Exo5:

① $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$?

ⓐ on a $A \cup B = [-2,1] \cup [-1,4] = [-2,4]$.

$\Rightarrow f(A \cup B) = f([-2,4]) = [0,16]$ —— ⓐ

ⓑ $f(A) = f([-2,1]) = [0,4]$ et $f(B) = f([-1,4]) = [0,16]$ — ⓑ$_1$

$\Rightarrow f(A) \cup f(B) = [0,4] \cup [0,16] = [0,16]$ —— ⓑ$_2$

de ⓐ et ⓑ$_2$ on remarque que.

$$\boxed{f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)}$$

② $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$?

ⓐ $A \cap B = [-2,1] \cap [-1,4] = [-1,1]$.

$\Rightarrow f(A \cap B) = f([-1,1]) = [0,1]$ —— ⓐ.

ⓑ $f(A) \cap f(B) = [0,4] \cap [0,16] = [0,4]$ —— ⓑ

de ⓐ et ⓑ on remarque que

$$\boxed{\begin{array}{l} f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B) \\ \text{et} \\ f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B). \end{array}}$$

③ $f^{-1}(f(A)) = f(f^{-1}(A)) \overset{?}{=} A$

ⓐ on a $f(A) = [0,4] \Rightarrow f^{-1}(f(A)) = f^{-1}([0,4]) = [-2,2]$ — ⓐ

ⓑ on a $f^{-1}(A) = f^{-1}([-2,1]) = f^{-1}([0,1]) = [-1,1]$. — ⓑ

de ⓐ et ⓑ on remarque que.

$$A \neq f^{-1}(f(A)) \neq f(f^{-1}(A)) \neq A.$$

Ce résultat peut se justifier par le fait que f n'est pas bijectif sur A.

Exo6:

$$\begin{tikzcd} {[0,1]} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "f\circ g"'] & {[0,2]} \arrow[r, "g"] & {[0,1]} \end{tikzcd}$$

① $g \circ f = ?$, $f \circ g = ?$

ⓐ $g \circ f(x) = g(f(x))$

$= (f(x) - 1)^2$

$= (2 - x - 1)^2$

$= (-(x-1))^2$

$\boxed{g \circ f(x) = (x-1)^2}$ — ⓐ

$g \circ f(x) : [0,1] \longrightarrow [0,1]$

$x : \quad x \longmapsto (x-1)^2$

ⓑ $f \circ g(x) = f(g(x))$

$= 2 - g(x)$

$\boxed{f \circ g(x) = 2 - (x-1)^2}$. — ⓑ

$f \circ g(x) : [0,2] \longrightarrow [0,2]$

$x \longmapsto 2 - (x-1)^2$.

$$\begin{tikzcd} {[0,2]} \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & {[0,1]} \arrow[r, "f"] & {[0,2]} \end{tikzcd}$$

de ⓐ et ⓑ on remarque que :

- $g \circ f = g$ sur l'intervalle $[0,1]$.
- $g \circ f \neq f \circ g$
- $g \circ f$ et $f \circ g$ sont symétrique par rapport à l'axe $y = 1$ dans l'intervalle $[0,1]$.

② $g \circ f$ est bijectif ?

Rappel

⊛ f est bijective $\Longleftrightarrow \begin{cases} f \text{ est injective} \\ \text{et } f \text{ est surjective} \end{cases}$

⊛ f est injective $\Longleftrightarrow \forall x_1, x_2 \in E \,/\, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

ou bien : $\forall x_1, x_2 \in E \,/\,$ si $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

⊛ f est surjectif $\Longleftrightarrow \forall y \in F, \exists x \in E$ tel que $y = f(x)$.

ⓐ g est injective ?

soit $x_1, x_2 \in [0,1]$ tel que $g(x_1) = g(x_2)$

$g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow (x_1 - 1)^2 = (x_2 - 1)^2$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - 1 = x_2 - 1 \\ \vee \\ x_1 - 1 = -(x_2 - 1) \end{cases}$ (Rejeter car $x_1, x_2 \in [0,1]$. $\Rightarrow \begin{cases} x_1 - 1 < 0 \\ x_2 - 1 < 0 \end{cases}$)

$\Rightarrow x_1 - 1 = x_2 - 1 \Rightarrow \boxed{x_1 = x_2}$

$\Rightarrow \boxed{g \text{ est injectif}}$ ⓐ

ⓑ g est surjective ?

soit $y \in [0,1]$ et $g(x) = y \Rightarrow (x-1)^2 = y$.

$\Rightarrow x - 1 = \begin{cases} \sqrt{y} & (\text{Rejeter } x - 1 < 0) \\ -\sqrt{y} \end{cases}$

$\Rightarrow x - 1 = -\sqrt{y}$.

$\Rightarrow x = 1 - \sqrt{y}$. ——— (*)

d'après (*) on remarque que $\forall y \in [0,1]$ il existe $x \in [0,1]$ tq $y = g(x) \Rightarrow$ g est surjective (b)

de ⓐ et ⓑ on conclut que $\boxed{g \text{ est bijective}}$

③ $g \circ f^{-1} = ?$

on a $y = (x-1)^2 \Rightarrow x = 1 - \sqrt{y}$.

donc $g \circ f^{-1}$ est définie comme suite :

$$g \circ f^{-1} : [0,1] \longrightarrow [0,1]$$
$$x \longmapsto 1 - \sqrt{x}.$$

EXO 7

1) a) f est injective ?

soit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tq $f(x_1) = f(x_2)$.

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \cos(2\pi x_1) = \cos(2\pi x_2)$

$\Rightarrow \cancel{2\pi} x_1 = \cancel{2\pi} x_2 + \cancel{2\pi} k \quad / k \in \mathbb{Z}$.

$\Rightarrow x_1 = x_2 + k$

$\Rightarrow$ on peut trouver $x_1 \neq x_2$ tq $f(x_1) = f(x_2)$

donc f n'est pas injective. a

b) f est surjectif :

f n'est pas surjectif car $\exists\, y \in \mathbb{R}$ tq $\nexists\, x$ pour que $f(x) = y$. b

exemple : $y = 2 \in \mathbb{R}$ on peut pas trouver un $x \in \mathbb{R}$ tq $\cos(2\pi x) = 2$ le fait que $-1 \leq \cos \leq 1$

Remarque : si f est définie par :

$f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$
$x \mapsto \cos(2\pi x)$

on peut montrer que f est surjective

c) f est bijective ?

de a) et b) $\Rightarrow f$ n'est pas bijective

2) soit $x = k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \cos(2\pi k) = 1$

$\Rightarrow \boxed{f(\mathbb{Z}) = \{1\}}$

3) $f^{-1}(1) = ?$

$f^{-1}(1) \Leftrightarrow \cos(2\pi x) = 1$

$\Leftrightarrow \cancel{2\pi} x = \cancel{2\pi} k \quad / k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \boxed{f^{-1}(1) = \mathbb{Z}}$

4) $f^{-1}(-1) \Leftrightarrow \cos(2\pi x) = -1$

$\Leftrightarrow 2\pi x = \pi + 2\pi k \quad / k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \boxed{x = k + \frac{1}{2} \quad / k \in \mathbb{Z}}$

$\Leftrightarrow f^{-1}(-1) = \{k + \frac{1}{2} \,/\, k \in \mathbb{Z}\}$.