théorème\ de\ la\ valeur\ finale]$$

t	0	τ	3τ	4τ	+∞
s(t)	0	$0{,}63KE_0$	$0{,}95KE_0$	$0{,}98KE_0$	KE_0
ds(t)/dt	$\frac{KE_0}{\tau}$	-	-		0

- Le temps de réponse à 5% vaut **3τ** ***(tr5%=3τ)***
- Le signal de sortie atteint **63%** de la valeur finale en **τ** unités de temps
- La dérivée à *t= 0* vaut :

$$\frac{KE_0}{\tau}$$

$$\frac{ds(t)}{dt} = \frac{KE_0}{\tau}\left(e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \; pour \; t \geq 0 \qquad (III.6)$$

- Il est important de remarquer que plus τ est faible, plus le système est rapide

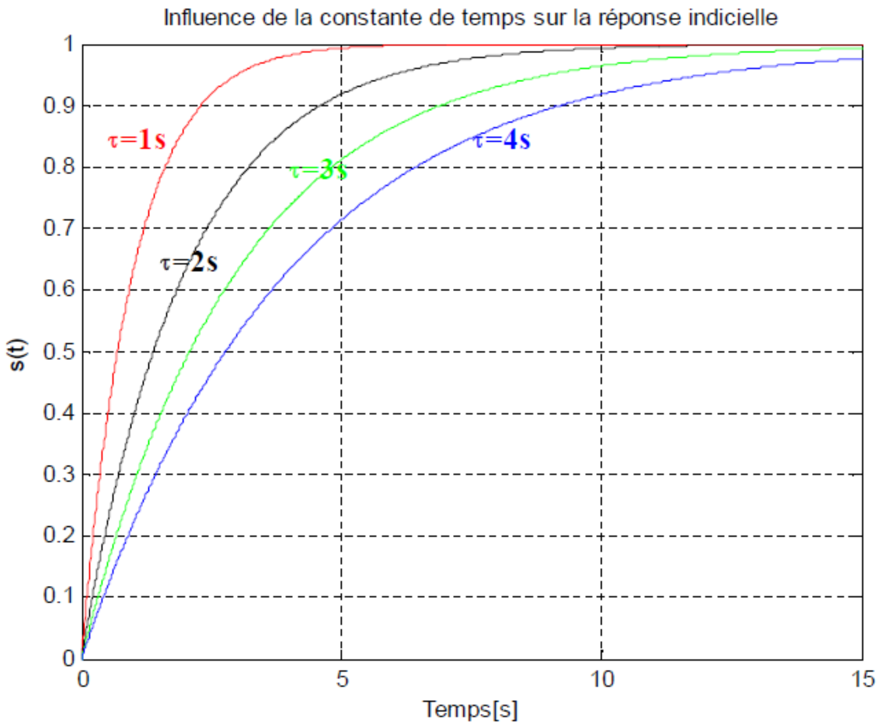


Figure III.3: Influence de la constante de temps (τ) sur la réponse d'un système du premier ordre

III.3.3 Réponse à une rampe

Supposons que le système du premier ordre soit excité par un signal de type rampe :

e(t)= B.r(t)=B.t.u(t). La transformée de Laplace de ce signal d'entée est :

$$E(p) = \frac{B}{p^2}$$

La sortie du système a pour expression :

$$S(p) = \frac{B}{p^2} \times \frac{K}{1+\tau p} = \frac{\frac{BK}{\tau}}{p^2\left(p+\frac{1}{\tau}\right)}$$

$$S(p) = \frac{A_1}{p} + \frac{A_1}{p^2} + \frac{C}{p+\frac{1}{\tau}} = \frac{-\tau BK}{p} + \frac{BK}{p^2} + \frac{\tau BK}{p+\frac{1}{\tau}}$$

Le signal temporel correspondant s'écrit :

$$S(p) = BK\left(t - \tau + \tau e^{\frac{-t}{\tau}}\right) \; pour \; t > 0 \qquad \text{(III.7)}$$

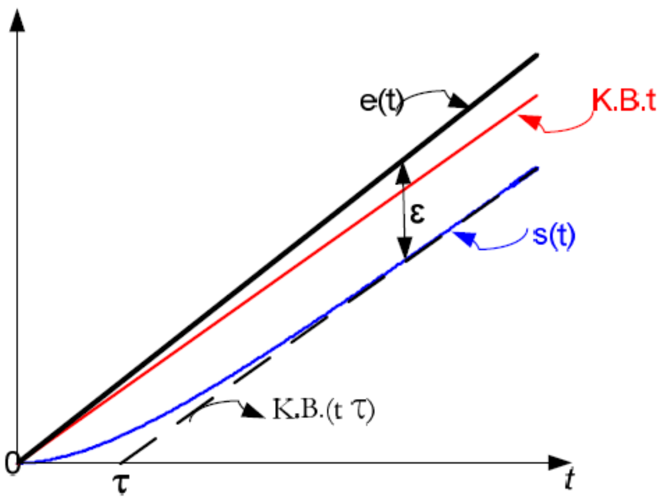


Figure III.4: Réponse à une rampe d'un système du premier ordre

Les caractéristiques de cette réponse sont :

- Le régime permanent est a(t) = B*K(t−τ).
- Si K = 1, la sortie s(t) suit l'entrée avec un retard constant (τ). La différence entre la sortie et l'entrée est appelée erreur de traînage
- Si K ≠ 1, s(t) et e(t) n'ont pas la même pente. Ils divergent.

III.4 SYSTEME DU SECOND ORDRE

Un système est dit du second ordre s'il est régi par une équation différentielle de second ordre de la forme :

$$\frac{1}{\omega_0^2}\frac{d^2s(t)}{dt^2} + \frac{2\zeta}{\omega_0}\frac{ds(t)}{dt} + s(t) = Ke(t) \qquad (III.8)$$

En supposant que les conditions initiales soient nulles, il est possible de calculer la fonction de transfert G(p) du système en appliquant la transformée de Laplace aux deux membres de l'équation (III.8):

$$\frac{1}{\omega_0^2}[p^2S(p) - ps(0) - \dot{s(0)}] + \frac{2\zeta}{\omega_0}[pS(p) - s(0)] + S(p) = KE(P)$$

$$\left(\frac{1}{\omega_0^2}p^2 + \frac{2\zeta}{\omega_0}p + 1\right)S(p) = KE(P)$$

$$G(p) = \frac{K}{\frac{1}{\omega_0^2}p^2 + \frac{2\zeta}{\omega_0}p + 1} \qquad (III.9)$$

Avec :

K : le gain statique,

ζ :le facteur ou coefficient d'amortissement

ω_0: la pulsation naturelle.

III.4.1 Réponse indicielle

Comme le dénominateur de la fonction de transfert est d'ordre 2, il est nécessaire d'étudier le lieu de ces racines afin de connaître le comportement du système.

Le discriminant du dénominateur est:

$$\Delta = \frac{4}{\omega_0^2}(\zeta^2 - 1)$$

Pour $\zeta > 1$

Le polynôme 1

$$D(p) = \frac{1}{\omega_0^2}p^2 + \frac{2\zeta}{\omega_0}p + 1$$

Possède deux racines réelles négatives

$$p_1 = -\zeta\omega_0 + \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1} \qquad p_2 = -\zeta\omega_0 - \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

La fonction de transfert correspond alors à la mise en série de deux systèmes du premier ordre :

$$D(p) = \frac{1}{\omega_0^2}p^2 + \frac{2\zeta}{\omega_0}p + 1 = (1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)$$

$$\tau_1 = -\frac{1}{p_1} \;\wedge\; \tau_2 = -\frac{1}{p_2}$$

Pour $\zeta = 1$

Les racines sont doubles

$$p_{12} = -\omega_0 = -\frac{1}{\tau}$$

Le polynôme s'écrit sous la forme :

$$D(p) = \frac{1}{\omega_0^2}p^2 + \frac{2\zeta}{\omega_0}p + 1 = (1 + \tau p)^2$$

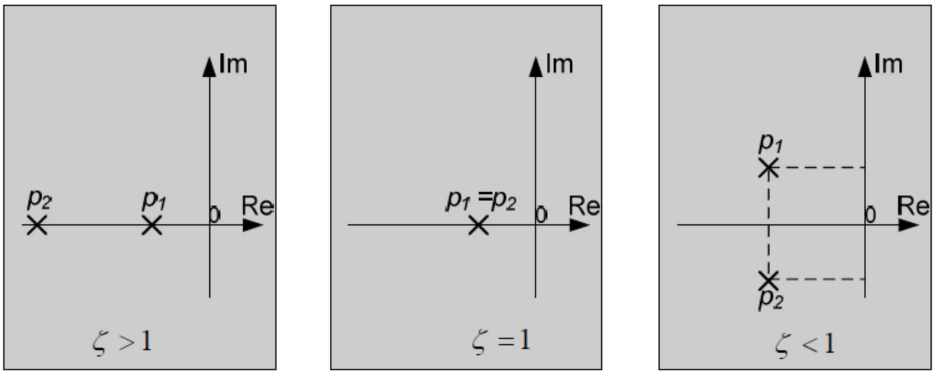
Pour $\zeta < 1$

Les racines sont complexes conjuguées

$$p_1 = -\zeta\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1 - \zeta^2} \qquad p_2 = -\zeta\omega_0 - j\omega_0\sqrt{1 - \zeta^2}$$

La fonction de transfert ne correspond pas à la mise en série de deux systèmes du premier ordre car il s'agit de pôles complexes pas réels (*le dénominateur n'est pas factorisable en termes réels).*

La figure ci-dessous donne la position des pôles dans le plan complexe en fonction de la valeur du coefficient d'amortissement.



Deux pôles réels négatifs — Pôle réel négatif double — Deux pôles complexes conjugués à partie réelle négative

Figure III.5: Position des pôles d'un système du second ordre

III.4.1.1 Etude pour $\zeta > 1$

Comme dans le cas du système du premier ordre, l'entrée appliquée est un échelon d'amplitude *E0*

$$G(p) = \frac{K}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$$
$$S(p) = \frac{KE_0}{p(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$$

La réponse temporelle ***s(t)*** correspondante s'écrit :

$$s(t) = KE_0\left(1 - \frac{1}{\tau_1 - \tau_2}\left(\tau_1 e^{\frac{-t}{\tau_1}} - \tau_2 e^{\frac{-t}{\tau_2}}\right)\right) \qquad t > 0 \qquad \text{(III. 10)}$$

Avec

$$\tau_1 + \tau_2 = \frac{2\zeta}{\omega_0} \quad \wedge \quad \tau_1 \times \tau_2 = \frac{1}{\omega_0^2}$$

Etude de s(t)

$$s(\mathbf{0}) = 0 \qquad \lim_{t\to\infty} s(t) = KE_0$$
$$\dot{s}(\boldsymbol{t}) = \frac{KE_0}{\tau_1 - \tau_2}\left[e^{\frac{-t}{\tau_1}} - e^{\frac{-t}{\tau_2}}\right] \qquad \dot{s}(\mathbf{0}) = 0$$

Puisque

$$\frac{1}{\tau_1} < \frac{1}{\tau_2} \quad \wedge \quad e^{\frac{-t}{\tau_1}} > e^{\frac{-t}{\tau_2}}$$

D'où quelques que soient les valeurs de τ_1, τ_2 $\dot{s}(t) > 0$ pour t> 0, ***s(t)*** est monotone croissante sur ℝ+ , donc pas de dépassement. La réponse est alors qualifiée d'apériodique puisqu'elle ne présente aucun dépassement relativement à la valeur finale. Plus le facteur d'amortissement est grand, plus le temps de réponse est conséquent**.**

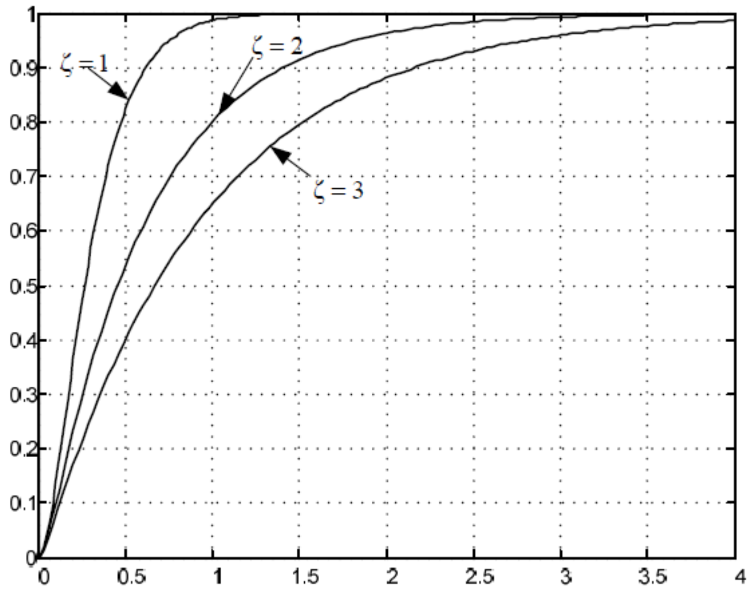


Figure III.6: Réponses apériodiques d'un système du second ordre

La réponse est dans ce cas est très semblable à celle d'un premier ordre. La différence est remarquable à t=0: le premier ordre démarre directement avec une pente différente de zéro alors que le système du second ordre présente une pente nulle (on dit que la réponse est de ***forme S***).

Si le coefficient d'amortissement ζ est assez grand (ζ ≫ 1) l'un des pôles (p_1) l'emporte nettement sur l'autre (p_2) et l'on a:

$$s(t) \approx KE_0\left(1 - e^{\frac{-t\omega_0}{2\zeta}}\right) \qquad t > 0 \qquad \text{(III. 11)}$$

Le système est alors assimilé à un premier ordre.

III.4.1.2 Etude pour ζ= 1

$$S(p) = \frac{KE_0}{p(1+\tau p)^2} \qquad \text{avec} \qquad \tau = \frac{1}{\omega_0}$$

La réponse temporelle ***s(t)*** correspondante s'´écrit :

$$s(t) = KE_0[1 - (1 + \omega_0 t)e^{-\omega_0 t}] \qquad t > 0 \qquad \text{(III. 12)}$$

Etude de s(t)

$$s(\mathbf{0}) = 0 \qquad \lim_{t\to\infty} s(t) = KE_0$$

$$\dot{s}(\boldsymbol{t}) = KE_0{\omega_0}^2 te^{-\omega_0 t} \qquad \dot{s}(\boldsymbol{t}) > 0 \; pour \; t > 0 \;, \qquad \dot{s}(\mathbf{0}) = 0$$

Il s'agit de la réponse apériodique la plus rapide. C'est le régime apériodique critique.

III.4.1.3 Etude pour ζ< 1

$$S(p) = \frac{KE_0}{p\left(\frac{1}{\omega_0^2}p^2 + \frac{2\zeta}{\omega_0}p + 1\right)} = \frac{KE_0}{p(p^2 + 2\zeta\omega_0 p + \omega_0^2)}$$

$$p^2 + 2\zeta\omega_0 p + \omega_0^2 = (p - p_1)(p - p_2)$$

Avec

$$\begin{cases} p_1 = -\zeta\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1-\zeta^2} \\ p_2 = -\zeta\omega_0 - j\omega_0\sqrt{1-\zeta^2} \end{cases}$$

La réponse temporelle correspondante est de la forme

$$s(t) = KE_0\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_0 t}sin\left(\omega_0\sqrt{1-\zeta^2} + \varphi\right)\right] \qquad (III.13)$$

Avec

$$\begin{cases} \cos(\varphi) = \zeta \\ \sin(\varphi) = \sqrt{1-\zeta^2} \end{cases}$$

La courbe de s(t) est une sinusoïde amortie

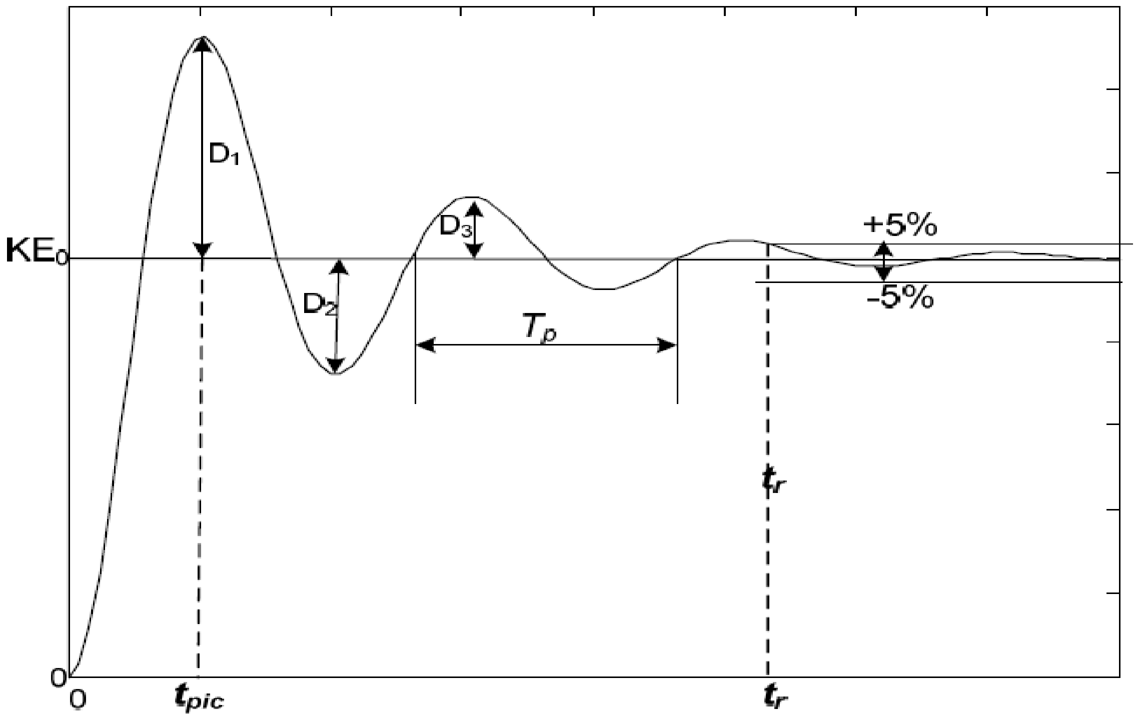


Figure III.7: Réponse oscillatoire amortie d'un système du second ordre

Les caractéristiques de la courbe sont :

1. **La pseudo-période:** la pseudo-période T_p définie par la période de la sinusoïde amortie,

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}} \qquad \text{(III. 14)}$$

2. **La pseudo-pulsation**

$$\omega_p = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2} \qquad \text{(III. 15)}$$

3. **Le dépassement**: le dépassement *D*% exprimé en pourcentage et défini par la valeur maximum du signal de sortie ramené sur sa valeur finale,

$$D_{\%} = 100\, e^{\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \qquad \text{(III. 16)}$$

4. **le temps de montée**: le temps de montée *tm* défini lorsque le signal de sortie atteint pour la première fois sa valeur finale,

$$t_m = \frac{\pi - \arctan\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}}{\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}} \qquad \text{(III. 17)}$$

5. **le temps de pic**: le temps de pic *tpic* (aussi appelé temps du premier dépassement) défini lorsque le signal de sortie atteint sa valeur maximum,

$$t_{pic} = \frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}} \qquad \text{(III.18)}$$

1. **le temps de réponse**: Le plus couramment utilisé est le temps de réponse à 5% que nous noterons ***tr.*** Pour ζ= 0.7 le temps de réponse est minimal et il est obtenu pour un dépassement de 5%.

$$t_r = \frac{3}{\zeta\omega_0} \qquad \text{(III.19)}$$

Exemple 3.3 :

Soit la fonction de transfert suivante:

$G(s) = \dfrac{9}{s^2+3s+9}$ on peut déduire : $\omega_n^2 = 9 \Rightarrow \omega_n = 3,\ 2\xi\omega_n = 3 \Rightarrow \xi = 0.5$. On obtient

alors : $D\% = 16,3\%, T_p = 2.4s, t_{pic} = 1.2s,\ t_m = 0.6s, t_r(5\%) = 2s$