Université Mohamed Khider de Biskra
Département de Sciences et Technologie
Module: Mathématiques
Première Année Licence
2021/2022

Solution des exercices de la Série TD N° 1

Solution de l'Exercice 1

1. $A - B = A \cap \overline{B}$?

$$\begin{aligned}\text{Soit } x \in A-B &\Leftrightarrow (x \in A)\ et\ (x \notin B) \text{ (Définition de différence de deux ensemble.)}\\ &\Leftrightarrow (x \in A)\ et\ (x \in \overline{B}) \text{ (Définition d'un ensemble complémentaire.)}\\ &\Leftrightarrow x \in (A \cap \overline{B}) \text{ (définition de l'intersection).}\end{aligned}$$

d'où
$$A - B = A \cap \overline{B}. \tag{1}$$

2. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$?

$$\begin{aligned}\text{Soit } x \in \overline{A \cup B} &\Leftrightarrow x \notin (A \cup B) \text{(définition)}\\ &\Leftrightarrow (x \notin A)\ et\ (x \notin B) \text{ (définition de l'union)}\\ &\Leftrightarrow (x \in \overline{A})\ et\ (x \in \overline{B}) \text{ (Définition d'un ensemble complémentaire.)}\\ &\Leftrightarrow x \in (\overline{A} \cap \overline{B}) \text{ (définition de l'intersection).}\end{aligned}$$

d'où
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}. \tag{2}$$

3. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$?

$$\begin{aligned}\text{Soit } x \in \overline{A \cap B} &\Leftrightarrow x \notin (A \cap B) \text{ (Définition d'un ensemble complémentaire.)}\\ &\Leftrightarrow (x \notin A)\ ou\ (x \notin B) \text{ (définition de l'intersection)}\\ &\Leftrightarrow (x \in \overline{A})\ ou\ (x \in \overline{B}) \text{ (Définition d'un ensemble complémentaire.)}\\ &\Leftrightarrow x \in (\overline{A} \cup \overline{B}) \text{ (définition de l'union).}\end{aligned}$$

d'où
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}. \tag{3}$$

4. $\overline{A - B} = \overline{A} - \overline{B}$?

$$\begin{aligned}\text{Soit } x \in \left(\overline{A-B}\right) &\Leftrightarrow x \in \left(\overline{A \cap \overline{B}}\right) \text{ (d'après (1))}\\ &\Leftrightarrow x \in \left(\overline{A} \cup \overline{\overline{B}}\right) \text{ (d'après (3))}\\ &\Leftrightarrow x \in \left(\overline{A} \cup B\right) \text{ (le fait que } \overline{\overline{B}} = B)\end{aligned}$$

Donc
$$\overline{A - B} = \overline{A} \cup B. \tag{4}$$

$$\begin{aligned}\text{Soit } x \in \overline{A} - \overline{B} &\Leftrightarrow x \in \left(\overline{A} \cap \overline{\overline{B}}\right) \text{ (d'après (1))}\\ &\Leftrightarrow x \in \left(\overline{A} \cap B\right) \text{ (le fait que } \overline{\overline{B}} = B)\end{aligned}$$

Donc

$$\overline{A}-\overline{B}=\overline{A}\cap B. \tag{5}$$

De (4) et (5) on déduit que

$$\overline{A-B}\neq\overline{A}-\overline{B} \text{ (ceci le fait } \overline{A}\cap B\neq\overline{A}\cup B).$$

5. $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$?

$$\begin{aligned}
\text{Soit } x\in A-(B\cup C) &\Leftrightarrow x\in A\cap\overline{(B\cup C)} \text{ (d'après (1))}\\
&\Leftrightarrow x\in A\cap(\overline{B}\cap\overline{C}) \text{ (d'après (2))}\\
&\Leftrightarrow x\in (A\cap A)\cap(\overline{B}\cap\overline{C}) \text{ (car } A=A\cap A)\\
&\Leftrightarrow x\in (A\cap\overline{B})\cap(A\cap\overline{C}) \text{ (car } \cap \text{ est commutative et associative)}\\
&\Leftrightarrow x\in (A-B)\cap(A-C) \text{ (d'après (1)).}
\end{aligned}$$

Donc

$$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C). \tag{6}$$

6. $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$?

$$\begin{aligned}
\text{Soit } x\in A-(B\cap C) &\Leftrightarrow x\in A\cap\overline{(B\cap C)} \text{ (d'après (1))}\\
&\Leftrightarrow x\in A\cap(\overline{B}\cup\overline{C}) \text{ (d'après (3))}\\
&\Leftrightarrow x\in A \textit{ et } (x\notin B \textit{ ou } x\notin C) \text{ (Définition de } \cup \text{ et } \cap)\\
&\Leftrightarrow (x\in A \textit{ et } x\notin B) \textit{ ou } (x\in A \textit{ et } x\notin C) \text{ (Définition de } \cap)\\
&\Leftrightarrow (x\in A\cap\overline{B}) \textit{ ou } (x\in A\cap\overline{C}) \text{ (Définition de } \cup \text{)}\\
&\Leftrightarrow x\in (A\cap\overline{B})\cup(A\cap\overline{C})\\
&\Leftrightarrow x\in (A-B)\cup(A-C). \text{ (d'après (1))}
\end{aligned}$$

Donc

$$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C) \tag{7}$$

7. $(A\cup B)-C=(A-C)\cup(B-C)$?

$$\begin{aligned}
\text{Soit } x\in (A\cup B)-C &\Leftrightarrow x\in (A\cup B)\cap\overline{C} \text{ (d'après (1))}\\
&\Leftrightarrow x\in (A\cup B) \textit{ et } (x\notin C)\\
&\Leftrightarrow (x\in A \textit{ ou } x\in B) \textit{ et } (x\notin C)\\
&\Leftrightarrow (x\in A \textit{ et } x\notin C) \textit{ ou } (x\in B \textit{ et } x\notin C)\\
&\Leftrightarrow x\in (A\cap\overline{C}) \textit{ ou } x\in (B\cap\overline{C})\\
&\Leftrightarrow x\in (A\cap\overline{C})\cup(B\cap\overline{C})\\
&\Leftrightarrow x\in (A-C)\cup(B-C).
\end{aligned}$$

Donc

$$(A\cup B)-C=(A-C)\cup(B-C). \tag{8}$$

8. $(A\cap B)-C=(A-C)\cap(B-C)$?

$$\begin{aligned}
\text{Soit } x\in (A\cap B)-C &\Leftrightarrow x\in (A\cap B)\cap\overline{C} \text{ (d'après (1))}\\
&\Leftrightarrow x\in (A\cap B)\ \cap\ (\overline{C}\cap\overline{C})\\
&\Leftrightarrow x\in (A\cap\overline{C})\ \cap\ (B\cap\overline{C})\\
&\Leftrightarrow x\in (A-C)\cap(B-C).
\end{aligned}$$

Donc

$$(A\cap B)-C=(A-C)\cap(B-C). \tag{9}$$

Solution de l'Exercice 2

1. $\mathcal{R}$ est une équivalence?

   Définition 1 *Une relation $\mathcal{R}$ définie sur un ensemble* **E** *est dite une relation d'***équivalence** *ssi:*

   - *$\mathcal{R}$ est réflexive : $\forall x \in E \Rightarrow x\mathcal{R}x$*
   - *$\mathcal{R}$ est symétrique : $\forall\ x,\ y \in E$ si $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$.*
   - *$\mathcal{R}$ est Transitive : $\forall\ x,\ y,\ z \in E$ si ($x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$) $\Rightarrow x\mathcal{R}z$.*

   (a) $\mathcal{R}$ est reflexive?

   $$\text{Soit } x \in \mathbb{R}^* \quad \Rightarrow \quad x^2 > 0 \Rightarrow x\mathcal{R}x \Rightarrow \mathcal{R} \text{ est reflexive.} \tag{10}$$

   (b) $\mathcal{R}$ est symétrique?

   $$\begin{aligned} \text{Soit } x, y \in \mathbb{R}^* \text{ tel que } x\mathcal{R}y \quad &\Rightarrow \quad xy > 0 \\ &\Rightarrow \quad yx > 0 \text{ (car le produit dans } \mathbb{R}^* \text{ est commutatif)} \\ &\Rightarrow \quad y\mathcal{R}x \Rightarrow \mathcal{R} \text{ est reflexive.} \end{aligned} \tag{11}$$

   (c) $\mathcal{R}$ est transitive?

   $$\begin{aligned} \text{Soit } x,\ y,\ z \in \mathbb{R}^* \text{ tel que } \begin{cases} x\mathcal{R}y, \\ y\mathcal{R}z, \end{cases} \quad &\Rightarrow \quad \begin{cases} xy > 0, & (*) \\ yz > 0, & (**) \end{cases} \\ &\Rightarrow \quad xy^2z > 0 \quad ((*) \times (**)) \\ &\Rightarrow \quad xz > 0 \ \text{ (car } y^2 > 0) \\ &\Rightarrow \quad x\mathcal{R}z \Rightarrow \mathcal{R} \text{ est transitive} \end{aligned} \tag{12}$$

   De (10), (11) et (12) on déduit que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble $\mathbb{R}^*$.

2. Classe d'équivalence de 1 et -1

   Définition 2 *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur l'esemble E, on appelle classe d'équivalence d'un élément $x \in E$ l'ensemble des éléments $y \in E$ qui sont en relation $\mathcal{R}$ avec x on note $\dot{x}$, où*

   $$\dot{x} = \{y \in E / x\mathcal{R}y\}.$$

   (a) $\dot{1} =?$
   Soit $y \in \mathbb{R}^*$, $1\mathcal{R}y \Rightarrow 1y > 0 \Rightarrow y > 0$, c'est-à-dire,

   $$\dot{1} = \mathbb{R}^*_+. \tag{13}$$

   (b) $-\dot{1} =?$
   Soit $y \in \mathbb{R}^*$, $-1\mathcal{R}y \Rightarrow -1y > 0 \Rightarrow y < 0$, c'est-à-dire,

   $$-\dot{1} = \mathbb{R}^*_-. \tag{14}$$

   (c) Le quatient de $\mathcal{R} =?$

   Définition 3 *L'ensemble des classes d'équivalence d'éléments de **E** est appelée ensemble quotient de **E** par $\mathcal{R}$, il est noté **E**$/\mathcal{R}$,*

   $$E/\mathcal{R} = \{\dot{x}/x \in \boldsymbol{E}\}.$$

D'après (13) et (14) on constate que

$$\begin{array}{rcl} \dot{1} \cup -\dot{1} & = & \mathbb{R}^* \\ \dot{1} \cap -\dot{1} & = & \emptyset \end{array} \qquad (15)$$

Ainsi, d'après cette définition et les résultats (13), (14) et (15) on conclut que:

$$\mathbb{R}^*/\mathcal{R} = \{\dot{x}/x \in \mathbb{R}^*\} = \left\{\dot{1}, -\dot{1}\right\}.$$

Solution de l'Exercice 3

La relation $\mathcal{R}$ définie par

$$\forall (a, b) \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow a \equiv b[3],$$

n'est pas une relation d'équivalence car pour tout $a \in \mathbb{Z}/\{0, 1, 2\}$ la relation $\mathcal{R}$ n'est pas reflexive.

Exemple: prenons a=5, l'écriture $5 \equiv 5[3]$ n'a aucun sens.

Il est a noter que il est facile de démontrer également que $\mathcal{R}$ n'est ni symetrique, ni transitive.

Solution de l'Exercice 4

1. $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre?

Définition 4 *Une relation $\mathcal{R}$ définie sur un ensemble* **E** *est dite une relation d'***ordre** *ssi:*

- *$\mathcal{R}$ est réflexive : $\forall x \in E \Rightarrow x\mathcal{R}x$*
- *$\mathcal{R}$ est anti-symétrique : $\forall\ x,\ y \in E$ si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x \quad \Rightarrow x = y$.*
- *$\mathcal{R}$ est Transitive : $\forall\ x,\ y,\ z \in E$ si ($x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$) $\Rightarrow x\mathcal{R}z$.*

(a) $\mathcal{R}$ est reflexive?

$$\text{Soit } x \in \mathbb{N}^* \quad \Rightarrow \quad a = 1 * a \Rightarrow a\mathcal{R}a \Rightarrow \mathcal{R} \text{ est reflexive.} \qquad (16)$$

(b) $\mathcal{R}$ est anti-symétrique?

$$\begin{array}{rcll} \text{Soit } a, b \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } \left\{ \begin{array}{l} a\mathcal{R}b, \\ b\mathcal{R}a, \end{array} \right. & \Rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \exists k_1 \in \mathbb{N}^*/b = k_1 a \\ \exists k_2 \in \mathbb{N}^*/a = k_2 b \end{array} \right. & (17) \\ & \Rightarrow & ab = k_1 k_2 ab \Rightarrow k_1 k_2 = 1 & \\ & \Rightarrow & k_1 = k_2 = 1 \text{ car } k_1, k_2 \in \mathbb{N}^* & (18) \end{array}$$

ainsi, de (17) et (18) on déduit que $a = b$ c'est-à-dire

$$\text{La relation } \mathcal{R} \text{ est antisymétrique.} \qquad (19)$$

(c) $\mathcal{R}$ est transitive?

$$\begin{array}{rcll} \text{Soit } a, b, c \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } \left\{ \begin{array}{l} a\mathcal{R}b, \\ b\mathcal{R}c, \end{array} \right. & \Rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \exists k_1 \in \mathbb{N}^*/b = k_1 a \\ \exists k_2 \in \mathbb{N}^*/c = k_2 b \end{array} \right. & \\ & \Rightarrow & c = k_1 k_2 a = k' a & \\ & \Rightarrow & a\mathcal{R}c \text{ (car } k_1 k_2 \in \mathbb{N}^*) & \\ & \Rightarrow & \mathcal{R} \text{ est transitive} & (20) \end{array}$$

De (16), (19) et (20) on déduit que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.

La relation $\mathcal{R}$ n'est pas une relation d'ordre total, car il existe des élements $a, b \in \mathcal{N}^*$ et qui ne sont pas comparable par la relation $\mathcal{R}$.
Exemple : Si on prend le couple (5,3) on constate que 5 n'est pas un diviseur de 3 et 3 n'est pas un diviseur de 5.

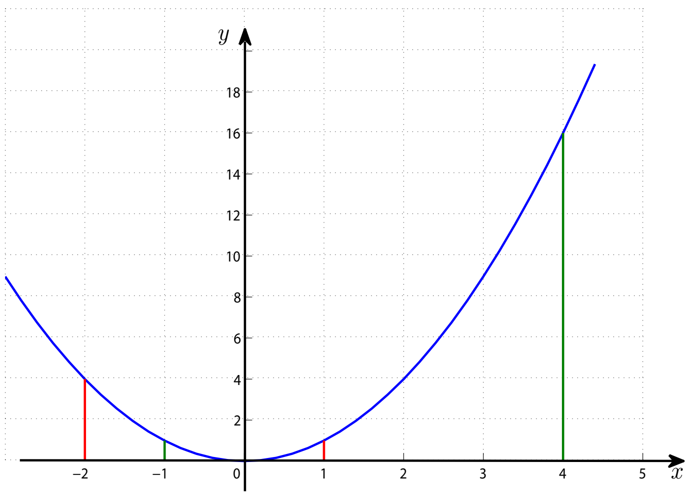

Figure 1: Graphes des fonctions définies dans l'exercice N° 5 de la série TD 1.

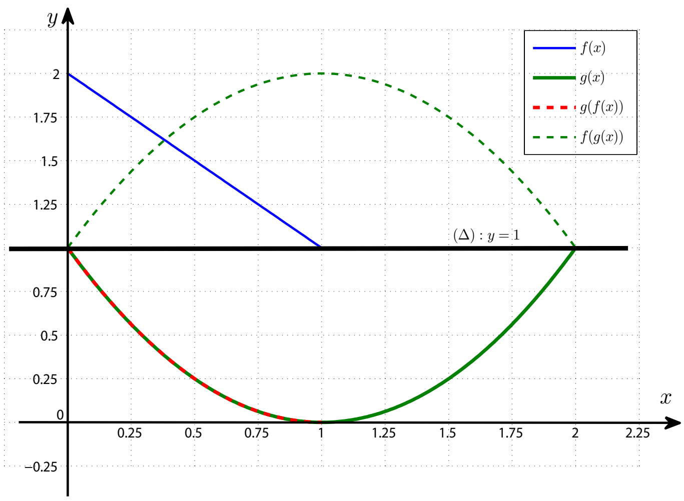

Figure 2: Graphes des fonctions définies dans l'exercice N° 6 de la série TD 1.

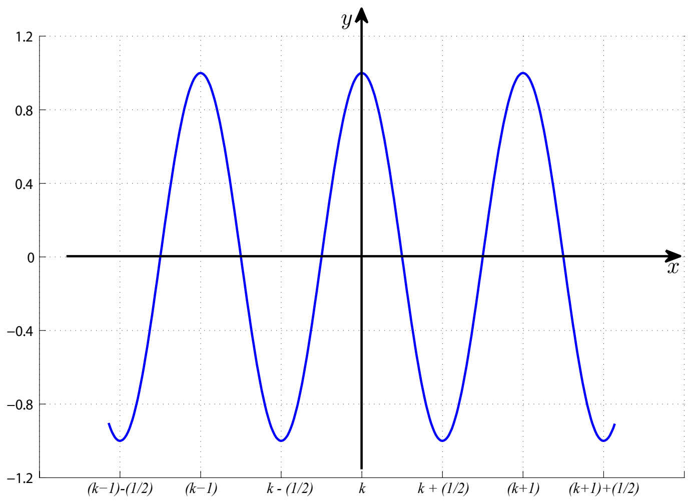

Figure 3: Graphe de la fonction définie dans l'exercice N° 7 de la série TD 1.