

EX05:

①  $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$  ?

① ou a  $A \cup B = [-2, 1] \cup [-4, 4] = [-2, 4]$ .

$\Rightarrow f(A \cup B) = f([-2, 4]) = [0, 16]$  ——— ①

②  $f(A) = f([-2, 1]) = [0, 4]$  et  $f(B) = f([-4, 4]) = [0, 16]$  — ②

$\Rightarrow f(A) \cup f(B) = [0, 4] \cup [0, 16] = [0, 16]$  — ②

de ① et ② on remarque que

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

②  $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$  ?

②  $A \cap B = [-2, 1] \cap [-4, 4] = [-2, 1]$

$\Rightarrow f(A \cap B) = f([-2, 1]) = [0, 4]$  ——— ①

③  $f(A) \cap f(B) = [0, 4] \cap [0, 16] = [0, 4]$  — ②

de ① et ② on remarque que

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$

$$f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$$

③  $f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(f^{-1}(A))$  ? = A

① ou a  $f(A) = [0, 4] \Rightarrow f^{-1}(f(A)) = f^{-1}([0, 4]) = [-2, 1]$  — ①

② ou a  $f^{-1}(A) = f^{-1}([-2, 1]) = f^{-1}([0, 1]) = [-4, 1]$  — ②

de ① et ② on remarque que

$$A \neq f^{-1}(f(A)) \neq f^{-1}(f^{-1}(A)) \neq A$$

Ce résultat peut se justifier par le fait que  $f$  n'est pas bijectif sur  $A$ .

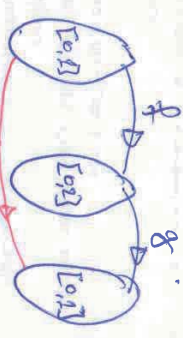
EX06:

①  $g \circ f = ?$ ,  $f \circ g = ?$

①  $g \circ f(x) = g(f(x))$

$$= (f(x)-1)^2 = (2-x-1)^2 = (-x+1)^2$$

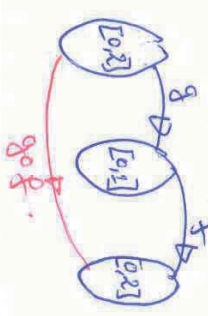
$$g \circ f(x) = (x-1)^2$$



②  $f \circ g(x) = f(g(x))$

$$= 2 - g(x) = 2 - (x-1)^2$$

$$f \circ g(x) : [0, 2] \xrightarrow{g} [0, 2] \xrightarrow{f} [0, 2]$$



de a) et b) on remarque q-e:

- $g \circ f = g$  sur l'intervalle  $[0,1]$ .
- $g \circ f \neq f \circ g$
- $g \circ f$  et  $f \circ g$  sont surjectives par rapport à l'axe  $y=1$  dans l'intervalle  $[0,1]$ .

②  $g \circ f$  est bijectif?

Rappel

$f$  est bijective  $\Leftrightarrow$   $f$  est injective et surjective

\*  $f$  est injective  $\Leftrightarrow \forall m_1, m_2 \in \mathcal{R}(f(x)) = \mathcal{R}(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

ou bien:

$$\forall m_1, m_2 \in \mathcal{E} / m_1 \neq m_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

\*  $f$  est surjectif  $\Leftrightarrow \forall y \in \mathcal{F}, \exists x \in \mathcal{E}$  tel que  $y = f(x)$ .

③  $g$  est injective?

soit  $x_1, x_2 \in [0,1]$  tel que  $\mathcal{R}(x_1) = \mathcal{R}(x_2)$

$$g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow (x_1^{-1})^2 = (x_2^{-1})^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1^{-1} = x_2^{-1} \\ x_1^{-1} = -(x_2^{-1}) \end{cases}$$

(Raisons car  $x_1, x_2 \in [0,1]$   $\Rightarrow x_1^{-1} > 0$   $x_2^{-1} > 0$ )

$$\Rightarrow x_1^{-1} = x_2^{-1} \Rightarrow x_1 = x_2$$

$\Rightarrow$   $g$  est injectif

-3-

④  $g \circ f$  est surjective?

soit  $y \in [0,1]$  et  $g(x) = y \Rightarrow (x^{-1})^2 = y$

$$\Rightarrow x^{-1} = \sqrt{y} \quad (\text{Raisons } x^{-1} > 0)$$

$$\Rightarrow x^{-1} = -\sqrt{y}$$

$$\Rightarrow x = 1 - \sqrt{y} \quad \text{--- (*)}$$

d'après (\*) on remarque que  $\forall y \in [0,1]$  il existe  $x \in [0,1]$  tq  $y = g(x) \Rightarrow$   $g$  est surjective

de a) et b) on conclut que  $g$  est bijective

⑤  $g \circ f^{-1} = ?$

on a  $y = (x^{-1})^2 \Rightarrow x = 1 - \sqrt{y}$

donc  $g \circ f^{-1}$  est définie comme suit:

$$g \circ f^{-1} : [0,1] \rightarrow [0,1]$$

$$x \mapsto 1 - \sqrt{x}$$

-4-

### EX07

① f est injective?

soit  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  tq  $f(x_1) = f(x_2)$ .

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \cos(2\pi n_1) = \cos(2\pi n_2)$$

$$\Rightarrow 2\pi n_1 = 2\pi n_2 + 2\pi k \quad / k \in \mathbb{Z}.$$

$$\Rightarrow n_1 = n_2 + k$$

$\Rightarrow$  on peut trouver  $x_1 \neq x_2$  tq  $f(x_1) = f(x_2)$

donc f n'est pas injective. ②

③ f est surjectif?

f n'est pas surjectif car  $\exists y \in \mathbb{R}$  tq  $\nexists m$

non pour  $f(x) = y$ . ④

exemple:  $y = 2 \in \mathbb{R}$  on peut pas trouver

un  $n \in \mathbb{R}$  tq  $\cos(2\pi n) = 2$  ce fait

$$-1 \leq \cos \leq 1$$

Remarque: si f est définie par:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow ]-\pi, \pi[ \quad \text{on peut montrer que}$$

$$x \mapsto \cos(2\pi n) \quad f \text{ est surjective}$$

② f est injective?

de ① et ③  $\Rightarrow$  f n'est pas injective

①

soit  $n = k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \cos(2\pi k) = 1$

$$\Rightarrow f(\mathbb{Z}) = \{1\}$$

③  $f^{-1}(1) = ?$

$$f^{-1}(1) \Rightarrow \cos(2\pi n) = 1$$

$$\Rightarrow 2\pi n = 2\pi k \quad / k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow n \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(1) = \mathbb{Z}$$

④  $f^{-1}(-1)$

$$\Leftrightarrow \cos(2\pi n) = -1$$

$$\Leftrightarrow 2\pi n = \pi + 2\pi k \quad / k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow n = k + \frac{1}{2} \quad / k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(-1) = \left\{ k + \frac{1}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$