

**2<sup>eme</sup> Année ST**  
**Cours**

# Mécanique rationnelle

**Dr. Hocine DJEMAI**

**Dr. Tahar MASRI**

**Université Mohamed Khider. Biskra.**

**Algérie.**

**Décembre 2020**

# Mécanique rationnelle

## Cours

**2<sup>ème</sup> Année Science et Technologie**

Par

**Dr. Hocine DJEMAI**    Département de génie mécanique Université de Biskra. Algérie

et

**Dr. Tahar MASRI**    Département de génie mécanique Université de Biskra. Algérie

Décembre 2020

## Sommaire

I.	Généralités sur le calcul vectoriel.....	6
I.1	Généralités sur les vecteurs .....	6
I.1.1	Définitions.....	6
I.2	Le calcul vectoriel .....	10
I.3	Produit scalaire.....	14
I.4	Produit Vectoriel.....	14
II.	Les forces et les moments .....	16
II.1	Définition d'une force.....	16
II.2	Les systèmes de forces dans l'espace.....	16
II.3	Les Forces .....	17
II.3.1	L'aspect vectoriel des forces.....	17
II.3.2	Composantes d'une force.....	17
II.3.3	Cosinus directeurs .....	18
II.4	Résultante d'un ensemble des forces concourantes.....	19
II.4.1	Résultante de deux force.....	19
II.4.2	Résultante de plusieurs forces .....	19
II.4.3	Décomposition de forces.....	22
II.5	Moment d'une force par rapport à un point.....	23
II.5.1	Définition du moment d'une force par rapport à un point.....	23
II.5.2	Expression du moment d'une force dans un système orthonormé trirectangle .....	24
II.5.3	Moment d'une force par rapport à deux points différents.....	25
II.5.4	Moments de plusieurs forces par rapport à un même point .....	26
II.5.5	Moment d'une force par rapport à un axe.....	27
II.5.6	Théorème de VARIGNON.....	27
II.5.7	Moment d'un couple de forces .....	28
II.6	Les forces extérieures.....	29
II.6.1	Force concentrée .....	29
II.6.2	Force répartie .....	30
II.7	Les forces intérieurs (efforts de cohésion).....	31
II.7.1	Définition :.....	31
II.7.2	Effort longitudinal (N) :.....	32
II.7.3	Effort tranchant (T) :.....	33

Mécanique rationnelle	Sommaire
II.7.4	Moment fléchissant ( $M_f$ ) : ..... 33
II.7.5	Moment de torsion $M_t$ ..... 33
II.8	Modèle mécanique..... 34
II.8.1	Point matériel ..... 34
II.8.2	Corps solide ..... 34
III.	Statique d'un corps solide ..... 34
III.1	Définition ..... 34
III.2	Les axiomes de la statique..... 35
III.2.1	Corps soumis à l'action de deux forces coplanaires..... 35
III.2.2	Transport d'une force sur sa ligne d'action ..... 36
	Axiome 3 (parallélogramme) ..... 36
III.3	Principe de l'égalité de l'action et de la réaction ..... 37
III.3.1	Principe de l'isolement des pièces ..... 38
III.3.2	Liaisons sans frottement des solides et leurs réactions : ..... 39
III.4	Les Forces parallèles..... 41
III.4.1	Résultante de deux forces parallèles et de même sens ..... 41
III.4.2	Résultante de deux forces parallèles et de sens contraire..... 43
III.5	Equilibre du point matériel..... 44
III.5.1	Solution graphique ..... 44
III.5.2	Equilibre analytique du point matériel..... 46
III.5.3	Théorie de trois forces coplanaires (Triangle des forces) ..... 47
III.6	Problèmes statiquement déterminés ou indéterminés ..... 49
III.7	Etapas de résolution des problèmes en statique ..... 50
III.8	Le Frottement ..... 50
III.8.1	Frottement de glissement ..... 50
III.8.2	Loi du frottement de glissement à l'état de repos ..... 50
III.8.3	Équilibre des solides naturels avec frottement..... 52
IV.	La géométrie des masses..... 54
IV.1	Introduction..... 54
IV.2	Systèmes discrets ..... 54
IV.2.1	Systèmes continus ..... 54
IV.3	Centre d'inertie (centre de masse) des solides ..... 55
IV.4	Centre d'inertie d'un système composé ..... 57
IV.5	Théorème de Guldin ..... 58
IV.5.1	Premier théorème de Guldin..... 58

Mécanique rationnelle	Sommaire
IV.5.2	Deuxième théorème de Guldin ..... 58
IV.6	Opérateur d'inertie..... 59
IV.6.1	Définition du moment d'inertie d'un solide ..... 59
IV.6.2	Moments et produits d'inertie d'un solide ..... 60
IV.7	Solides plans ..... 61
IV.8	Théorème de HUYGENS..... 62
V.	Cinématique d'un corps solide ..... 64
V.1	Introduction..... 64
V.2	Rappel sur la cinématique de point matériel ..... 64
V.2.1	La trajectoire..... 64
V.2.2	Vitesse rectiligne (vecteur de vitesse)..... 64
V.2.3	Accélération..... 65
V.3	Mouvement d'un point matériel ..... 65
V.3.1	Mouvement rectiligne ..... 65
V.3.2	Mouvement curviligne uniforme..... 65
V.3.3	Mouvement rectiligne uniforme ..... 66
V.3.4	Mouvement rectiligne uniformément variable..... 66
IV.1.8.....	67
V.4	Cinématique du corps solide ..... 68
V.4.1	Torseur cinématique distribution des vitesses..... 68
V.4.2	Champ des vitesses d'un solide ..... 69
V.4.3	Champ des accélérations d'un solide ..... 70
V.5	Mouvements particuliers fondamentaux..... 70
V.5.1	Mouvement de translation pur ..... 70
V.5.2	Mouvement de rotation pur autour d'un axe du solide ..... 72
V.5.3	Mouvement composé (rotation + translation)..... 74
Référence bibliographique	..... 78

## Préface

Cette polycopie de la mécanique rationnelle contient des cours avec des applications. Le présent cours est adressé aux étudiants de deuxième année LMD du domaine sciences et technologie. Ce polycopie est élaboré conformément au programme officiel fixé par le ministère de l'enseignement supérieur et de la Recherche Scientifique. Le cours permet aux étudiants du premier cycle universitaire une compréhension des principes fondamentaux de la mécanique rationnelle. Cette polycopie est structurée en cinq chapitres. Le premier chapitre expose un rappel mathématique sur quelques éléments de calcul vectoriel. Le deuxième chapitre traite des généralités sur les forces, leurs différents types. Ensuite, il présente les méthodes de quelques opérations sur les forces, calcul des moments des forces et la représentation des différents types des forces mécaniques. Le chapitre trois expose les notions fondamentales de la statique à savoir : les axiomes de la statique, et les torseurs des forces extérieures, ainsi que les conditions d'équilibre statique. Par ailleurs, le chapitre quatre aborde la géométrie des masses qui définit les différentes méthodes de calcul des corps solides et le calcul de moments d'inertie. Le dernier chapitre, la cinématique des corps solides traite le mouvement mécanique du point de vue géométrique.

# **Chapitre I**

## **Généralités sur le calcul vectoriel**

## I. Généralités sur le calcul vectoriel

En physique et en géométrie, certaines quantités sont complètement définies par une grandeur réelle, ainsi la masse d'un corps  $m$  (Kg), la chaleur spécifique de l'eau, l'air d'un cercle et son diamètre, le volume d'une sphère.... Chacune des ces quantités est représentée par un nombre qui dépend du système d'unités choisi (Kg, k,  $m^2$ ,...). Une telle quantité est appelée un scalaire.

Il existe cependant d'autres quantités physiques et géométriques qui ne peuvent être représentées par un simple nombre, car leur caractérisation complète nécessite la connaissance d'une direction et d'une grandeur. Par exemple, les forces en mécanique sont des quantités de ce type.

Il est habituel de représenter une force graphiquement par un segment orienté qui indique la direction de la force et dont la longueur est égale à la grandeur de la force pour une échelle préalablement choisie. C'est le vecteur.

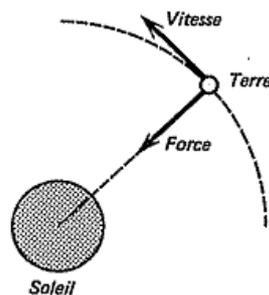


Figure I. 1: Représentation des grandeurs physiques.

### I.1 Généralités sur les vecteurs

#### I.1.1 Définitions

##### a. Vecteur lié

On appelle vecteur lié ou simplement vecteur un segment de droite dont on distingue une origine et une extrémité. Le vecteur d'origine  $A$  et d'extrémité  $B$ , appelé "Vecteur  $AB$ ", aura un module, une distance entre  $A$  et  $B$ , et un sens qui est le sens de parcours de  $A$  vers  $B$ . Le vecteur  $AB$  se représente généralement par la notation  $\overrightarrow{AB}$ .

- La droite joignant les point  $A$  et  $B$  est appelée support du vecteur  $AB$ .
- Le vecteur  $BA$  d'origine  $B$  est d'extrémité  $A$  est l'opposé du vecteur  $AB$ . Soit :  $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ .

**b. Vecteur nul**

Lorsque l'extrémité d'un vecteur coïncide avec son origine, on dit que c'est un vecteur nul. Son module sera nul, sa direction et son sens sont indéterminés.

**c. Vecteur de même direction**

Sur une droite donnée on peut définir deux sens de parcours opposés. Lorsque deux vecteurs ont des supports parallèles distincts, on dit qu'ils ont même direction. On dit qu'ils ont même sens si, dans leur plan, ils sont situés d'un même côté de la droite qui joint leurs origines.

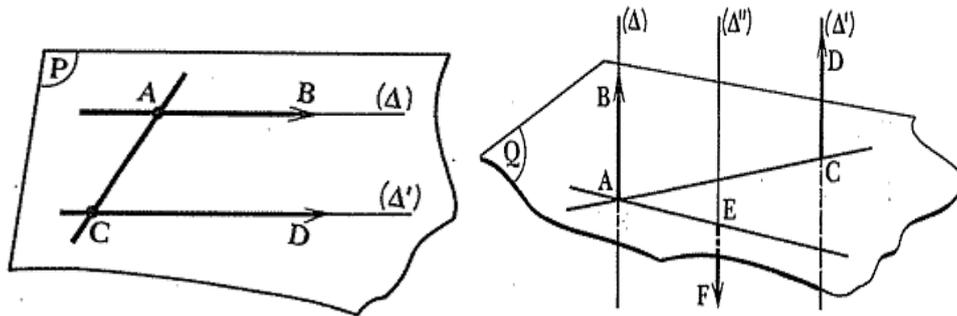


Figure I. 2: Sens de deux vecteurs.

**d. Vecteurs équipollents**

On dit que deux vecteurs (liés) AB et A'B' sont équipollents si le quadrilatère ABB'A' est un parallélogramme (Fig. a).

Dans le cas où AB et A'B' ont même support et ils sont liés par deux parallélogrammes (Fig.b), les deux vecteurs sont équipollents.

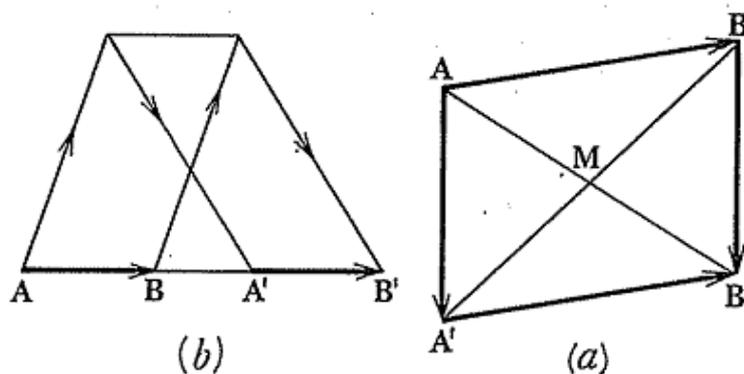


Figure I. 3 : Représentation des vecteurs équipollents.

**e. Vecteur glissant**

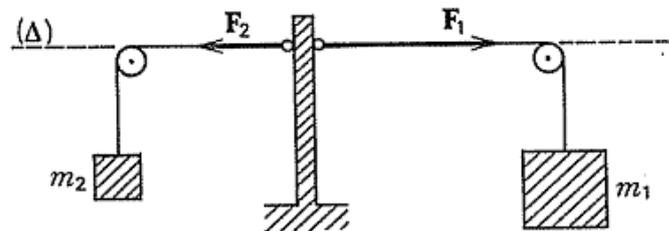
On parle d'une vecteur glissant AB de support (Δ) pour désigner l'un quelconque des vecteur liés équipollents au vecteur lié AB et de support (Δ). L'origine reste arbitraire sur le support donnée.

**f. Vecteur libre**

On parle d'un vecteur libre AB pour désigner l'un quelconque des vecteurs liés équipollents au vecteur lié AB. L'origine reste arbitraire dans le plan ou dans l'espace.

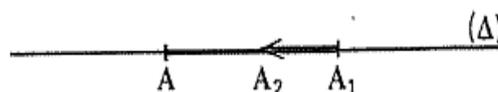
**g. Géométrie sur un axe dirigé**

Soit  $(\Delta)$  un axe dirigé, c'est-à-dire une droite illimitée sur laquelle on choisi un sens positif de parcours (Figure I.4). L'expérience montre que la résultante de deux forces portées par un même axe s'obtient en mettant les vecteurs qui les représentent bout à bout comme le précises la définition suivante:



**Figure I. 4:** Vecteurs portées par un même axe.

La somme géométrique de deux vecteurs glissants  $F_1$  et  $F_2$  sur un axe  $(\Delta)$  est le vecteur  $V$  glissant obtenu de la manière suivante (Figure I.5) : on ramène par un point  $A$  quelconque de  $(\Delta)$  le vecteur  $AA_1$  équipollent à  $F_1$ , puis par  $A_1$  le vecteur  $A_1A_2$  équipollent à  $F_2$ . Alors le vecteur glissant  $F=AA_2$  équipollent est la somme  $F_1+F_2$ . Soit  $AA_2=AA_1+A_1A_2$  soit  $F=F_1+F_2$



**Figure I. 5:** Représentation géométrique de la somme de deux vecteurs.

L'addition des vecteurs possède les mêmes propriétés que celle des scalaires, soit :

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \vec{V}_2 + \vec{V}_1$$

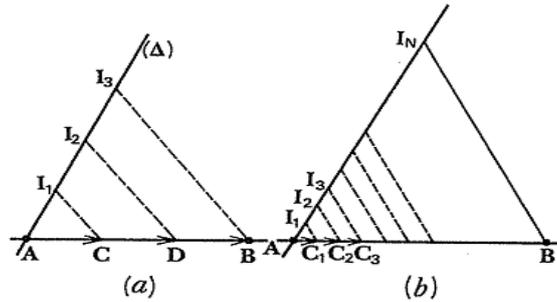
$$\vec{V}_1 + (\vec{V}_2 + \vec{V}_3) = (\vec{V}_1 + \vec{V}_2) + \vec{V}_3$$

$$\vec{V}_1 + \vec{0} = \vec{V}_1$$

Chaque vecteur  $\vec{V} = \overrightarrow{AB}$  possède un opposé  $-\vec{V} = \overrightarrow{BA}$ .

**h. Produit d'un vecteur par un scalaire**

**Exemple:** Portons sur  $(\Delta)$  un point  $I_1$  (Figure I.6), puis les graduations  $I_2, I_3, \dots$ , extrémités des vecteurs  $2.\overrightarrow{AI_1}, 3.\overrightarrow{AI_1}, \dots$ etc.



**Figure I. 6:** Représentation du produit d'un vecteur par un scalaire.

Considérons la droite  $I_3B$  et les parallèles à celle-ci menées par  $I_1, I_2$ , qui coupent  $AB$  en  $C$  et  $D$ . D'après le théorème de Thalès nous avons :

$$AC = CD = DB \text{ soit aussi : } AB = 3.AC$$

Une trisection du vecteur  $AB$  ou du segment  $AB$  est réalisée, alors :

$$\vec{AC} = \frac{1}{3} \cdot \vec{AB}, \text{ et } \vec{AD} = \frac{2}{3} \cdot \vec{AB}$$

Les propriétés du produit d'un vecteur par des scalaires sont les suivantes :

$$\lambda \cdot (\vec{V}_1 + \vec{V}_2) = \lambda \cdot V_1 + \lambda \cdot V_2$$

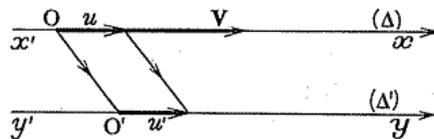
$$(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot \vec{V} = \lambda_1 \cdot \vec{V} + \lambda_2 \cdot \vec{V}$$

$$\lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot \vec{V}) = (\lambda_1 \cdot \lambda_2) \cdot \vec{V}$$

**i. Rapport de deux vecteurs glissants**

Etant donné deux vecteurs glissants  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , on peut trouver par approximation successives un réel  $\lambda$  unique tel que :

$$\vec{v} = \lambda \cdot \vec{u}$$



**Figure I. 7:** Rapport de deux vecteurs glissants.

Si l'on fixe le vecteur  $\vec{u}$ , tout vecteur glissant  $\vec{v}$  est alors caractérisé par le nombre  $\lambda$ , ce qui est très commode. Ce vecteur fixe  $\vec{u}$ , choisi de sens positif sur  $(\Delta)$ , est appelé vecteur unitaire. Le nombre  $\lambda$ , rapport de  $\vec{v}$  à  $\vec{u}$ , est la mesure algébrique de  $\vec{v}$  par rapport à  $\vec{u}$ . Si  $\vec{v} = \vec{AB}$ , on désigne habituellement cette mesure algébrique par  $\vec{AB}$ , soit :

$$\overrightarrow{AB} = \overline{AB} \cdot \vec{u}$$

La valeur absolue de  $\overline{AB}$  précise la notion de vecteur plus ou moins grand. Par ailleurs le signe de  $\overline{AB}$  indique le sens de  $\overrightarrow{AB}$  par rapport à  $\vec{u}$ .

**j. Module ou norme d'un vecteur**

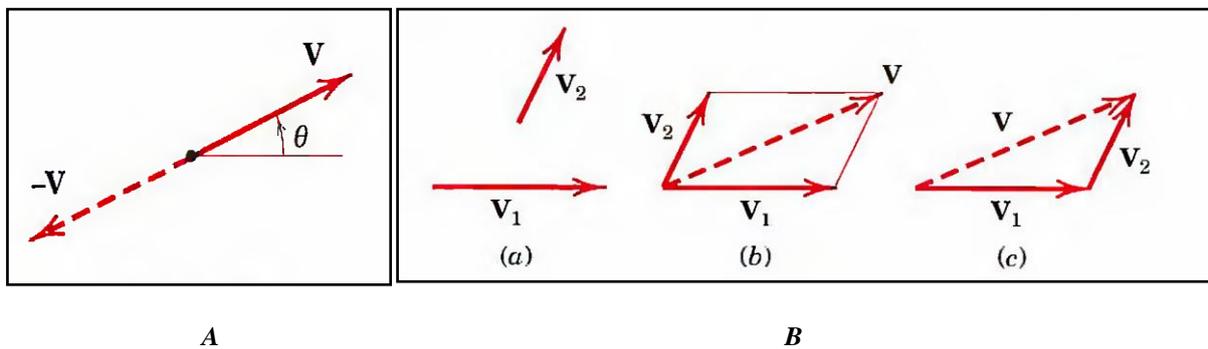
On appelle module ou norme d'un vecteur glissant  $\vec{V} = \overrightarrow{AB}$  par rapport à un vecteur unitaire  $\vec{u}$  la quantité positive  $|\overline{AB}|$  que l'on note  $\|\overrightarrow{AB}\|$ , ou simplement AB.

$$\|\vec{V}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = |\overline{AB}|$$

On appelle distance des deux points A et B, étant donné le vecteur unitaire  $\vec{u}$ , le module du vecteur  $\overrightarrow{AB}$  par rapport à  $\vec{u}$ .

**I.2 Le calcul vectoriel**

La direction du vecteur  $\vec{V}$  peut être mesurée par un angle  $\theta$  par rapport à une direction de référence connue, comme indiqué sur la figure I.8-A. L'opposé du vecteur  $\vec{V}$  est le vecteur  $-\vec{V}$  ayant la même amplitude que  $\vec{V}$  mais dirigé dans le sens opposé à  $\vec{V}$ .



**Figure I. 8:** Addition géométrique de deux vecteurs.

Les vecteurs doivent obéir à la loi de la combinaison de parallélogramme. Cette loi précise que deux vecteurs  $\vec{V}_1$  et  $\vec{V}_2$ , traités comme des vecteurs libres, Figure I.8-B, peuvent être remplacés par leur vecteur équivalent  $\vec{V}$ , qui est la diagonale du parallélogramme formé par les deux côtés  $\vec{V}_1$  et  $\vec{V}_2$ . Cette combinaison s'appelle la somme vectorielle représentée par l'équation vectorielle:

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$$

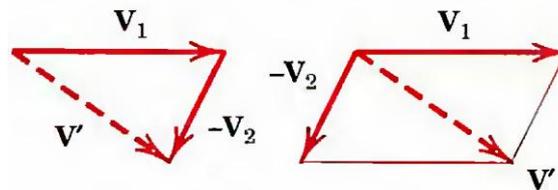
$$\|\vec{V}\| = \|\vec{V}_1\|^2 + \|\vec{V}_2\|^2 - 2 \cdot \|\vec{V}_1\| \cdot \|\vec{V}_2\| \cdot \cos\theta$$

La somme scalaire des grandeurs des deux vecteurs est écrite de la manière habituelle comme  $V_1 + V_2$ . La géométrie du parallélogramme montre que  $\|\vec{V}\| \neq \|\vec{V}_1\| + \|\vec{V}_2\|$ .

Les deux vecteurs  $\vec{V}_1$  et  $\vec{V}_2$ , à nouveau traités comme des vecteurs libres, peuvent également être ajoutés par la loi des triangles, comme le montre la figure I.8-B, pour obtenir la somme vectorielle identique  $\vec{V}$ .

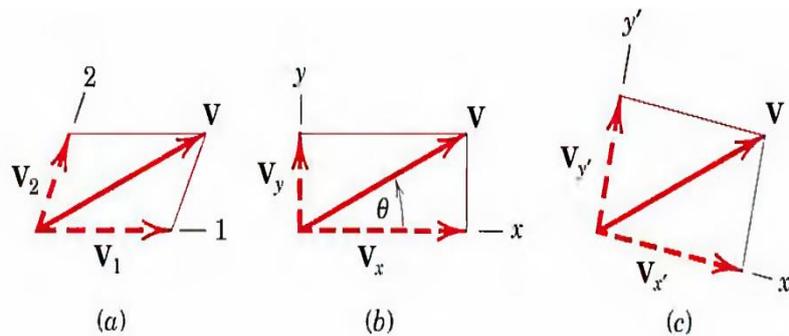
La différence  $\vec{V}_1 - \vec{V}_2$  entre les deux vecteurs est facilement obtenue par l'addition de l'opposé du vecteur  $\vec{V}_2$  ( $-\vec{V}_2$ ) au vecteur  $\vec{V}_1$  comme le montre la figure I.9, où la procédure de triangle ou de parallélogramme peut être utilisée. La différence  $\vec{V}'$  entre les deux vecteurs est exprimée la relation vectoriel suivante, où le signe moins indique une soustraction de vecteur :

$$\vec{V}' = \vec{V}_1 - \vec{V}_2$$



**Figure I. 9:** Soustraction géométrique de deux vecteurs.

On dit que deux ou plusieurs vecteurs dont la somme est égale à un certain vecteur  $\vec{V}$  sont les composants de ce vecteur. Ainsi, les vecteurs  $\vec{V}_1$  et  $\vec{V}_2$  sur la figure I.10 sont les composantes de  $\vec{V}$  dans les directions 1 et 2, respectivement. Il est généralement plus pratique de traiter des composants vectoriels perpendiculaires entre eux. ceux-ci sont appelés composants rectangulaires. Les vecteurs  $\vec{V}_x$  et  $\vec{V}_y$  sur la Fig. 1/4b sont les composantes x et y respectivement du vecteur  $\vec{V}$ .



**Figure I. 10:** Composante d'un vecteur dans un repère quelconque.

De même, sur la figure I.10,  $\vec{V}_{x'}$  et  $\vec{V}_{y'}$  sont les composantes x' et y' de  $\vec{V}$ . Lorsqu'elles sont exprimées en composantes rectangulaires, la direction du vecteur par rapport à l'axe des x, par exemple, est clairement spécifiée. par l'angle  $\theta$ , où:

$$\theta = \tan^{-1} \cdot \frac{V_y}{V_x}$$

Le module et la direction du vecteur sont commodément contenues dans une expression mathématique. Dans de nombreux problèmes, en particulier ceux en trois dimensions, il convient d'exprimer les composantes rectangulaires de  $\vec{V}$ , Figure I.11, en termes de vecteurs unitaires  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  et  $\vec{k}$ , qui sont des vecteurs dans les directions x, y et z respectivement, avec des magnitudes unitaires. Comme le vecteur V est la somme vectorielle des composants dans les directions x, y et z, nous pouvons exprimer  $\vec{V}$  comme suit:

$$\vec{V} = V_x \cdot \vec{i} + V_y \cdot \vec{j} + V_z \cdot \vec{k}$$

D'où ;  $V_x = V \cdot \cos \theta_x$        $V_y = V \cdot \cos \theta_y$        $V_z = V \cdot \cos \theta_z$

d'où, du théorème de Pythagore le module de vecteur  $\vec{V}$  est donné par :

$$V^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2$$

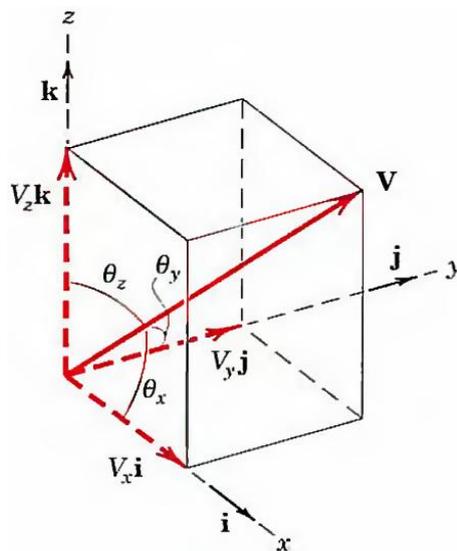


Figure I. 11: Représentation et composantes d'un vecteur dans l'espace.

**Exemple 1:**

Déterminer l'angle construit par le vecteur  $\vec{V} = -10 \cdot \vec{i} + 24 \cdot \vec{j}$  et l'axe positive x. Ecrire le vecteur unitaire dans la direction du vecteur  $\vec{V}$ .

**Solution 1:**

$$V_x = V \cdot \cos \theta_x \quad V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{(-10)^2 + 24^2} = 26$$

On a :  $\cos \theta_x = V_x/V$        $\cos \theta_x = -\frac{10}{26}$        $\theta_x = 112,6$

Le vecteur  $V$  s'écrit sous la forme :  $\vec{V} = V \cdot \vec{u} = -10 \cdot \vec{i} + 24 \cdot \vec{j}$

$$\vec{u} = \frac{\vec{V}}{V} = \frac{-10 \cdot \vec{i} + 24 \cdot \vec{j}}{26} = -0,385\vec{i} + 0,923\vec{j}$$

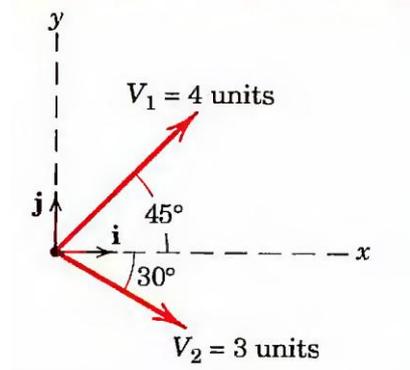
**Exemple 2 :**

Pour les deux vecteurs  $\vec{V}_1$  et  $\vec{V}_2$  représentés dans la figure,

a) - Déterminer le module du vecteur  $\vec{S} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$  .

- Déterminer l'angle  $\theta$  entre le vecteur  $\vec{S}$  et l'axe positif x

- Ecrire le vecteur  $\vec{S}$  en termes de vecteurs unitaires  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$ , et écrire aussi le vecteur unitaire  $\vec{u}$  le long du vecteur  $\vec{S}$ .



b) Déterminer le vecteur  $\vec{D} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2$

**Solution 2 :**

a)

- $\vec{S} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$  , Alors  $S = V_1^2 + V_2^2 - 2 \cdot V_1 \cdot V_2 \cdot \cos \beta$

$$\beta = 105 = [360 - 2 \cdot (30 + 45)]/2$$

$$S = 5,59$$

- On utilisant la loi des sinus dans le triangle construit par  $\vec{S}, \vec{V}_1$  et  $\vec{V}_2$  :

$$\frac{S}{\sin 105} = \frac{V_1}{\sin(\varphi)} \quad \text{d'ou : } \sin \varphi = \frac{V_1}{S} \cdot \sin 105 = \left(\frac{4}{5,59}\right) \cdot \sin 105 = 0,69$$

$$\varphi = 43,72 \quad \text{donc } \alpha = \varphi - 30 = 13,72$$

- $\vec{S} = S_x \cdot \vec{i} + S_y \cdot \vec{j}$

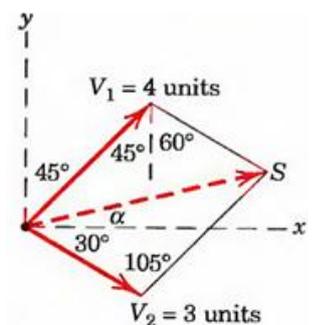
$$S_x = S \cdot \cos \alpha = 5,43 \quad , \quad S_y = S \cdot \sin \alpha = 1,32$$

- $\vec{S} = 5,43 \cdot \vec{i} + 1,32 \cdot \vec{j}$

b)  $\vec{D} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2 = (4 \cdot \cos 45 \cdot \vec{i} + 4 \cdot \sin 45 \cdot \vec{j}) + [-(3 \cdot \cos 30 \cdot \vec{i} - 3 \cdot \sin 30 \cdot \vec{j})]$

$$\vec{D} = 2,83 \cdot \vec{i} + 2,83 \cdot \vec{j} - 2,60 \vec{i} + 1,5 \cdot \vec{j}$$

$$\vec{D} = 0,23 \cdot \vec{i} + 4,33 \cdot \vec{j}$$



### I.3 Produit scalaire

Pour un couple de vecteurs  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$ , on peut correspondre un nombre réel appelé produit scalaire de  $\vec{A}$  par  $\vec{B}$ , noté  $\vec{A} \cdot \vec{B}$ . Il s'écrit :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot B \cdot \cos(\vec{A}, \vec{B})$$

- Si  $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$  alors  $\vec{A}$  perpendiculaire à  $\vec{B}$ .
- Un vecteur est unitaire si son module est égal à 1.

### I.4 Produit Vectoriel

Soient  $\vec{A}, \vec{B}$  trois vecteurs quelconques de l'espace vectoriel à trois dimensions qui sont rapportés à une base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  orthonormée et directe.

Le produit vectoriel  $\vec{A}_1 \wedge \vec{B}_2$  s'écrit :

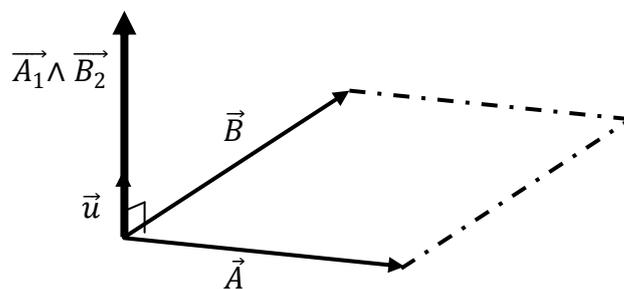
$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \text{Det} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = (A_y \cdot B_z - B_y \cdot A_z) \cdot \vec{i} - (A_x \cdot B_z - B_x \cdot A_z) \cdot \vec{j} + (A_x \cdot B_y - B_x \cdot A_y) \cdot \vec{k}$$

Le produit vectoriel est déterminé autrement :

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = A \cdot B \cdot \sin(\vec{A}, \vec{B}) \cdot \vec{u}$$

$\vec{u}$  étant le vecteur unitaire du produit vectoriel  $\vec{A} \wedge \vec{B}$ , dirigé perpendiculairement à  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$ .



- Si le produit vectoriel  $\vec{A}_1 \wedge \vec{B}_2 = \vec{0}$ , Alors les deux vecteur sont parallèles.

## **Chapitre II**

### **Les forces et les moments**

## II. Les forces et les moments

### II.1 Définition d'une force

Une force est toute cause capable de modifier la forme ou le mouvement d'un objet sur lequel elle s'applique.

#### Exemples:

**Force de pesanteur (Force d'attraction) :** Un objet posé sur une table, la masse de l'objet exerce une force sur la table. La force de pesanteur est égale à :

$$P = m.g \quad m(\text{Kg}) : \text{masse du corps}, \quad g(\text{m/s}^2) : \text{l'accélération de la pesanteur.}$$

L'unité de la force de pesanteur est  $\mathbf{m.Kg/s^2}$ , avec le système international la force est mesurée en Newton  $N$ . Alors,  $N = m.Kg/s^2$ .

**Force de gravitation ( $F_g$ ):** Dans le cas d'un objet assez éloigné de terre, la force de pesanteur subie par l'objet de masse  $m$  n'est plus égale à  $F = m.g$ . Cette formule doit être remplacée par une formule plus générale :

$$F_g = m.(M.G)/d^2$$

$M$  (Kg) : La masse de la terre, ou l'objet qui attire la masse  $m$ .

$d$ (m) : La distance entre le centre de l'objet  $m$  et du corps  $M$ .

$G$ ( $N.m^2/kg^2$ ) : est la constante universelle de la gravitation.

**Force motrice :** Le moteur d'une voiture exerce une force qui permet de la mettre en mouvement.

**Force de frottement :** Les freins de la voiture exerce une force pour diminuer la vitesse.

**Force ou pousser d'Archimède:** L'eau exerce une force sur les objets (bateau, Personne) pour les permet de flotter.

**Moment de force :** Un moteur fait tourner un ventilateur, le moteur exerce un moment de force sur le ventilateur.

### II.2 Les systèmes de forces dans l'espace

Les systèmes de forces sont classés en trois catégories :

- **Concourants** : les lignes d'action de toutes les forces du système passent par un même point. C'est ce que l'on appelle forces concourantes en un point.

- **Parallèles** : les lignes d'actions des forces sont toutes parallèles, on dit aussi elles s'intersectent à l'infini

- **Non concourantes et non parallèles** : les forces ne sont pas toutes concourantes et pas toutes parallèles.

### II.3 Les Forces

#### II.3.1 L'aspect vectoriel des forces

Nous remarquons que pour soulever un objet, il faut exercer une force vers le haut. Pour traîner un sac par terre, vers une porte, il faut exercer une force dans la direction de la porte. L'intensité d'une force n'est qu'une des caractéristiques des forces en physique.

Une force est une grandeur caractérisée par 4 quantités (Figure II.1) :

- Une intensité qui peut se mesurer avec un dynamomètre.
- Une direction,      - Un sens,      - Un point d'application.

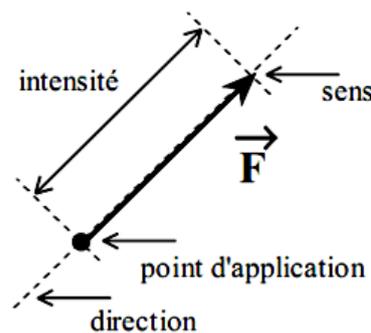


Figure II. 1: Caractéristique d'un vecteur de force.

#### II.3.2 Composantes d'une force

Soit une force  $\vec{F}$ , appliquée à l'origine O d'un repère orthonormé  $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  (Figure II.2).

Les composantes de cette force sont définies par :

$$\vec{F} = \vec{F}_H + \vec{F}_z = \vec{F} \sin \theta + \vec{F} \cos \theta = \vec{F} \sin \theta \cos \varphi + \vec{F} \cos \theta \sin \varphi + \vec{F} \cos \theta$$

$$\vec{F} = \vec{F} \sin \theta \cos \varphi \vec{i} + \vec{F} \cos \theta \sin \varphi \vec{j} + \vec{F} \cos \theta \vec{k}$$

$$\vec{F} = \vec{F}_x \vec{i} + \vec{F}_y \vec{j} + \vec{F}_z \vec{k}$$

Avec :  $\vec{F}_x = \vec{F} \sin \theta \cos \varphi$ ,  $\vec{F}_y = \vec{F} \cos \theta \sin \varphi$  et  $\vec{F}_z = \vec{F} \cos \theta$

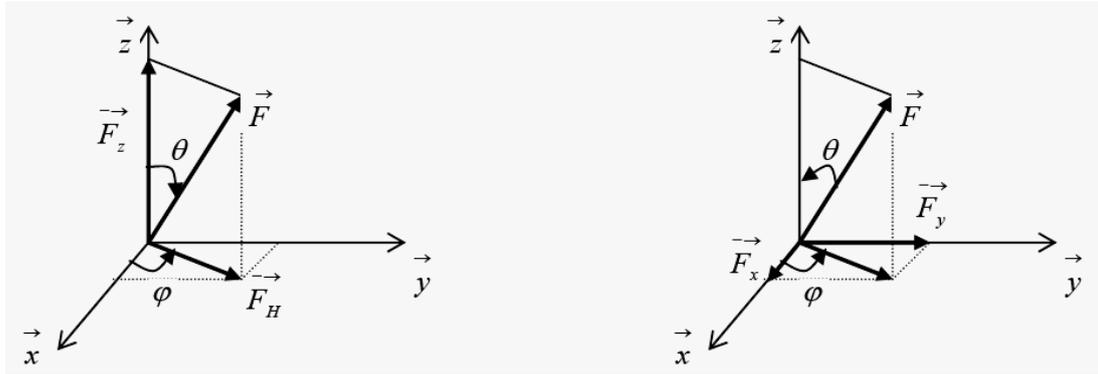


Figure II. 2: Composante d'une force dans l'espace.

### II.3.3 Cosinus directeurs

Les projections de la force  $\vec{F}$  sur les trois axes  $ox$ ,  $oy$ ,  $oz$  donnent respectivement les angles  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  et  $\theta_z$  (Figure II.3), nous aurons alors :

$$F_x = F \cdot \cos \theta_x, \quad F_y = F \cdot \cos \theta_y, \quad F_z = F \cdot \cos \theta_z,$$

Si  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  sont les vecteurs unitaires du repère nous aurons :

$$\vec{F} = F_x \cdot \vec{i} + F_y \cdot \vec{j} + F_z \cdot \vec{k}$$

$$\vec{F} = F \cdot (\cos \theta_x \cdot \vec{i} + \cos \theta_y \cdot \vec{j} + \cos \theta_z \cdot \vec{k}) = F \cdot \vec{\lambda}$$

avec :  $\vec{\lambda} = (\cos \theta_x \cdot \vec{i} + \cos \theta_y \cdot \vec{j} + \cos \theta_z \cdot \vec{k}) = F \cdot \vec{\lambda}$

Le vecteur  $\vec{\lambda}$  a la même direction que la force  $\vec{F}$  et pour module 1.

$$\lambda = \sqrt{\cos^2 \theta_x + \cos^2 \theta_y + \cos^2 \theta_z} = 1$$

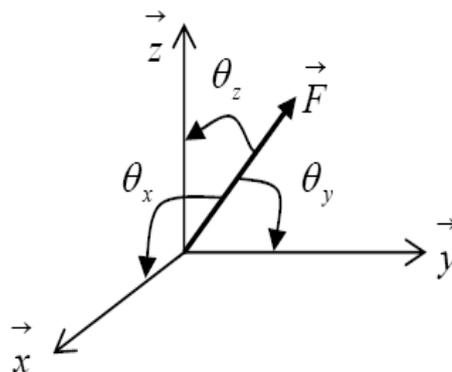
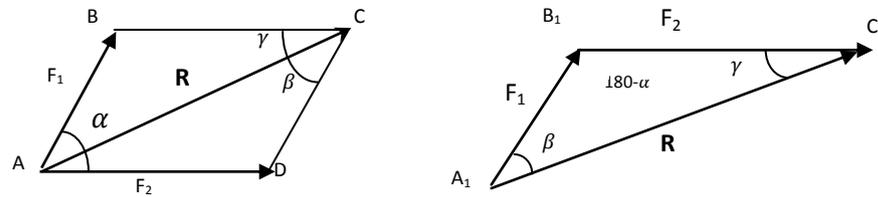


Figure II. 3: Cosinus directeur d'une force dans l'espace.

**II.4 Résultante d'un ensemble des forces concourantes**

**II.4.1 Résultante de deux force**

On peut déterminer la somme géométrique  $R$  des deux forces  $F_1$  et  $F_2$  soit en utilisant la méthode parallélogramme ou construire la triangle des forces (Figure II.4).



**Figure II. 4:** Représentation géométrique d'une somme de deux forces concourantes.

avec :

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos(180 - \alpha)$$

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha}$$

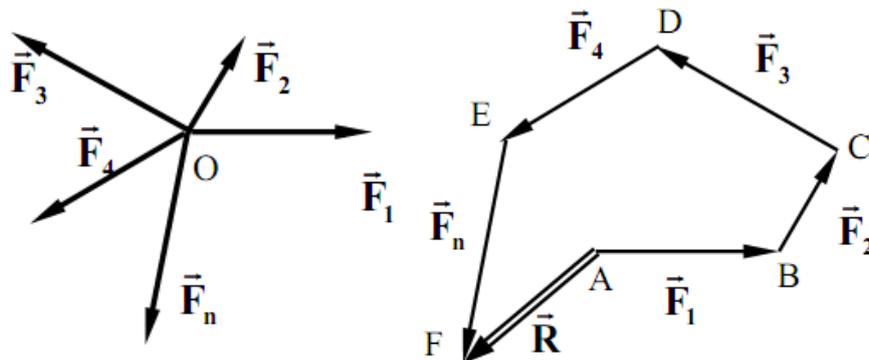
On peut aussi déterminer les angles  $\beta$  et  $\gamma$  avec la loi de sinus suivante :

$$\frac{F_1}{\sin \gamma} = \frac{F_2}{\sin \beta} = \frac{R}{\sin \alpha} \quad \text{avec} \quad \sin(180 - \alpha) = \sin \alpha$$

**II.4.2 Résultante de plusieurs forces**

**a. Solution Graphique "Règle du polygone des forces"**

Pour la construction du polygone des forces, on respect le sens et la direction de chaque force. Tout d'abord, on place l'origine du vecteur  $\vec{F}_2$  à l'extrémité du vecteur  $\vec{F}_1$ , puis de placer l'origine de  $\vec{F}_3$  à l'extrémité de  $\vec{F}_2$ , ....etc. en joignant le point d'application des forces et extrémité de  $\vec{F}_n$ , on obtient la résultante  $\vec{R}$ . Le polygone ABCDEF constitué par les forces est appelé polygone des forces (Figure II.5), et le vecteur  $\vec{R}$  vecteur fermant le polygone s'appelle la résultante des forces.



**Figure II. 5:** Résultante de plusieurs forces concourantes (Polygone des forces).

La résultante est représentée par la somme :

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$$

ou sous la forme :

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

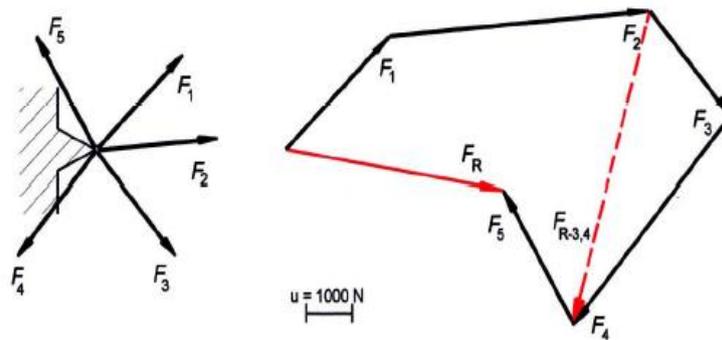
La résultante d'un système de forces concourantes est égale à la somme vectorielle de ces forces. La résultante est appliquée au point d'intersection des lignes d'action des forces. L'origine de la résultante doit coïncider avec l'origine de la première force et l'extrémité de la résultante doit coïncider avec l'extrémité de la dernière force.

**Exemple:**

Le point A fixe est soumis à l'action de 5 force coplanaires concourantes dont les valeurs de définition sont :

$$\vec{F}_1 = 3300 \text{ N}, 45^\circ, \vec{F}_2 = 5700 \text{ N}, 5^\circ, \vec{F}_3 = 2650 \text{ N}, 310^\circ, \vec{F}_4 = 5400 \text{ N}, 30^\circ, \vec{F}_5 = 3150 \text{ N}, 120^\circ$$

remplacer cette ensemble de forces par une résultante.



**b. Solution analytique**

La recherche de la résultante de plusieurs forces concourantes par la méthode analytique fait intervenir le théorème de la projection de la somme de plusieurs vecteurs sur un axe; Les composantes sont projetées sur un système d'axes orthonormés Oxy. Si  $\alpha$  représente l'angle compté positivement entre l'axe Ox et la direction positive de la force, la projection sur l'axe Ox de chacune des composantes s'écrit :

$$\begin{aligned} F_{1x} &= F_1 \cos \alpha_1 \\ F_{2x} &= F_2 \cos \alpha_2 \\ F_{3x} &= F_3 \cos \alpha_3 \\ &\dots\dots\dots \\ F_{nx} &= F_n \cos \alpha_n \end{aligned}$$

La projection de la résultante  $\vec{R}$  sur l'axe Ox vaut :

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + \dots + F_{nx}$$

Sous forme généralisée, cette forme s'écrit :

$$R_x = \sum_{i=1}^n F_i \cos \alpha_i$$

De même, la projection des composante sur l'axe Oy s'écrivent :

$$F_{1y} = F_1 \sin \alpha_1$$

$$F_{2y} = F_2 \sin \alpha_2$$

$$F_{3y} = F_3 \sin \alpha_3$$

.....

$$F_{ny} = F_n \sin \alpha_n$$

La projection de la résultante  $\vec{R}$  sur l'axe Oy vaut :

$$R_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + \dots + F_{ny}$$

Sous forme généralisée, cette forme s'écrit :

$$R_y = \sum_{i=1}^n F_i \sin \alpha_i$$

La résultante  $\vec{R}$  doit se définir en module, direction et sens. Comme les axes sont orthonormés, le module de la résultante se calcul en appliquant le théorème de Pythagore :

$$|\vec{R}| = +\sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

La direction et le sens de la force résultante sont trouvés à partir des projections sur l'axes de coordonnées :

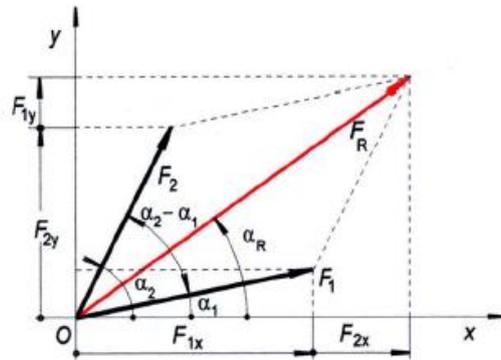
$$\tan \alpha_R = \frac{R_y}{R_x}$$

Le sens de  $R_x$  et  $R_y$  fixent la position du vecteur résultant dans le plan. En effet, on aura :

- La résultante est située dans le premier quadrant :  $R_x (+)$  et  $R_y (+)$
- La résultante est située dans le deuxième quadrant :  $R_x (-)$  et  $R_y (+)$
- La résultante est située dans le troisième quadrant :  $R_x (-)$  et  $R_y (-)$
- La résultante est située dans le quatrième quadrant :  $R_x (+)$  et  $R_y (-)$

**Exemple:**

Trouver la résultante, par voie analytique, de deux force  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$  concourantes d'inclinaison  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  par rapport à l'axe Ox.



Les projections des deux forces sur les axes orthonormés Ox et Oy valent :

$$F_{Rx} = F_1 \cdot \cos \alpha_1 + F_2 \cdot \cos \alpha_2$$

$$F_{Ry} = F_1 \cdot \sin \alpha_1 + F_2 \cdot \sin \alpha_2$$

En remplaçant  $F_{Rx}$  et  $F_{Ry}$  par les valeurs des projections dans l'expression du module de la résultante, on obtient :

$$|\vec{F}_R| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 F_2 \cdot \cos(\alpha_1 - \alpha_2)}$$

l'inclinaison de la force résultante par rapport à l'axe Ox vaut:

$$\tan \alpha_R = \frac{F_1 \cdot \sin \alpha_1 + F_2 \cdot \sin \alpha_2}{F_1 \cdot \cos \alpha_1 + F_2 \cdot \cos \alpha_2}$$

Ce résultat correspond à la construction de la diagonale du parallélogramme au moyen des deux forces.

**II.4.3 Décomposition de forces**

**a. Dans deux directions**

Il est souvent avantageux de remplacer une force  $\vec{F}$  par deux forces  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$ , dont l'action combinée est identique à celle de par deux forces  $\vec{F}$ . Les force  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$  sont alors les composantes de la résultantes  $\vec{F}$ .

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

Afin de déterminer les composantes d'une force  $\vec{F}$ , il faut d'abord judicieusement choisir les direction suivant lesquelles on va les décomposer. Ensuite, on trace des rayons suivant ces

directions en partant de l'origine de  $\vec{F}$ . On construit alors le parallélogramme dont la diagonale est  $\vec{F}$ . Les côtés de ce parallélogramme constituent les composantes  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$  (Figure II.6).

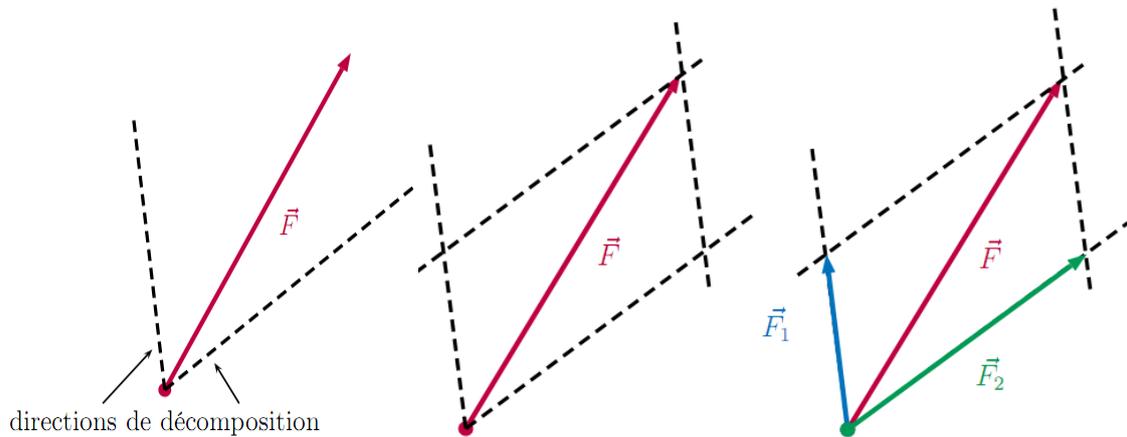


Figure II. 6: Décomposition d'une force sur deux directions quelconque.

**b. Décomposition d'une force dans trois directions**

Si les trois directions sont connues et n'appartient pas un seul plan, la décomposition d'une force  $\vec{F}$  sur ces trois directions ramène à la construction d'un parallélépipède où la force  $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$  représente son diagonal (Figure II.7).

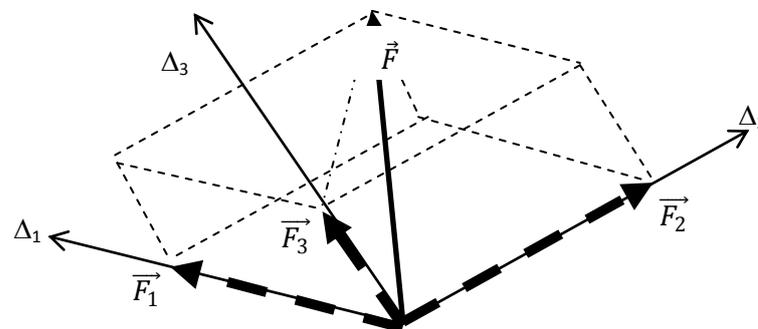


Figure II. 7: Décomposition d'une force sur trois directions quelconque.

**II.5 Moment d'une force par rapport à un point**

**II.5.1 Définition du moment d'une force par rapport à un point**

Le moment d'une force  $\vec{F}$  par rapport à un point  $O$  est égal au produit vectoriel du rayon vecteur  $\mathbf{r} = \mathbf{OA}$  ; joignant le point  $O$  à l'origine  $A$  de la force, par la force  $\vec{F}$  elle-même (Figure II.8).

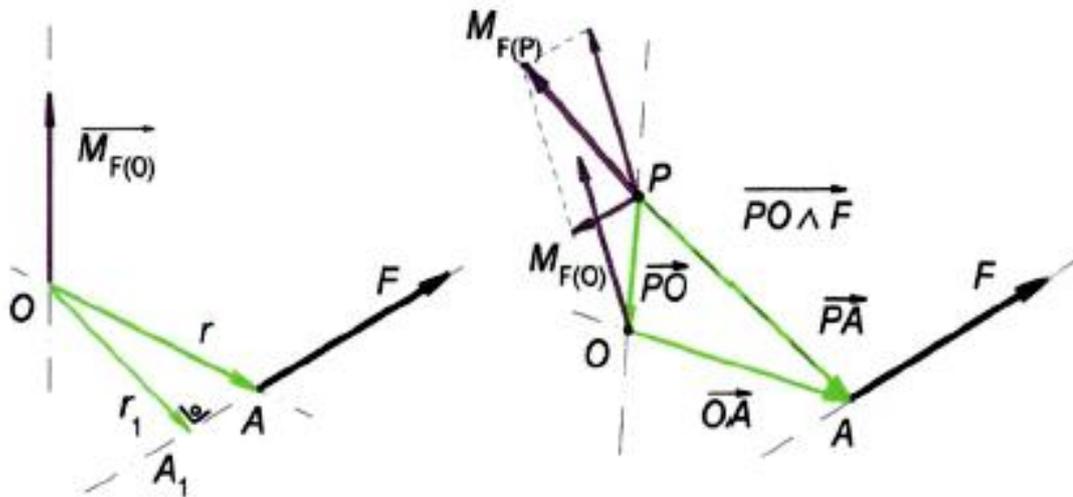


Figure II. 8: Représentation d'un moment d'une force par rapport à un point.

**Remarques**

1. Le moment de la force par rapport à un point est une grandeur vectorielle liée au point ayant pour origine le point considéré.
2. La définition du moment de la force est indépendante de la position du point A choisi sur la ligne d'action de la force  $\vec{F}$ . En effet, on peut écrire :

$$(\vec{r}_1 + \overrightarrow{A_1A}) \wedge \vec{F} = \vec{r}_1 \wedge \vec{F} + \overrightarrow{A_1A} \wedge \vec{F}.$$

Le produit vectoriel  $\overrightarrow{A_1A} \wedge \vec{F}$  est nul car les deux vecteurs  $\overrightarrow{A_1A}$  et  $\vec{F}$  sont alignés. Ainsi :

$$(\vec{r}_1 + \overrightarrow{A_1A}) \wedge \vec{F} = \vec{r}_1 \wedge \vec{F}$$

3. Le moment d'une force par rapport à un point est très souvent défini comme le produit de la force par son « bras de levier ». Cette définition est incorrecte au point de vue vectoriel.
4. Système d'unités : la force  $\vec{F}$  s'exprime en newtons, la longueur du rayon vecteur  $r$  en mètres. En conservant la définition fondamentale, le moment d'une force par rapport à un point doit se donner en  $m.N$ .

Certains auteurs utilisent le newton – mètre comme unité du moment de force, le symbole étant N m. Cela permet d'éviter de confondre le m.N avec le millinewton mN.

**II.5.2 Expression du moment d'une force dans un système orthonormé trirectangle**

Le moment de la force  $\vec{F}$  par rapport au point  $O$  étant représenté par le produit vectoriel de  $\vec{r} \wedge \vec{F}$ , les vecteurs  $\vec{r}$  et  $\vec{F}$  peuvent s'exprimer en fonction de leurs projections sur le système d'axes orthonormé trirectangle par :

$$\vec{r} = \vec{r}_x + \vec{r}_y + \vec{r}_z = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$$

$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z = F_x.\vec{i} + F_y.\vec{j} + F_z.\vec{k}$$

Le produit vectoriel s'écrit alors :

$$\vec{M}_{\vec{F}(O)} = \vec{r} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Ou encore :  $\vec{M}_{\vec{F}(O)} = \vec{r} \wedge \vec{F} = (y.F_z - z.F_y).\vec{i} - (x.F_z - F_x.z).\vec{j} + (x.F_y - F_x.y).\vec{k}$

Le moment de la force  $\vec{F}$  par rapport au point  $O$  peut aussi s'exprimer en fonction des composantes de ce moment dans le système orthonormé trirectangle. L'expression devient :

$$\vec{M}_{\vec{F}(O)} = \vec{M}_x + \vec{M}_y + \vec{M}_z = M_x.\vec{i} + M_y.\vec{j} + M_z.\vec{k}$$

En comparant cette expression avec l'expression développée précédemment, on obtient :

$$M_x = (y.F_z - z.F_y)$$

$$M_y = (F_x.z - x.F_z)$$

$$M_z = (x.F_y - F_x.y)$$

Les moments  $M_x, M_y, M_z$ , sont les composantes scalaires du moment de la force  $\vec{F}$  par rapport au point  $O$ .

### II.5.3 Moment d'une force par rapport à deux points différents

Soient une force  $\vec{F}$  et deux points quelconques  $O$  et  $P$ . Le moment de la force  $\vec{F}$  par rapport au point  $O$  vaut :

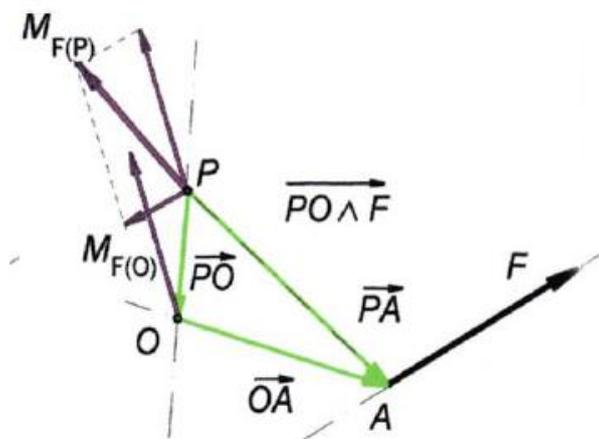


Figure II. 9 : Moment d'une force par rapport à deux points différents.

$$\vec{M}_{\vec{F}(O)} = \vec{OA} \wedge \vec{F}$$

Le moment de la même force  $F$  par rapport au point  $P$  se calcule par une expression semblable :

$$\vec{M}_{\vec{F}(P)} = \vec{PA} \wedge \vec{F}$$

Le vecteur  $\vec{PA}$  est égal à la somme des rayons vecteurs  $\vec{PO}$  et  $\vec{OA}$ , soit :

$$\vec{PA} = \vec{PO} + \vec{OA}$$

Le moment de la force  $\vec{F}$  par rapport au point  $P$  s'exprime aussi par :

$$\vec{M}_{\vec{F}(P)} = \vec{PA} \wedge \vec{F} = (\vec{PO} + \vec{OA}) \wedge \vec{F} = \vec{PO} \wedge \vec{F} + \vec{OA} \wedge \vec{F}$$

Cette expression se transforme en :

$$\vec{M}_{\vec{F}(P)} = \vec{M}_{\vec{F}(O)} + \vec{PO} \wedge \vec{F}$$

Le produit vectoriel  $\vec{PO} \wedge \vec{F}$  est perpendiculaire au plan formé par les vecteurs  $\vec{PO}$  et  $\vec{F}$ .

#### II.5.4 Moments de plusieurs forces par rapport à un même point

Comme le moment d'une force par rapport à un point est une grandeur vectorielle, le moment total de plusieurs forces par rapport à un même point est égal à la somme vectorielle des moments de chacune des forces par rapport à ce même point.

$$\vec{M}_O = \vec{M}_{\vec{F}_1(O)} + \vec{M}_{\vec{F}_2(O)} + \vec{M}_{\vec{F}_3(O)} + \dots + \vec{M}_{\vec{F}_n(O)}$$

Ou encore :

$$\vec{M}_O = \vec{r}_1 \wedge \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \wedge \vec{F}_2 + \vec{r}_3 \wedge \vec{F}_3 + \dots + \vec{r}_n \wedge \vec{F}_n$$

Les composantes scalaires du moment total se calculeront par les expressions généralisées suivantes :

- Moment sur  $Ox$  :  $M_x = \sum_{i=1}^n (y_i \cdot F_{iz} - z_i \cdot F_{iy})$

- Moment sur  $Oy$  :  $M_y = \sum_{i=1}^n (z_i \cdot F_{ix} - x_i \cdot F_{iz})$

- Moment sur  $Oz$  :  $M_z = \sum_{i=1}^n (x_i \cdot F_{iy} - y_i \cdot F_{ix})$

L'expression du moment total de l'ensemble des forces par rapport au même point sera :

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i$$

### Cas particulier de forces coplanaires avec le point

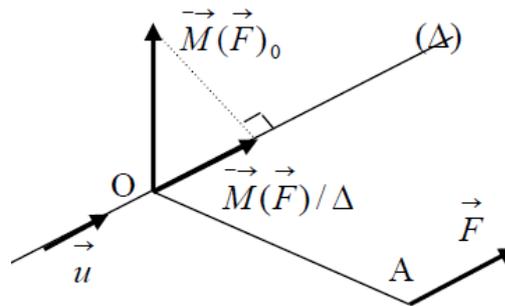
Toutes les forces et le point sont situés dans le même plan. Le moment total de l'ensemble des forces coplanaires avec le point est égal à la *somme algébrique* des moments de chacune des forces par rapport au même point  $O$ . Si toutes les forces sont placées sur le plan  $x O y$ , le moment résultant de toutes les forces vaut :

$$M_{(O)} = \sum_{i=1}^n (x_i \cdot F_{iy} - y_i \cdot F_{ix})$$

#### II.5.5 Moment d'une force par rapport à un axe

Soit  $O$  un point sur l'axe  $(\Delta)$  et  $\vec{u}$  vecteur unitaire porté par cet axe. On détermine le moment par rapport au point  $O$ , noté :  $\vec{M}_{(\vec{F})/O}$ , sa projection sur l'axe  $(\Delta)$  est donnée par :

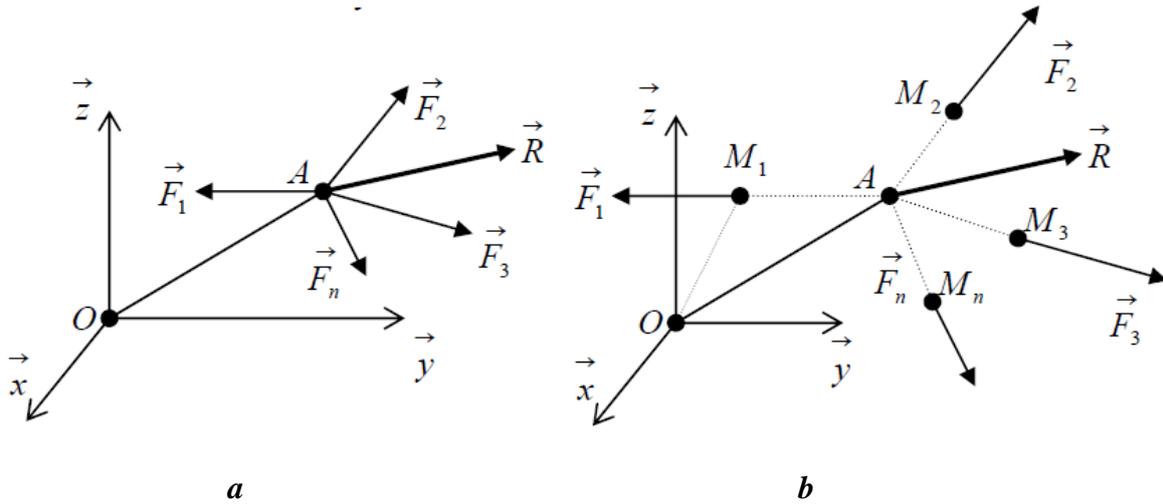
$$\vec{M}_{(\vec{F})/\Delta} = (\vec{M}_{\vec{F}/O} \cdot \vec{u}) \cdot \vec{u}$$



**Figure II. 10:** Représentation d'un moment d'une force par rapport à un axe.

#### II.5.6 Théorème de VARIGNON

Le moment d'un système de forces concourantes en un point  $A$  par rapport à un point  $O$  est égal au moment de la résultante des forces par rapport au point  $O$ . Dans les deux cas de figure nous montrerons que le moment résultant est égal au moment de la résultante des forces du système.



**Figure II. 11:** Moment de plusieurs forces concourantes (Théorème de VARIGNON).

**Figure II.11-a :** Nous avons  $\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i(A)$  et le moment au point O est donné par :

$$\vec{M}_{(\vec{R})/O} = \sum_i \vec{M}_i(\vec{F}_i) = (\vec{OA} \wedge \vec{F}_1 + \vec{OA} \wedge \vec{F}_2 + \dots + \vec{OA} \wedge \vec{F}_n)$$

$$\vec{M}_{(\vec{R})/O} = \vec{OA} \wedge (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n) = \vec{OA} \wedge \sum_i \vec{F}_i = \vec{OA} \wedge \vec{R}$$

**Figure II.11-b :** Nous avons  $\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i(M_i)$

$$\vec{OM}_1 = \vec{OA} + \vec{AM}_1, \vec{OM}_2 = \vec{OA} + \vec{AM}_2, \dots, \vec{OM}_n = \vec{OA} + \vec{AM}_n$$

$$\sum_i \vec{M}_i(F_i)_{/O} = \vec{OM}_1 \wedge \vec{F}_1 + \vec{OM}_2 \wedge \vec{F}_2 + \dots + \vec{OM}_n \wedge \vec{F}_n$$

$$\sum_i \vec{M}_i(F_i)_{/O} = (\vec{OA} + \vec{AM}_1) \wedge \vec{F}_1 + (\vec{OA} + \vec{AM}_2) \wedge \vec{F}_2 + \dots + (\vec{OA} + \vec{AM}_n) \wedge \vec{F}_n$$

avec :  $\vec{AM}_i \parallel \vec{F}_i \implies \vec{AM}_i \wedge \vec{F}_i = \vec{0}$  on obtient finalement :

$$\sum_i \vec{M}_i(F_i)_{/O} = \vec{OA} \wedge \sum_i \vec{F}_i = \vec{M}_{(\vec{R})/O}$$

### II.5.7 Moment d'un couple de forces

Un couple de force est défini par deux forces de même module, de sens opposées et portées par deux droites parallèles tel que :  $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$

$$\sum_i \vec{M}_i(F_i)_{/O} = \vec{M}_1(F_1)_{/O} + \vec{M}_2(F_2)_{/O}$$

$$\sum_i \vec{M}_i(F_i)_{/O} = \vec{OA}_1 \wedge \vec{F}_1 + \vec{OA}_2 \wedge \vec{F}_2 = (-\vec{OA}_1 + \vec{OA}_2) \wedge \vec{F}_2 = \vec{A_1A_2} \wedge \vec{F}_2$$

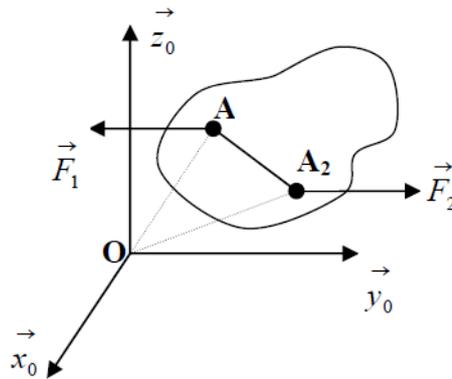


Figure II. 12: Le moment d'un couple de force.

La somme des forces, est nulle mais le moment n'est pas nul. Un couple de force produit uniquement un mouvement de rotation. Le moment d'un couple est indépendant du point où on le mesure, il dépend uniquement de la distance qui sépare les deux droites supports des deux forces.

- Un couple ne peut jamais être remplacé par une force unique ;
- Un système force couple tel que  $\vec{F} \perp \vec{M}$  peut toujours se réduire en une résultante unique. On choisit la résultante des forces au point  $O$  où s'applique le moment de telle sorte que son propre moment soit nul et le moment en ce point serait égal à la somme des moments de toutes les forces du système.

## II.6 Les forces extérieures

On appelle forces extérieures ou charges les forces appliquées connues sur une structure donnée. Suivant le cas, ces charges peuvent être réparties avec une densité donnée de volume (poids propre d'une structure) ou concentrées en un certain nombre de points. Dans cette catégorie de forces extérieures figure aussi les réactions d'appuis.

### II.6.1 Force concentrée

Une force est dite force concentrée si elle est appliquée à un point (Exemple : Contact Ponctuel). La force concentrée peut être un poids, une force appliquée sur un corps en un point ou une réaction des liaisons (Appuis simples, articulations, rotules,...).

*Action mécanique de ② sur ① transmissible à travers une liaison ponctuelle parfaite*

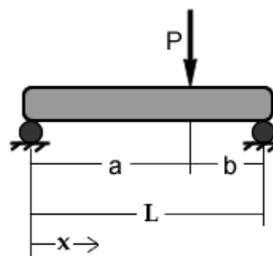
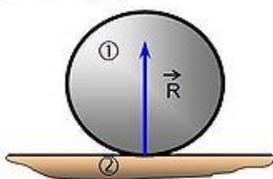


Figure II. 13 : Représentation d'une force concentrée.

### II.6.2 Force répartie

#### a. Charge uniformément répartie

Une charge uniformément répartie ou distribuée est une charge ( $q$ ) qui agit sur une distance considérable de la poutre ( $d$ ), et de façon uniforme ( $q=\text{constante}$ ), c'est-à-dire la charge sollicitante par unité de longueur [N/m] de la poutre est constante. Par exemple: Le poids de la poutre, lui aussi, est une charge uniformément répartie sur toute sa longueur.

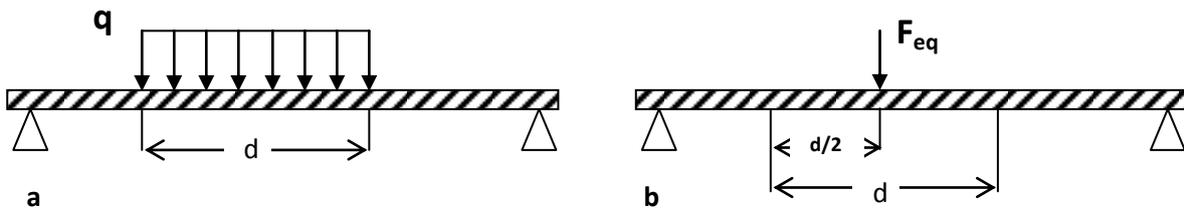


Figure II. 14 : a- Charge uniformément répartie. b-Equivalence d'une charge uniformément répartie

On peut remplacer la charge uniformément répartie par une charge équivalente concentrée appliquée au centre de gravité du rectangle (ou carré). d'ou :

$$F_{eq} = \int q \cdot dx$$

$F_{eq}$  (N) représente la surface du rectangle (ou carré) produit par  $q$  et  $d$  d'ou  $F_{eq} = q \cdot d$

$q$  (N/m) : Intensité de la charge répartie.

$d$ (m): La distance de distribution de la charge  $q$ .

#### b. Charge linéairement répartie

Il existe plusieurs types de charges non uniformément réparties, la plus souvent rencontrée est la charge répartie linéaire ou charge triangulée. Un peu comme la charge uniformément répartie, la charge totale d'une charge triangulée est donnée par "l'aire de la charge" ou par l'intégrale suivant:

$$F_{eq} = \int_{q_1}^{q_2} q(x) \cdot dx.$$

On peut remplacer la force répartie linéaire par une force équivalente  $F_{eq}$  appliquée au centre de gravité du polygone (Triangle, Trapézoïdale,....).

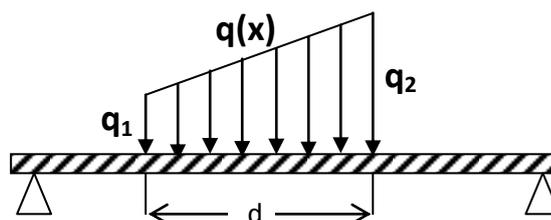


Figure II. 15: Chargé linéairement répartie (Charge triangulaire).

### c. *Pression ou contrainte*

La pression est définie classiquement par son effet sur une surface élémentaire  $d\mathbf{S}$ . La force exercée  $\mathbf{F}$  est définie par :

$$dF = PdS$$

Cette force est normale à la surface. Cette expression définit le scalaire  $P$  défini comme la pression. Pour un milieu d'aire finie:

$$\mathbf{P}=\mathbf{F}/\mathbf{S}$$

### d. *Force volumique*

Il existe des forces qui s'exercent sur la totalité de l'objet, comme le poids, ces forces sont dites volumiques. On démontre, dans le cas des solides indéformables, que l'action de telles forces est équivalente à l'application d'une seule force au barycentre du corps, encore appelé « centre de masse », « centre de gravité » ou « centre d'inertie ».

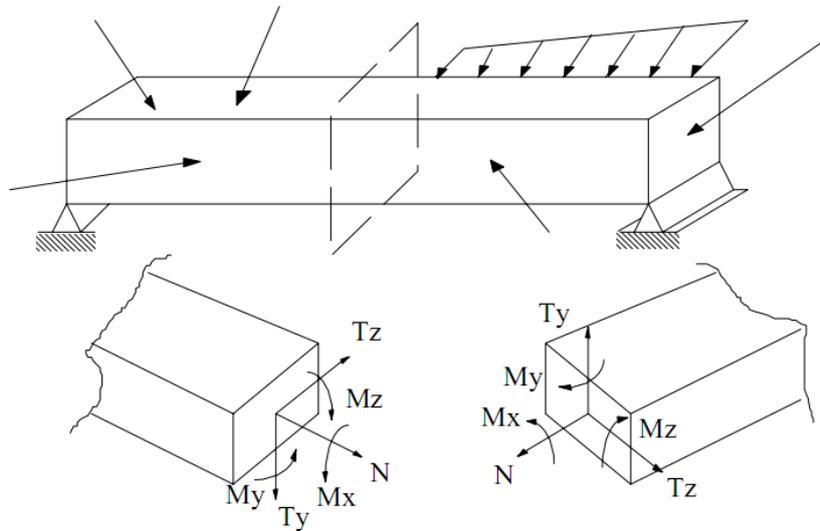
## II.7 Les forces intérieures (efforts de cohésion)

### II.7.1 Définition :

Les efforts intérieurs ou de cohésion sont les efforts qui agissent à l'intérieur des structures (poutres) et qui assurent l'équilibre ou la cohésion de la structure sous l'action des charges extérieures exercées. Les efforts intérieurs sont calculés avec le principe fondamental de la statique à partir des l'actions extérieures agissant sur la poutre.

Afin de faciliter l'étude des efforts exercés sur chaque particule matérielle, on considère une section transversale d'un élément soumis à une sollicitation ( $\mathbf{S}$ ). on distingue le vecteur des forces  $\mathbf{F}(\mathbf{N}, \mathbf{T}_y, \mathbf{T}_z)$  et le vecteur moment  $\mathbf{M}(\mathbf{M}_x, \mathbf{M}_y, \mathbf{M}_z)$  résultant des forces intérieures dans la section.

$$\vec{F} = N \cdot \vec{x} + T_y \cdot \vec{y} + T_z \cdot \vec{z} \qquad \vec{M} = M_x \cdot \vec{x} + M_y \cdot \vec{y} + M_z \cdot \vec{z}$$



**Figure II. 16:** Efforts intérieurs ou efforts de cohésions.

**II.7.2 Effort longitudinal (N) :**

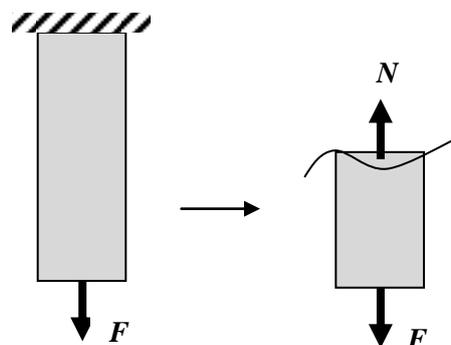
La composante  $N$  de la résultante  $F$  représente la somme des projections de toutes les forces intérieures agissant suivant la normale de la section (ou suivant l’axe longitudinal de l’élément). L’effort longitudinal provoque une déformation longitudinale de l’élément.  $N$  est considéré positif s’il s’agit d’une traction et négatif dans le cas de compression.

La formule générale donnant la valeur de l’effort longitudinal dans une section droite arbitraire de la barre est de la forme :

$$N = \sum F + \sum \int q_x \cdot dx$$

L’intégrale s’étend à la totalité de la longueur de chaque partie soumise à une charge répartie et la sommation à toutes les parties se trouvant d’un côté de la section considérée.

Si on oriente le vecteur de l’effort longitudinal  $N$  suivant la normale extérieure à la section droite considérée, la condition d’équilibre de la partie tranchée de la barre, c’est-à-dire la formule, nous donnera la valeur et le signe de l’effort recherché.



**Figure II. 17:** Représentation d'un effort normal dans une poutre en traction.

**II.7.3 Effort tranchant (T) :**

Les efforts transversaux  $T_y$  et  $T_z$  sont les sommes des projections de toutes les forces intérieures dans la section sur les axes centraux principaux de cette dernière. Ces efforts tranchants provoquent le cisaillement des bords de la section respectivement dans la direction y et z. le sens de T sur le plan est positif par convention quand il tend à faire tourner un élément entre deux sections dans le sens des aiguilles d’une montre.

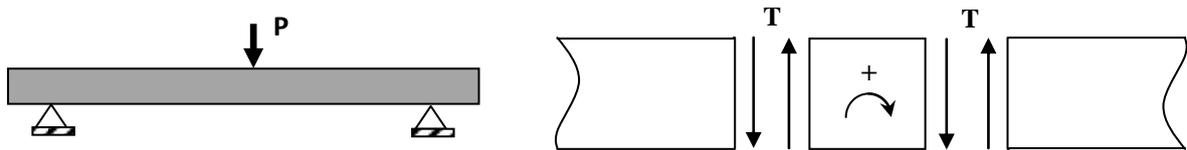


Figure II. 18: Représentation d'un effort tranchant dans une poutre en flexion.

**II.7.4 Moment fléchissant ( $M_f$ ) :**

Les composantes  $M_y$  et  $M_z$  du vecteur moment résultant représentent les sommes des moments de toutes les forces intérieures dans la section, par rapport aux axes d’inertie principaux de cette dernière y et z respectivement. La figure indique le sens positif des moments dans le plan qui par convention tend les fibres inférieures et comprime les fibres supérieures de la section.

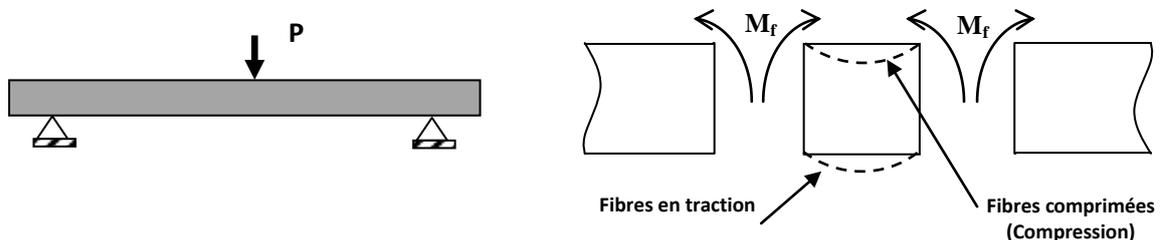


Figure II. 19: Représentation d'un moment fléchissant dans une poutre en flexion.

**II.7.5 Moment de torsion  $M_t$**

Le moment de torsion  $M_x$  ou  $M_t$  est la somme des moments de toutes les forces intérieures dans la section par rapport à l’axe de la barre x. Le moment de torsion est positif lorsqu’il tend à tourner la section dans le sens inverse des aiguilles d’une montre (sens trigonométrique) en regard la section du côté de la normale extérieure.

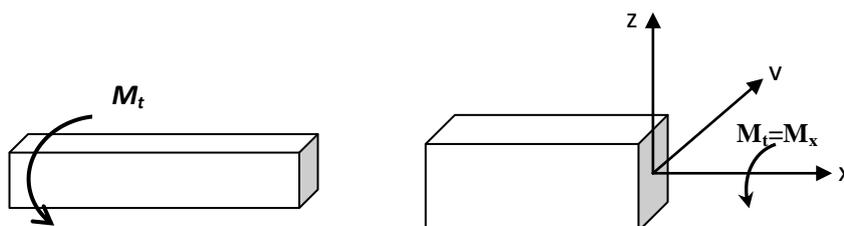


Figure II. 20: Moment de torsion dans une section de la poutre.

## **II.8 Modèle mécanique**

### **II.8.1 Point matériel**

On appelle point matériel ou masse ponctuelle un système mécanique qu'il est possible de le modéliser par un point géométrique  $M$  auquel est associée sa masse  $m$ . Il s'agit souvent d'un système dont les dimensions sont petites devant les distances caractéristiques du mouvement étudié (distance parcourue, rayon d'une orbite...). En mécanique, il existe plusieurs modèles de solide. Le plus simple est celui du point matériel. La description du solide est réduite à la position de son centre de gravité et à sa masse. Ce modèle est adapté aux cas où l'on ne s'intéresse qu'aux mouvements du centre de gravité. En particulier, il ne prend en compte ni les rotations propres de l'objet, ni ses déformations.

### **II.8.2 Corps solide**

Le second modèle est le modèle du solide indéformable. Il est bien adapté pour l'étude des mouvements — cinématique du solide — et des efforts mis en œuvre — dynamique — tant que les efforts restent modérés. Il permet de prendre en compte les rotations propres.

Dès que les efforts entraînent une déformation notable, ou bien dès lors que l'on s'intéresse à la déformation elle-même, il faut considérer d'autres modèles. On passe dans le domaine de la mécanique des milieux continus, comportant des lois de comportement de matériaux.

Le premier modèle de solide déformable est celui du solide élastique : on considère que les déformations sont linéaires et réversibles. Ce modèle est bien adapté aux petites déformations, en particulier à l'étude des vibrations, des chocs élastiques et à l'étude des pièces subissant une sollicitation modérée.

## **Chapitre III**

### **Statique d'un corps solide**

### III. Statique d'un corps solide

#### III.1 Définition

La statique est la partie de la mécanique qui étudie l'équilibre des systèmes matériels soumis à un ensemble de forces. Ces systèmes peuvent se réduire à un point matériel, un ensemble de points matériels, un solide ou à un ensemble de solides. Dans cette partie nous analyserons les actions mécaniques exercées sur ces systèmes à travers l'étude de l'équilibre de celui-ci.

Un système matériel est en équilibre statique par rapport à un repère donné, si au cours du temps, chaque point de l'ensemble garde une position fixe par rapport au repère. Pour qu'un système soit en équilibre sous l'effets d'un ensemble de forces, il faut :

- 1- Faire la somme des forces et transformer l'ensemble des forces appliquées sur le corps solide on un modèle simplifié.
- 2- Définir les conditions d'équilibre de l'ensemble des forces appliquées sur le corps solide.

Les problèmes de la statique peuvent être résolus par la méthode "représentation graphique" ou à l'aide des calculs numérique (Méthode analytique).

#### **Remarques :**

- 1- On appelle, tout corps n'est pas fixé avec d'autres corps, ou l'on peut glisser de sa position dans n'importe quelle direction dans l'espace un corps libre.
- 2- Si on peut changer un ensemble des forces qui agissent sur un corps libre avec un autre ensemble sans faire un changement dans l'état initial du corps (libre ou statique), ces deux ensembles sont appelés "ensemble des forces équivalent" .
- 3- Un corps soumis à un ensemble de forces et reste en équilibre. cet ensemble est appelé ensemble équilibré ou équivalent à zéro.
- 4- On appelle la seule force qui est équivalente à un ensemble de force, "la résultante".

### III.2 Les axiomes de la statique

#### III.2.1 Corps soumis à l'action de deux forces coplanaires

Comme les deux forces sont situées dans le même plan, l'équilibre du corps se ramène à l'équilibre d'une figure plane ou plaque soumise aux mêmes forces (Figure II.1). La forme du corps n'a aucune influence sur les conditions d'équilibre de translation et de rotation puisqu'on suppose le corps indéformable. Une difficulté non négligeable pour résoudre un problème d'équilibre statique est de se libérer de la forme du corps et de ne considérer que les conditions statiques d'équilibre. C'est la raison pour laquelle il est recommandé de remplacer le corps par une plaque sur laquelle seront représentées toutes les forces coplanaires appliquées. Montrons par quelques exemples les conditions d'équilibre d'un corps soumis à l'action de deux forces.

L'expérience montre qu'il existe un seul cas pour lequel le corps reste en équilibre. Ce cas représente le quatrième axiome de la mécanique.

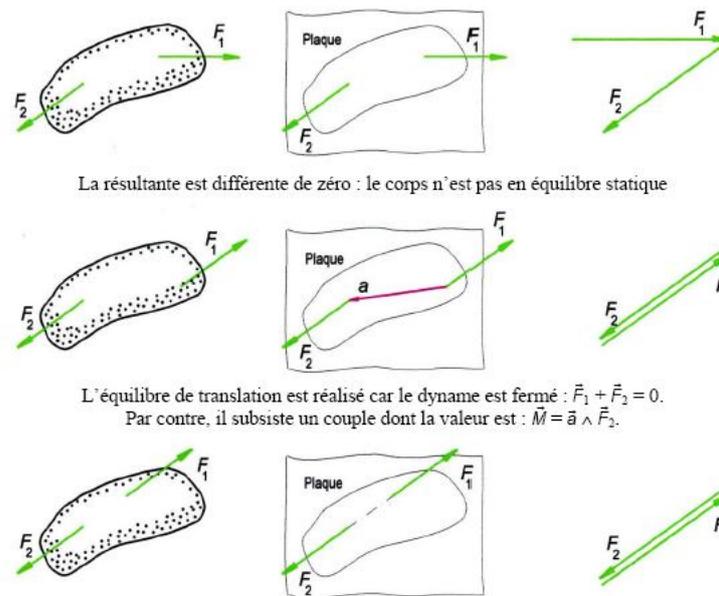


Figure III. 1: Corps soumis à deux forces.

#### Axiome 1 de la mécanique

*Si deux forces sont appliquées sur un corps solide libre, ce corps ne peut rester en équilibre que si ces deux forces ont même intensité, même ligne d'action mais sont de sens opposés.*

Les conditions d'équilibre peuvent aussi s'exprimer sous la forme suivante :

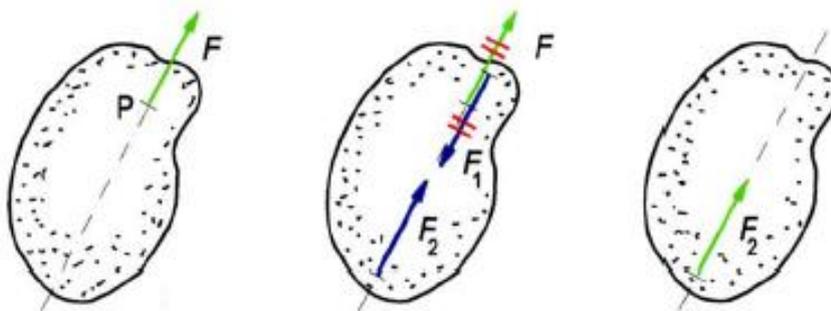
1. Equilibre de translation : polygone des forces fermé.
2. Equilibre de rotation : même ligne d'action pour les deux forces sur le corps.

**Axiome 2 de la mécanique**

*Les conditions d'équilibre d'un corps solide ne sont pas modifiées si l'on ajoute au système de forces ou si on lui enlève un système de forces équilibrées.*

**III.2.2 Transport d'une force sur sa ligne d'action**

Soit une force  $\vec{F}$  appliquée au point  $P$  sur un corps solide quelconque (Figure III.2). En ajoutant sur la ligne d'action de  $\vec{F}$  deux forces opposées  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$ , de même module que la force primitive, de même ligne d'action, les deux forces  $\vec{F}$  et  $\vec{F}_1$  s'annulent. La force  $\vec{F}_2$  restante est donc équivalente à la force primitive  $\vec{F}$ . On peut énoncer ainsi la loi fondamentale du déplacement de forces.



**Figure III. 2:** Transport d'une force sur sa ligne d'action.

**Transport d'une force**

*On peut transporter le point d'application d'une force le long de sa ligne d'action sans modifier l'équilibre ou l'état de mouvement d'un corps solide.*

**Axiome 3 (parallélogramme)**

*Deux forces  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$  appliquées sur un point matériel possède une résultante unique représentée par la diagonale du parallélogramme construit sur ces deux forces.*

L'expérience montre que l'axiome 2 de la mécanique est valable dans tous les cas. Les forces  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$  sont les composantes, la force  $\vec{F}_R$  est appelée résultante. Cet axiome correspond à la définition de l'addition de deux vecteurs libres. L'axiome du parallélogramme des forces s'écrit sous la forme vectorielle :

$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

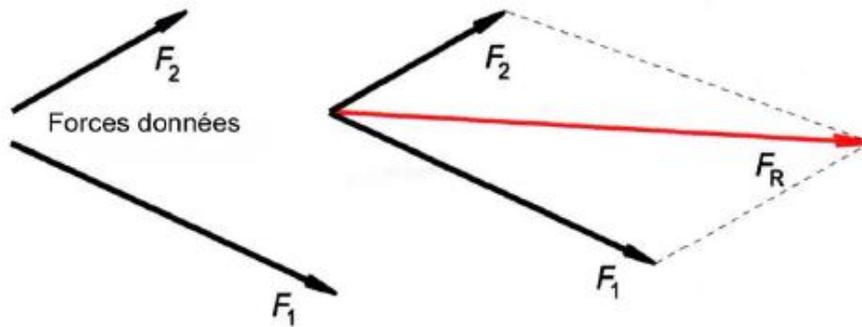


Figure III. 3: Résultante de deux forces (Principe de parallélogramme).

### III.3 Principe de l'égalité de l'action et de la réaction

Soit un corps indéformable et homogène de poids  $G$  reposant sur un plan horizontal parfaitement lisse. Isolons le corps, c'est-à-dire supprimons le plan et maintenons le corps parfaitement immobile au moyen d'une force  $\vec{F}_N$ , placée sur la surface de contact entre le corps et le plan. La force  $\vec{F}_N$ , dessinée concentrée sur la figure ci-dessous, est en vérité répartie sur toute la surface de contact. Remarquons en passant que les forces de contact sont toujours situées au niveau de la surface et dirigées vers l'intérieur du corps.

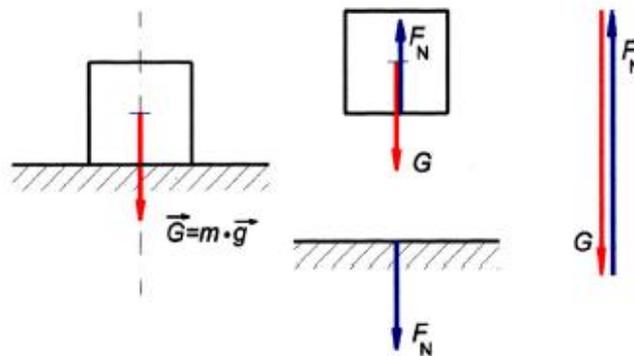


Figure III. 4: Action et réaction de deux corps en contact.

La force  $\vec{F}_N$  est l'action mécanique exercée par le plan horizontal sur le corps. La force  $\vec{F}_N$  est appelée aussi *réaction d'appui* : réaction parce que le corps agit sur le plan horizontal qui réagit alors sur le corps pour le mettre en équilibre statique. La force  $\vec{F}_N$  agit aussi sur le plan horizontal. Cette force possède la même ligne d'action que la précédente, la même intensité, mais son sens est opposé. Le principe de l'action et de la réaction, énoncé par Newton, est la quatrième axiome de la mécanique. Il peut s'énoncer comme suit :

**Axiome 4**

*Au contact de deux corps, les forces existent toujours par paire. Ces forces ont même intensité, même ligne d'action, mais elles sont de sens opposés.*

Cette loi de l'égalité de l'action et de la réaction est tout à fait générale. Elle s'applique aussi bien aux actions mécaniques à distance qu'à celles de contact ou de liaison. Le but de la statique est la recherche de l'équilibre des corps. Pour résoudre facilement les problèmes qui se présentent, on a toujours avantage à isoler successivement chacun des corps qui constitue l'ensemble du problème. On distingue :

1. Les *forces connues* comme les charges appliquées sur la construction, les poids des divers corps, etc. Ces forces sont définies par leur point d'application, leur direction, leur sens et leur intensité.

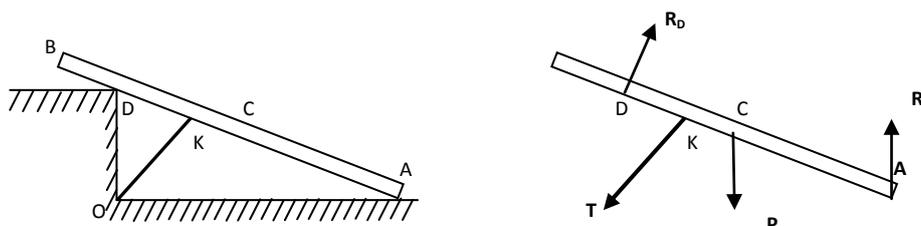
2. Les *forces inconnues* comme les forces de liaison entre les corps, les réactions des appuis extérieurs, etc. En général, le point d'application de la force est donné par la construction tandis que les autres caractéristiques vectorielles sont à rechercher.

**III.3.1 Principe de l'isolement des pièces**

Pour trouver les actions mécaniques extérieures exercées sur les corps en étude, une méthode simple et efficace consiste à dessiner chaque corps séparément et à représenter les forces connues par des grandeurs vectorielles et les forces inconnues par un ou plusieurs points d'interrogation. Bien souvent, il est impossible de trouver l'équilibre statique d'une construction sans isoler chacune de ses parties. Dans les cas simples, on peut trouver les actions extérieures sur l'ensemble, ceci pour autant que le nombre d'inconnues ne dépasse pas le nombre fixé par les conditions d'équilibre statique.

***Isolement des pièces***

*Isoler un corps signifie supprimer tous les appuis ou toutes les liaisons extérieures et les remplacer par des forces connues ou inconnues.*



**Figure III. 5:** Isolement et représentation des efforts exercés sur la barre.

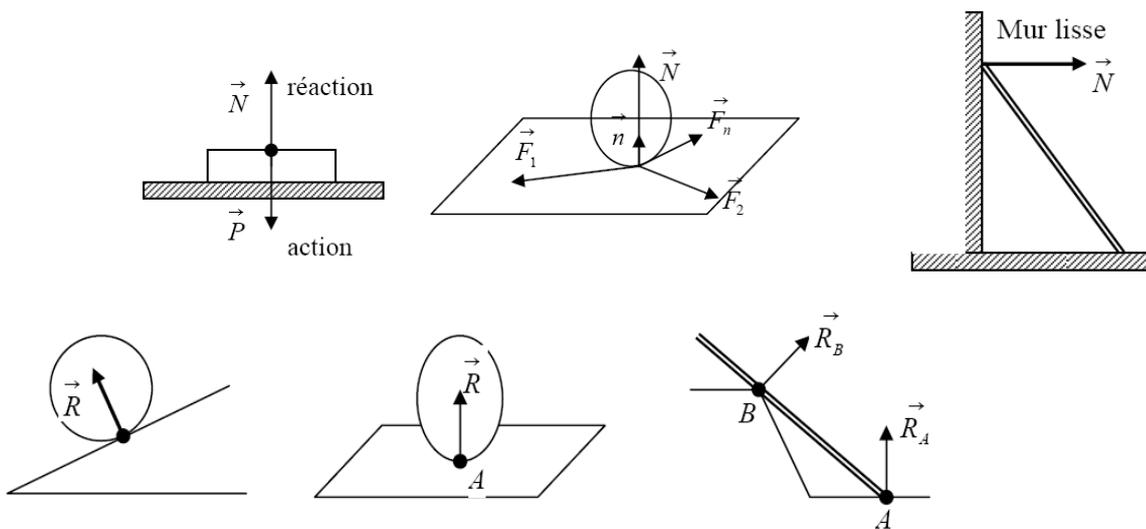
**III.3.2 Liaisons sans frottement des solides et leurs réactions :**

**a. Réactions aux appuis et aux liaisons**

- **Appui simple d'un solide sur une surface parfaitement lisse**

Les contacts entre les solides sont ponctuels.

Soit (S) un solide reposant sur une surface (P), on dit que le point A du solide est un point d'appui s'il reste continuellement en contact de la surface (P). Si le plan (P) est parfaitement lisse alors la force de liaison (la réaction  $\vec{R}$ ) au point de contact est normale à ce plan.

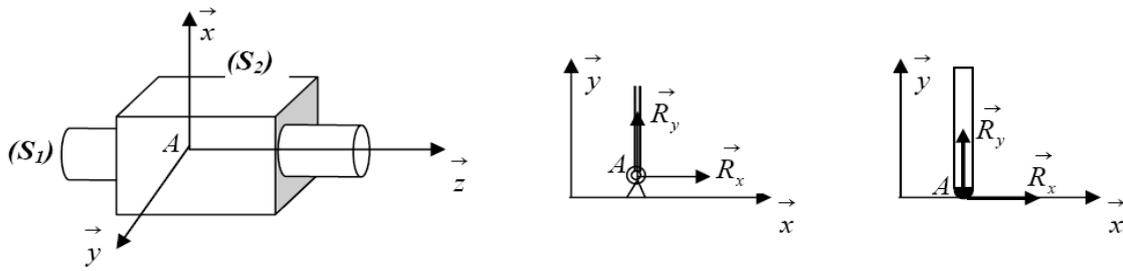


**Figure III. 6:** Différents types des liaisons mécaniques (Appuis simple).

- **Liaison verrou (Articulation cylindrique ou appui double)**

Les solides sont en contact entre eux suivant une surface cylindrique. Le solide (S<sub>1</sub>) a deux degrés de liberté par rapport au solide (S<sub>2</sub>) : Une translation suivant l'axe Az, et une rotation autour du même axe. L'appuis double ou l'articulation cylindrique est une liaison plan qui réduit le degré de liberté. Un corps avec une liaison cylindrique à une mouvement de rotation autour de l'axe de la liaison. Cette liaison supprime le mouvement de translation suivant l'axe Ox et Oy qui est remplacé après isolement par deux réactions Rx et Ry (Figure III.7). La somme de ces deux réactions représente la résultante R qui est la réaction de la liaison cylindrique ou l'appuis double avec :

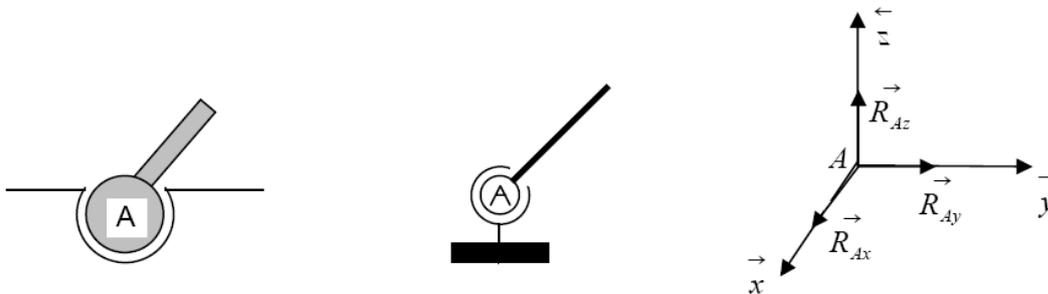
$$\vec{R} = \vec{R}_x + \vec{R}_y$$



**Figure III. 7:** Représentation de la liaison appuis double ou articulation cylindrique.

- **Liaison rotule (Articulation sphérique)**

Si un corps lié a une rotule, le corps reste seulement en mouvement de rotation sur les trois axe. Cette liaison supprime les trois mouvements de translation du corps, et engendre trois réaction  $R_x$ ,  $R_y$  et  $R_z$ . la résultante de ces trois réaction représente la réaction de la rotule sur le corps (Figure III.8).



**Figure III. 8:** Réaction de la liaison rotule.

La réaction au point A de l'articulation sphérique a trois composantes :

$$\vec{R} = \vec{R}_{Ax} + \vec{R}_{Ay} + \vec{R}_{Az}$$

**b. Encastrement d'un solide**

On dit qu'un solide est encastéré lorsqu'il ne peut plus changer de position quels que soit les forces extérieures appliquées. Cette liaison (Figure III.9) est représentée par deux grandeurs :

$\vec{R}$  : la résultante des forces extérieures appliquées au solide et actives au point A.

$\vec{M}_{/A}$  : le moment résultant des forces extérieures appliquées au solide par rapport au point A.

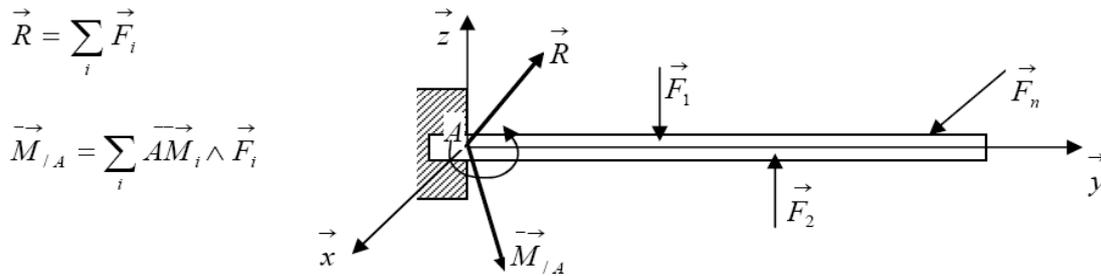
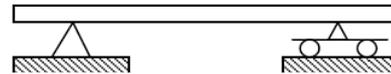


Figure III. 9: Représentation de la réaction d'une liaison encastrement.

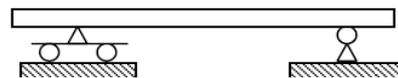
**c. Combinaisons de liaisons**

Avec ces différents types de liaisons (*Appui simple, articulation cylindrique, articulation sphérique et encastrement*) nous pouvons réaliser des combinaisons qui permettent de réaliser montages mécaniques statiquement déterminés.

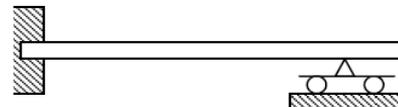
(1) Appui simple deux fois



(2) Appui simple et une articulation



(4) Encastrement et appui simple



(3) Encastrement seul

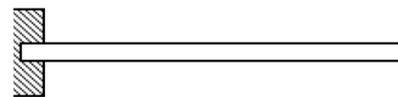


Figure III. 10 : Combinaison des liaisons sur un corps.

**III.4 Les Forces parallèles**

**III.4.1 Résultante de deux forces parallèles et de même sens**

**Théorème:** La résultante de deux forces parallèles de même sens appliquées en deux points invariablement liés entre eux, est égale à la somme des composantes, parallèles à leur direction, agit dans le même sens des deux forces, et le point d'application de cette résultante situé entre eux tel que ses distances à ces points sont proportionnelles à l'intensité de ces forces.

Soient  $F_1$  et  $F_2$  deux forces parallèles et de même sens appliquées au points A et B d'un même corps solide avec  $F_1 > F_2$  (Figure III.11), et proposons-nous de trouver leur résultante F. Ajoutant à ce système, un système de forces équilibrés tel que  $R=R'=F_1+F_2$  (Le système reste toujours en équilibre).

D'après méthode parallélogramme on peut trouver les résultantes  $Q = F_1 + R$  et  $Q' = F_2 + R'$ . L'intersection de  $Q$  et  $Q'$  est le point  $C$ . La projection orthogonale du Point  $C$  sur  $AB$  donne le point d'application de la résultante  $F$ . Pour trouver la valeur de  $F$  en fonction de  $F_1$  et  $F_2$ , on transporte  $Q$  et  $Q'$  au point  $C$ , et on décompose chacune sur les deux axes  $CD$  et  $CD'$ . Les deux forces  $R$  et  $R'$  s'annulent et la résultante  $F = F_1 + F_2$ .

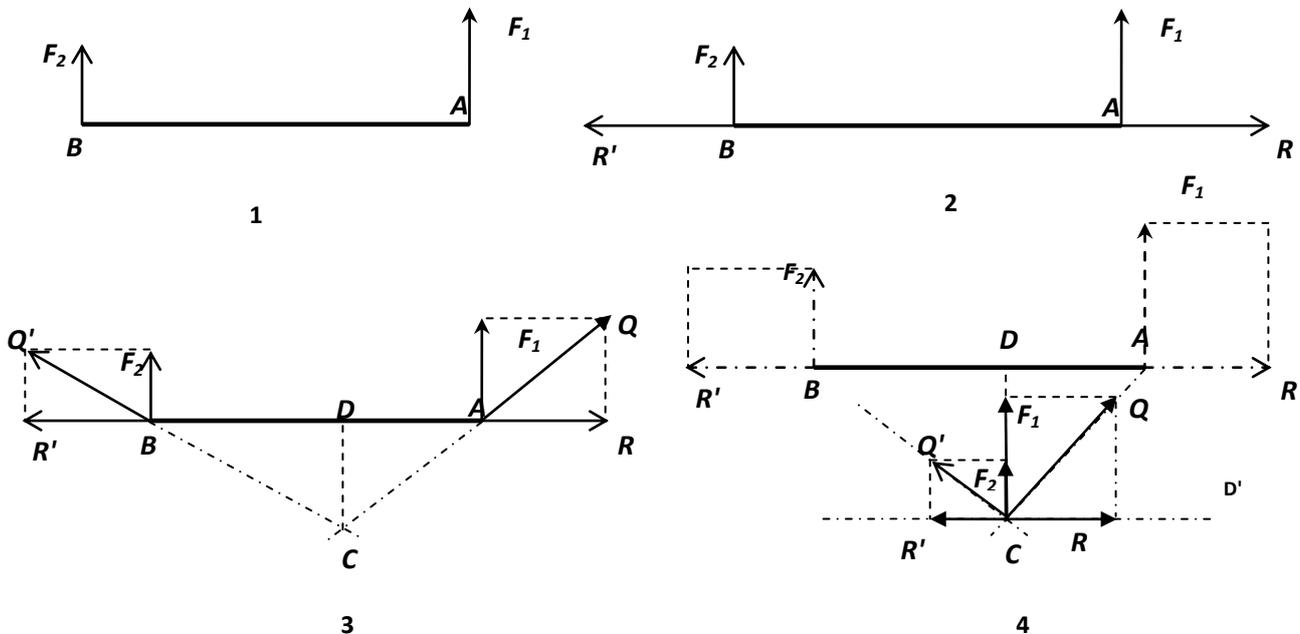


Figure III. 11: Résultante de deux forces parallèles de même sens.

Maintenant trouvant la relation qui donne les distances entre la résultante  $F$  et les points  $A$  et  $B$ .

à partir des deux triangles  $ACD$  et  $FRQ$  on a :

$$\frac{CD}{AD} = \frac{F_1}{R} \implies CD = AD \cdot \frac{F_1}{R}$$

à partir des deux triangles  $BCD$  et  $F_2R'Q'$  on a :

$$\frac{CD}{BD} = \frac{F_2}{R'} \implies CD = BD \cdot \frac{F_2}{R'}$$

L'égalité des deux équations donne :

$$AD \cdot \frac{F_1}{R} = BD \cdot \frac{F_2}{R'} \implies AD \cdot F_1 = BD \cdot F_2 \text{ ou } \frac{AD}{F_2} = \frac{BD}{F_1}$$

On a aussi  $AD = AB - BD$  et  $AD \cdot F_1 = BD \cdot F_2$  Donc l'équation devient :

$$(AB - BD) \cdot F_1 = BD \cdot F_2 \implies AB \cdot F_1 - BD \cdot F_1 = BD \cdot F_2 \implies AB \cdot F_1 = BD \cdot (F_1 + F_2)$$

$$\text{ou } AB \cdot F_1 = BD \cdot F \implies \frac{AB}{F} = \frac{BD}{F_1}$$

Finalement, la relation qui donne le point d'application la résultante  $F$  de deux forces parallèles  $F_1$  et  $F_2$  est :

$$\frac{AD}{F_2} = \frac{BD}{F_1} = \frac{AB}{F}$$

### III.4.2 Résultante de deux forces parallèles et de sens contraire

**Théorème:** La résultante de deux forces parallèles et de sens contraire appliquées en deux points invariablement liés entre eux, est égale à la différences des composantes, parallèles à leur direction, agit dans le sens de la plus grande, et le point d'application de cette résultante rencontre le prolongement de la droite qui joints d'application des composantes en un point tel que ses distances à ces points sont inversement proportionnelles à l'intensité de ces forces.

Soient  $F_1$  et  $F_2$  deux forces parallèles et de sens contraire appliquées au points  $A$  et  $B$  d'un même corps solide avec  $F_1 > F_2$  (Figure III.12), et proposons-nous de trouver leur résultante  $R$ .

La composition de ces deux forces peut se réduire de celle de deux forces parallèles et de même sens. En effet, prenons sur le prolongement de la droite  $AB$  et du côté de la plus grande force, un point  $I$  telque l'on ait :

$$\frac{AI}{AB} = \frac{F_2}{F_1 - F_2}$$

et appliquant en ce point  $I$  deux force  $R$  et  $R'$  égale chacune à la différence  $F_1 - F_2$ , directement opposées et parallèles aux forces données ( $\vec{R} = -\vec{R}'$  et  $R' = F_1 - F_2$ ): ces deux forces, se détruisant, ne changent rien au système.

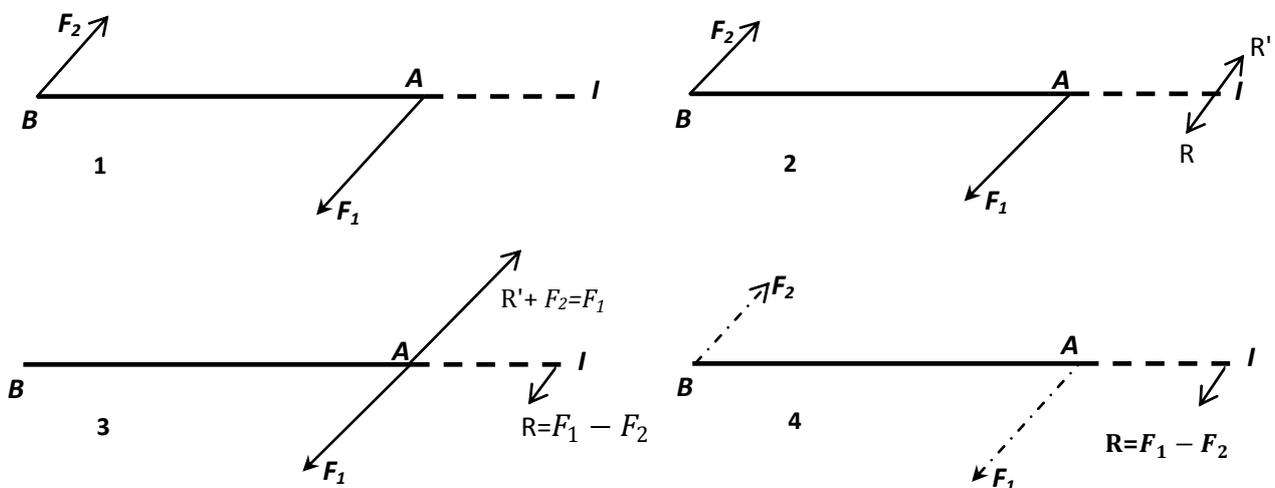


Figure III. 12: Résultante de deux forces parallèles de sens opposés.

D'après la relation précédente, on voit que les forces  $R'$  et  $F_2$  sont inversement proportionnelles aux distances  $AI$  et  $AB$  de leur point d'application à celui de la force  $F_1$ , et puisque l'on a par hypothèse  $R' = F_1 - F_2$  ou  $F = R + F_2$ , on en conclut que la force  $F_1$  est égale et directement opposée à la résultante des forces  $R'$  et  $F_2$ . Donc, le système des trois forces  $R'$ ,  $F_2$  et  $F_1$  est en équilibre, et comme dans tout système de force en équilibre l'une quelconque d'entre elles est égale et directement opposée à la résultante de toutes les autres, nous pouvons dire que  $R'$  est égale et directement opposée à la résultante des forces  $F_1$  et  $F_2$ , et par suite la force  $R$  est la résultante cherchée avec :

$$R = F_1 - F_2 \quad \text{et} \quad \frac{BI}{F_1} = \frac{AI}{F_2} = \frac{AB}{R}$$

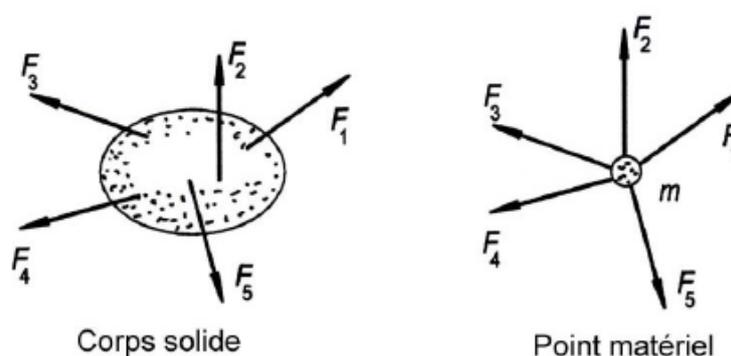
### III.5 Equilibre du point matériel

#### III.5.1 Solution graphique

##### a. Conditions d'équilibre du point matériel

Un corps réel est soumis généralement à plusieurs forces non concourantes. Chacune de ces forces est appliquée à l'extérieur ou à l'intérieur du corps suivant des lignes d'action quelconques. Si le corps est vu de très loin, il peut être confondu avec un point matériel (Figure III.13). Soit un point matériel soumis à l'action de plusieurs forces quelconques. Ces forces sont nécessairement concourantes sur ce point sans volume. Si le point matériel est en équilibre statique, la résultante de toutes les forces qui agissent sur lui doit être nulle.

Les méthodes graphique et analytique permettent de trouver les conditions particulières d'équilibre statique du point matériel.



**Figure III. 13:** Système de corps solide et le système de point matériel.

La règle générale s'exprime par la phrase suivante :

##### **Condition d'équilibre statique du point matériel**

Pour qu'un point matériel soit en équilibre, il faut et il suffit que la résultante de toutes les forces appliquées sur le point soit nulle.

Inversement, un point matériel soumis à l'action d'une résultante de forces nulle est en équilibre statique si la vitesse du point est initialement nulle. La condition générale d'équilibre statique du point, en solution graphique, devient :

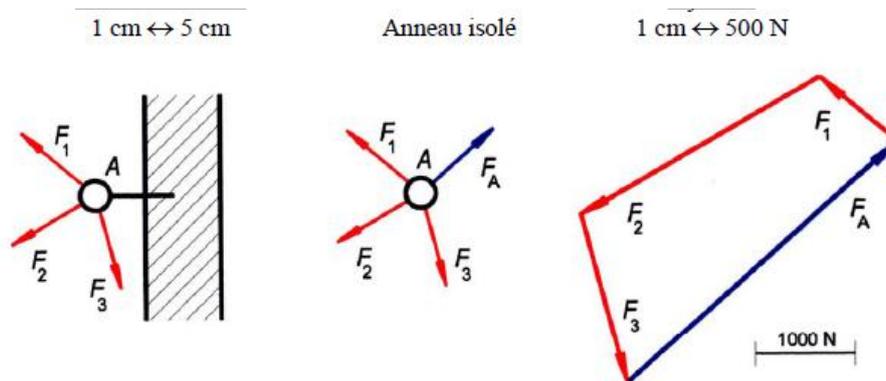
**Condition d'équilibre statique du point matériel, solution graphique**  
 Pour qu'un point matériel soit en équilibre statique, il faut et il suffit que le polygone construit par toutes les forces soit fermé, c'est-à-dire que l'extrémité de la dernière force coïncide avec l'origine de la première force.

**Exemples :**

**Exemple A:**

Trois forces coplanaires agissent sur un anneau A fixé au mur vertical selon figure. Les valeurs des forces connues sont :  $F_1 = 1000 \text{ N}$  ( $140^\circ$ )  $F_2 = 2750 \text{ N}$  ( $210^\circ$ )  $F_3 = 1750 \text{ N}$  ( $285^\circ$ ).

Déterminer la direction de l'action du mur sur l'anneau.



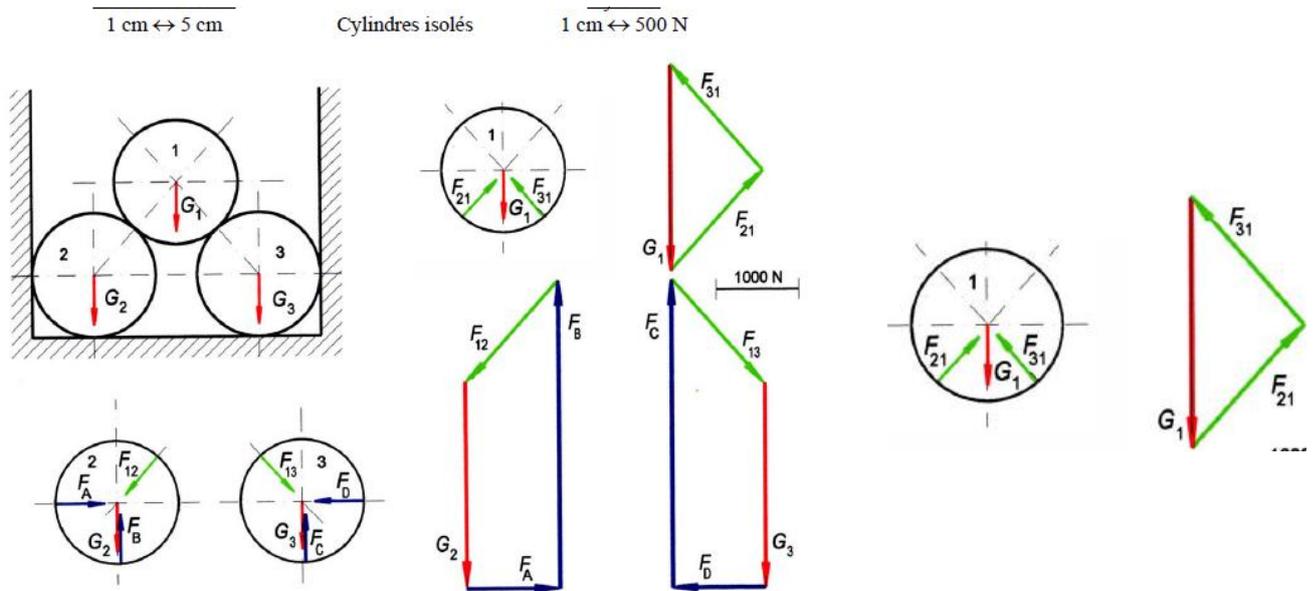
Après avoir choisi un échelle de dessin, on trace le polygone formé par les forces appliquées sur l'anneau A et la réaction  $F_A$ . Puis on mesure la longueur de  $F_A$ , on trouve que  $F_A = 7,25 \text{ cm}$ . Pour obtenir l'intensité de la force la longueur est multipliée par l'échelle de dessin.  $F_A = 7,25 \text{ cm} \times 500 \text{ N/cm} = 3625 \text{ N}$  d'ou l'angle de  $F_A$  est égale à  $41,8^\circ$ .

**Exemple B :**

Trois cylindres homogènes, pesant chacun  $2500 \text{ N}$ , sont placés entre deux appuis verticaux constitués par des parois sans frottement et un sol horizontal. Trouver les efforts entre les cylindres ainsi que les actions des parois et du sol sur chacun des cylindres.

*Méthode de résolution*

Pour trouver les forces appliquées entre les cylindres et les appuis, il faut introduire la méthode générale de résolution, soit isoler successivement chacun des cylindres en commençant par le cylindre supérieur.

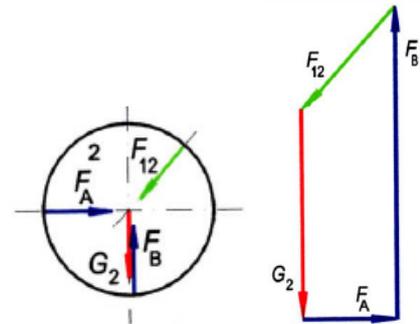


**Cylindre 1 :**

Condition d'équilibre :  $\vec{G}_1 + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} = \vec{0}$

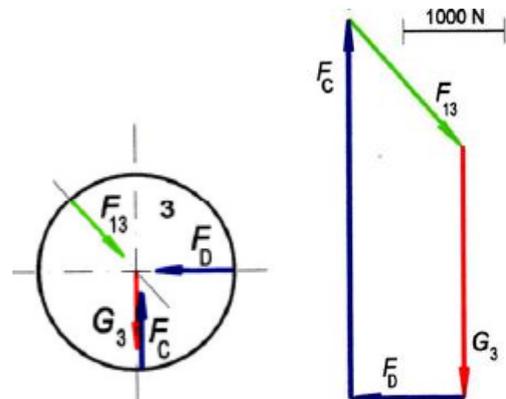
**Cylindre 2 :**

Condition d'équilibre :  $\vec{G}_2 + \vec{F}_{12} + \vec{F}_A + \vec{F}_B = \vec{0}$



**Cylindre 3 :**

Condition d'équilibre :  $\vec{G}_3 + \vec{F}_{13} + \vec{F}_C + \vec{F}_D = \vec{0}$



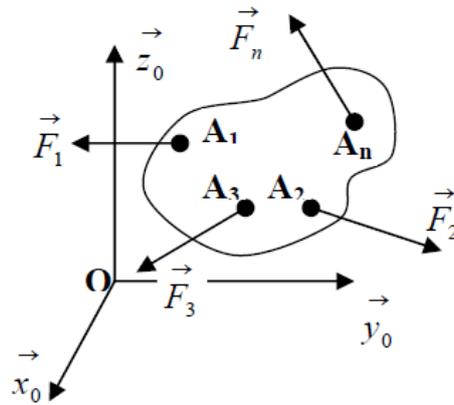
**III.5.2 Equilibre analytique du point matériel**

Le point matériel est dit *libre* lorsqu'il peut se déplacer dans toutes les directions de l'espace. Soumis à l'action de plusieurs forces, il suit le mouvement que lui imprime la force résultante.

Si le point matériel reste immobile, on dit qu'il est en équilibre. Un point matériel soumis à l'action de plusieurs forces dont la résultante est nulle est nécessairement en équilibre statique. La règle énoncée au chapitre précédent est aussi valable dans la solution analytique. Pour que la

résultante des forces soit nulle, il faut que chacune de ses projections sur les axes de coordonnées soit nulle. Les conditions analytique d'équilibre peuvent s'écrire comme suit :

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \implies \begin{cases} \sum_i \vec{F}_{ix} = \vec{F}_{1x} + \vec{F}_{2x} + \dots + \vec{F}_{nx} = \vec{0} \\ \sum_i \vec{F}_{iy} = \vec{F}_{1y} + \vec{F}_{2y} + \dots + \vec{F}_{ny} = \vec{0} \\ \sum_i \vec{F}_{iz} = \vec{F}_{1z} + \vec{F}_{2z} + \dots + \vec{F}_{nz} = \vec{0} \end{cases}$$



- $\vec{M}_{(\vec{R})/O} = \sum_i \vec{M}_i(F_i)/O = \vec{0} \implies \begin{cases} \vec{M}_y = \vec{0} \\ \vec{M}_z = \vec{0} \end{cases}$

Dans le cas d'un solide soumis à des forces **coplanaires**, le système précédent se réduit à trois équations scalaires. Soit  $(xoy)$ , le plan contenant les forces appliquées au solide, nous avons alors :

$$z = 0 \text{ et } F_z = 0 \iff \vec{M}_x = \vec{0} \text{ et } \vec{M}_y = \vec{0} \text{ et } \vec{M}_z = \vec{M}_{(\vec{R})/O}$$

Les équations d'équilibre se réduisent à :

$$\vec{R}_x = \sum_i \vec{F}_{ix} = \vec{0}, \quad \vec{R}_y = \sum_i \vec{F}_{iy} = \vec{0}, \quad \text{et } \vec{M}_{/O} = \sum_i \vec{M}_{iz} = \vec{0}$$

$$\vec{F}_i = \begin{pmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad OA_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ 0 \end{pmatrix}$$

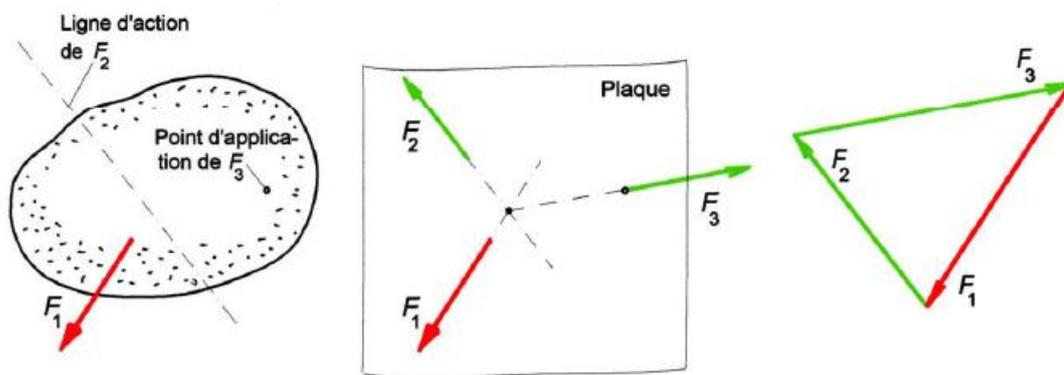
$$\vec{M}_{i/O} = \vec{OA}_i \wedge \vec{F}_i \implies \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_i \cdot F_{iy} - y_i \cdot F_{ix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

### III.5.3 Théorie de trois forces coplanaires (Triangle des forces)

Le problème de statique du corps solide soumis à l'action de trois forces coplanaires se présente généralement sous la forme suivante :

1. Une force est entièrement connue : en direction, sens et intensité.
2. La ligne d'action de la deuxième force est fixée sur le corps.
3. Le point d'application de la troisième force est connu.

Les conditions d'équilibre d'un corps solide soumis à l'action de trois forces coplanaires peut se ramener à celles du corps soumis à l'action de deux forces en cherchant la résultante des deux premières. Remarquons en passant une propriété fondamentale des corps soumis uniquement à l'action de trois forces : **les trois forces ne peuvent être que coplanaires.**



**Figure III. 14:** Equilibre d'un corps solide soumis à l'action de trois forces coplanaires.

Graphiquement, il est plus simple d'exprimer ces conditions sous la forme pratique suivante :

1. Isoler le corps solide en le représentant par exemple sur une plaque.
2. Représenter les forces par des vecteurs conventionnels. Les forces connues seront représentées en direction et sens là où elles agissent, les forces inconnues seront accompagnées de points d'interrogation, un point par inconnue.
3. Pour trouver la direction de la force dont seul le point d'application est donné, chercher le point de concours des trois forces.
4. Construire le triangle des forces en portant tout d'abord la force entièrement connue et en fermant le *triangle des forces* par la direction des deux autres.

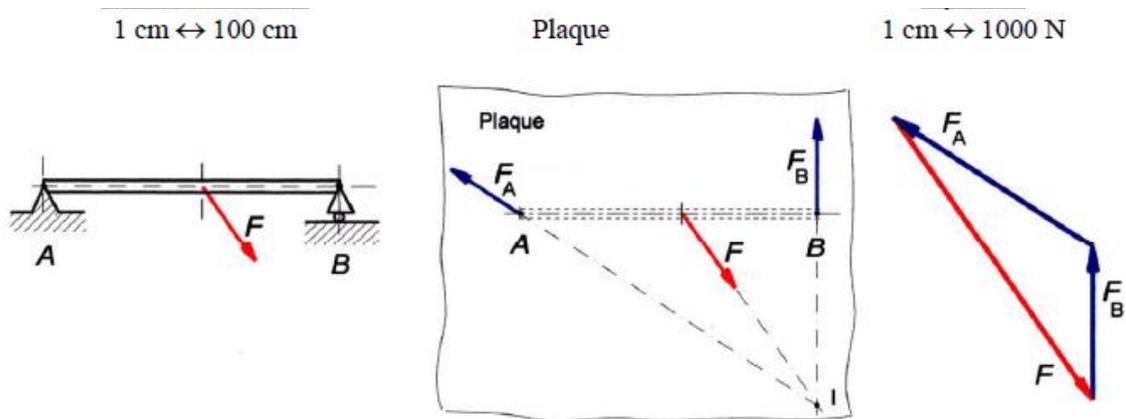
**Théorie de trois forces :** si un corps solide est équilibré sous l'action des **trois forces non parallèles et coplanaires**, donc les lignes d'actions de ses trois forces se coïncident dans un point.

**Exemple :**

Une poutre rectiligne, articulée sans frottement à ses deux extrémités  $A$  et  $B$ , supporte une force oblique  $\vec{F}$ . La poutre repose à gauche sur un appui articulé fixe, à droite sur un appui à rouleau. Trouver les réactions des appuis aux points  $A$  et  $B$ .

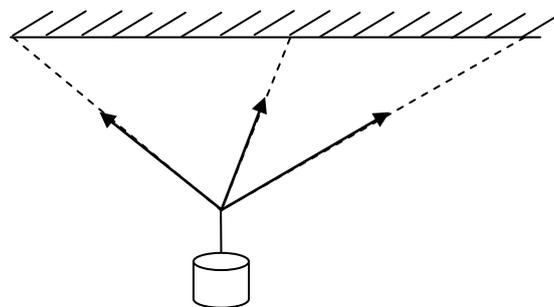
**Solution**

La force  $\vec{F}$  donnée est entièrement connue par son point d'application, sa direction et sens, son intensité. La direction de la réaction d'appui  $\vec{F}_B$  est perpendiculaire à la direction de l'appui, c'est-à-dire ici verticale. La réaction d'appui au point  $A$  n'est connue que par son point d'application ; sa direction, son sens et son module sont inconnus. Le nombre d'inconnues est 3 :



**III.6 Problèmes statiquement déterminés ou indéterminés**

Un problème est statiquement déterminé lorsque le nombre d'inconnues introduites par l'énoncé ne dépasse pas le nombre d'équations d'équilibre. Ce type de problème est dit problème *isostatique*. Un problème est statiquement indéterminé lorsque le nombre d'inconnues dépasse le nombre d'équations d'équilibre. Ces problèmes sont appelés *hyperstatiques* c'est-à-dire des problèmes qui dépassent les possibilités de solution des méthodes de la statique.



**Figure III. 15:** Problème Hyperstatique.

Généralement, les problèmes hyperstatiques peuvent se résoudre en introduisant des analyses supplémentaires, par exemple les relations existantes sur les déformations tirées de la résistance des matériaux.

### III.7 Etapes de résolution des problèmes en statique

- 1- Spécification du corps à étudié.
- 2- Isolement du corps de ses liaisons et représentation des forces connues et les réactions des liaisons isolées.
- 3- Composition des conditions d'équilibres du corps (Graphique ou analytique).
- 4- Calcul des valeurs inconnus et vérification de la solution trouvée.

### III.8 Le Frottement

#### III.8.1 Frottement de glissement

Dans la partie précédente, les corps solides sont considérés comme parfaitement rigides et parfaitement polis. Alors, si deux corps en repos ou en mouvement sont en contact par un point et peuvent glisser l'un sur l'autre, leur action mutuelle est normale au plan tangent commun en ce point.

Cette hypothèse est contraire à l'expérience : les solides naturels ne sont ni parfaitement rigides ni parfaitement polis. Quand deux solides naturels sont en contact, le contact n'a jamais lieu en un point unique; les deux corps subissent des déformations, généralement très petites, qui les mettent en contact suivant une petite portion de surface : ces déformations, permanentes si les corps sont en équilibre, sont variables quand les corps glissent l'un sur l'autre; il se produit alors des vibrations moléculaires et il se développe également de la chaleur ou de l'électricité, dont la production absorbe une partie du travail des forces motrices.

Ces phénomènes, très compliqués dans le calcul, sont introduites en supposant qu'à la réaction normale des deux corps en contact se joigne une réaction tangentielle appelée frottement. Les premières expériences sur le frottement, faites en 1781 par Coulomb, furent reprises et confirmées par le général Morin. Il importe de distinguer deux cas dans le frottement de glissement :

- a- le frottement à l'état de repos et, en particulier, le frottement au départ;
- b- le frottement à l'état de mouvement.

#### III.8.2 Loi du frottement de glissement à l'état de repos

Supposons un bloc pesant placé sur une table horizontale : le système est en équilibre et, par suite, les actions de la table sur le bloc ont actuellement une résultante  $N$  normale à la table, égale et

opposée au poids  $Q$  du corps. Appliquons maintenant au corps, dans un plan vertical du centre de gravité, aussi près que possible de la table, une force horizontale  $P$  dont nous ferons croître graduellement l'intensité à partir de zéro.

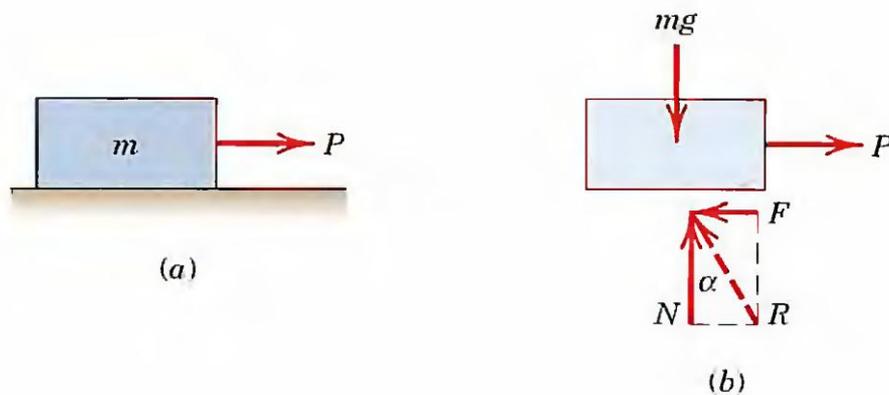


Figure III. 16: Représentation de la force de frottement.

Quand cette force  $P$  est très petite, le corps ne glisse pas : il reste en équilibre. Il faut donc que la réaction  $R$  de la table sur le corps soit égale et opposée à la résultante du poids  $Q=mg$  et de la force  $P$  ; cette réaction peut se décomposer en deux, l'une normale  $N$ , égale et directement opposée à  $Q$ , l'autre tangentielle  $F$ , égale et opposée à  $P$  : cette composante tangentielle est la force de frottement. L'angle  $\alpha$  de  $R$  avec la normale  $N$  est :

$$\text{tang } \alpha = \frac{F}{N} = \frac{P}{Q}$$

Si l'on fait croître graduellement  $P$ , il arrive un moment où, cette force ayant acquis une intensité  $P'$ , le corps se met en mouvement. La valeur correspondante de  $F$ ,  $F = P'$ , s'appelle le frottement au départ; la valeur correspondante  $\varphi$  de l'angle  $\alpha$ , s'appelle angle de frottement.

$$\text{tang } \varphi = \frac{P'}{Q}$$

Coulomb a mesuré  $P'$  et  $\varphi$  à l'aide d'une disposition expérimentale (chariot tiré par des poids croissants) permettant de réaliser les conditions précédentes; il a trouvé les trois lois suivantes :

- 1- Le frottement au départ est indépendant de l'étendue des surfaces en contact;
- 2- Il dépend de leur nature ;
- 3- Il est proportionnel à la composante normale de la réaction ou, ce qui revient au même, à la composante normale de la pression.

Le rapport constant  $f$  du frottement au départ  $\varphi$  avec la réaction normale  $N$  ou la pression normale  $Q$  s'appelle coefficient de frottement.

$$f = \frac{F}{N} = \frac{P'}{Q}$$

L'angle  $\alpha$  tant que l'équilibre subsiste, est moindre que  $\varphi$ .

### III.8.3 Équilibre des solides naturels avec frottement

a- Un point de contact : Considérons un corps  $S$  reposant sur un autre  $S'$  qu'il touche par une portion de surface très petite que nous supposons réduite à un point  $A$ . La réaction  $R$  de  $S'$  sur  $S$  se compose d'une réaction normale  $N$  et d'une réaction tangentielle  $F$ , dont la direction est inconnue et dont le maximum est  $f.N$  l'angle  $\alpha$  de  $R$  avec  $N$  est donc moindre que l'angle de frottement  $\varphi$ .

Pour que le corps  $S$  soit en équilibre, il faut qu'il y ait équilibre entre les forces directement appliquées au corps  $S$  et la réaction  $R$ , ou encore que les forces appliquées au corps aient une résultante unique égale et directement opposée à  $R$ , c'est-à-dire :

- 1- passant par le point A;
- 2- faisant, avec la normale  $AN$ , un angle moindre que l'angle de frottement.

Ces conditions nécessaires sont suffisantes, car, si elles sont remplies, on peut supposer la résultante des forces directement appliquées transportée au point  $A$ , et la décomposer en deux forces, l'une normale  $P$  et l'autre tangentielle  $Q$ . Le glissement ne se produira pas si l'angle de la résultante avec la normale étant moindre que  $\varphi$ , on a :

$$\frac{P}{Q} < f$$

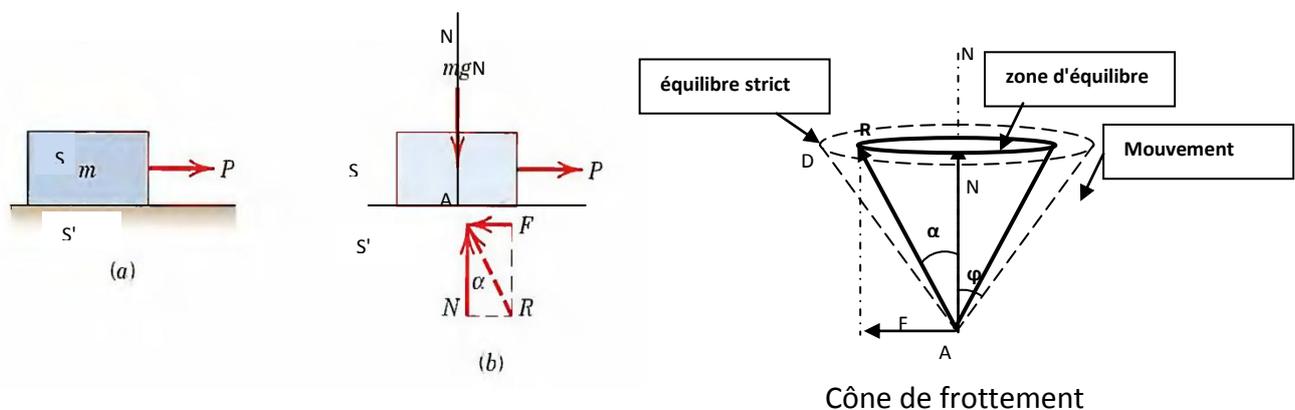


Figure III. 17: Le cône de frottement et condition d'équilibre.

Si on considère le cône de révolution  $C$  (*Cône de frottement*) d'axe  $AN$  engendré par une droite  $AD$  faisant avec  $AN$  l'angle  $\varphi$ , il faut et il suffit pour l'équilibre que les forces admettent une résultante passant par  $A$  et située dans le cône  $C$ .

## **Chapitre IV**

### **La géométrie des masses**

## IV. La géométrie des masses

### IV.1 Introduction

Afin de comprendre et de pouvoir décrire les mouvements des systèmes matériels, il est important de connaître la répartition géométrique afin de se préparer aux concepts de cinétiques et dynamiques des solides.

L'intérêt de cette partie est de nous permettre de connaître un certain nombre de données sur la répartition des masses des systèmes. Nous, nous intéresserons à la détermination :

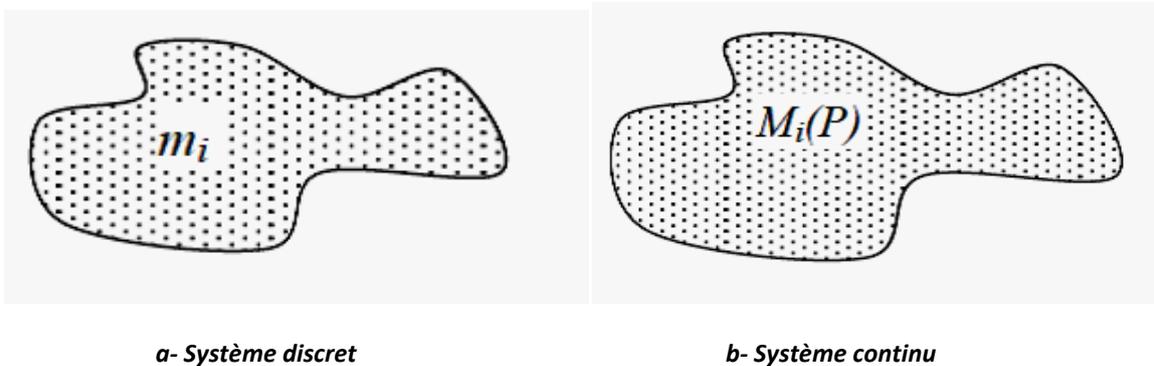
- des centres de masse du solide
- des moments d'inertie, des produits d'inertie par rapport à des axes et aux tenseurs d'inertie des solides quelconques dans différents repères.

L'opérateur d'inertie sert à caractériser la répartition des masses d'un solide, afin d'étudier par la suite, un mouvement quelconque de celui-ci.

### IV.2 Systèmes discrets

La masse d'un système discret est la somme des  $n$  points matériels discrets de masses  $m_i$  :

$$m = \sum_{i=1}^n m_i$$



**Figure IV. 1:** Le système discret et le système continu.

#### IV.2.1 Systèmes continus

Si le système est constitué d'un ensemble continu de masses, la masse du système s'écrirait sous la forme d'une intégrale continue :

$$m = \int_{(S)} dm(P)$$

L'élément  $dm(P)$  est la mesure de la masse au voisinage du point (P).

**b. Le système (S) est un volume**

La masse s'écrirait :  $m = \int_V \rho_{(P)} \cdot dv$

$\rho_{(P)}$ : est la masse volumique au point  $P$  et  $dv$  un élément de volume du solide (S).

**c. Le système (S) est une surface (cas des plaques fines)**

L'épaisseur est négligeable devant les deux autres dimensions. La masse s'écrirait :

$$m = \int_S \sigma_{(P)} \cdot dS$$

$\sigma_{(P)}$  est la densité surfacique au point  $P$  et  $dS$  un élément de surface du solide (S).

**d. Le système (S) est linéaire (cas des tiges fines)**

Les deux dimensions sont négligeables devant la longueur de la tige. La masse s'écrirait :

$$m = \int_L \lambda_{(P)} \cdot dL$$

$\lambda_{(P)}$  est la densité linéique au point  $P$  et  $dL$  un élément de longueur du solide (S).

**Remarque:** Dans les systèmes homogènes (solides homogènes) la densité des solides est constante.

**IV.3 Centre d'inertie (centre de masse) des solides**

Soit  $O$  le centre d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On appelle centre d'inertie d'un système matériel (S) le point  $G$  défini par la relation :

$$\int_{P \in (S)} \overrightarrow{GP} \cdot dm = \vec{0}$$

où  $P$  est un point du solide avec :  $\overrightarrow{OP} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$  et  $\overrightarrow{OG} = x_G \cdot \vec{i} + y_G \cdot \vec{j} + z_G \cdot \vec{k}$

Les coordonnées du centre d'inertie  $G$  d'un système homogène sont déterminées par des calculs utilisant les éléments infinitésimaux tel que :  $dL$  pour les éléments linéaires,  $dS$  pour les éléments surfaciques et  $dv$  pour les éléments volumiques. Ainsi nous pouvons écrire :

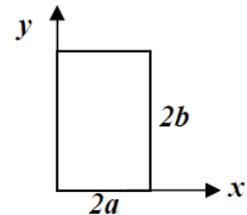
$$x_G = \frac{1}{m} \cdot \int_{P \in (S)} x \cdot dm, \quad y_G = \frac{1}{m} \cdot \int_{P \in (S)} y \cdot dm, \quad z_G = \frac{1}{m} \cdot \int_{P \in (S)} z \cdot dm$$

**Remarques :**

- Le centre d'inertie des masses homogènes coïncide avec le centre d'inertie de leurs volumes s'ils sont volumiques ou de leurs surfaces s'ils sont surfaciques.

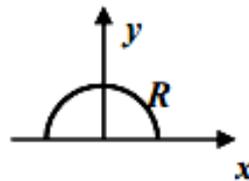
- Si le solide présente des éléments de symétrie (axes ou plans) son centre d'inertie est nécessairement situé sur ces éléments de symétrie.

**Exemple 1 :** calculer le centre de gravité d'un rectangle (plein) de  $2b$  de longueur et de  $2a$  de largeur.



**Exemple 2 :**

Déterminer le centre d'inertie d'un demi-cercle matériel de rayon  $R$  et d'une densité linéaire  $\lambda$ .



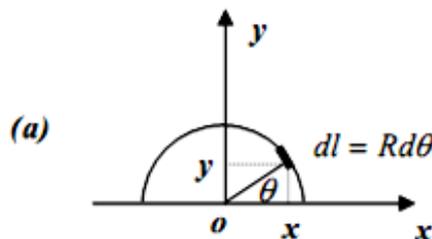
a) L'axe  $(Oy)$  est un axe de symétrie donc :  $x_G = 0$ , le centre de masse du solide est situé sur

l'axe de symétrie. On a :  $y_G = \frac{1}{m_s} \int dm$

Le solide est linéaire ayant la forme d'un demi cercle, sa masse est donnée par :

$m = \int_s \lambda dl$  où :  $\lambda$  est la densité linéaire et  $dl$  un élément de longueur. L'élément de longueur

$dl$  a pour coordonnées :  $dl \begin{cases} R \cos \theta \\ R \sin \theta \end{cases}$  avec :  $0 \leq \theta \leq \pi$



La masse du solide est donnée par :  $m = \int_s \lambda dl = \int_0^\pi \lambda R d\theta = \lambda \pi R$

$$y_G = \frac{1}{m_s} \int y dm = \frac{1}{m_s} \int y \lambda dl = \frac{1}{\lambda \pi R} \int_0^\pi R \sin \theta R d\theta = \frac{R}{\pi} (-\cos \theta) \Big|_0^\pi = \frac{2R}{\pi} ; \text{ d'où : } G \begin{cases} x_G = 0 \\ y_G = \frac{2R}{\pi} \end{cases}$$

**IV.4 Centre d’inertie d’un système composé**

Dans la réalité c’est le cas le plus souvent rencontré, les calculs sont élémentaires en raisonnant sur chacun des éléments qui composent les systèmes.

On détermine d’abord le centre d’inertie de chaque élément  $\Delta_i$  du système au point  $G_i$ , puis on détermine le centre d’inertie  $G$  du système comme barycentre des points  $G_i$ .

Soient les éléments d’un système composé :  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$  ayant pour centres d’inertie respectifs :  $G_1, G_2, \dots, G_n$  ayant pour vecteurs positions dans un repère :  $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  :  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$ .

Le centre d’inertie de ce système est donné par :

$$\vec{r}_G = \frac{\sum_{i=1}^n \vec{r}_i \cdot \Delta_i}{\sum_{i=1}^n \Delta_i}$$

Elle peut être un élément de longueur, de surface, de volume ou de masse.

Le centre d’inertie du système aura pour coordonnées :

$$\vec{x}_G = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{x}_i \cdot \Delta_i}{\sum_{i=1}^n \Delta_i}, \quad \vec{y}_G = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{y}_i \cdot \Delta_i}{\sum_{i=1}^n \Delta_i}, \quad \vec{z}_G = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{z}_i \cdot \Delta_i}{\sum_{i=1}^n \Delta_i}$$

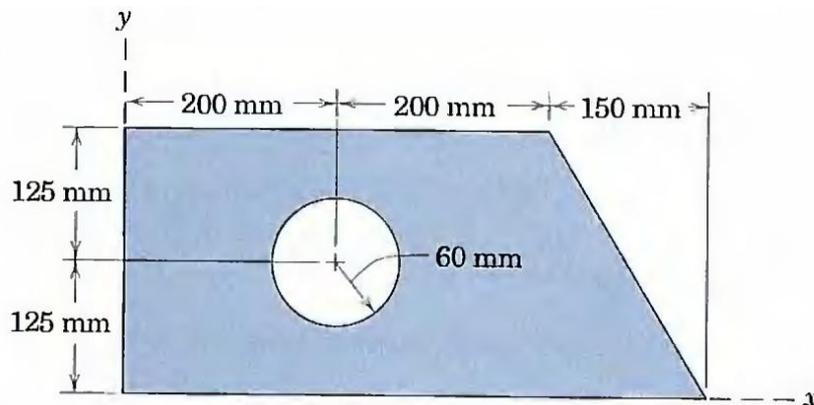
où :  $x_i, y, z_i$  sont les coordonnées des points  $G_i$  où l’élément  $\Delta_i$  est concentré.

si les  $\Delta_i$  sont des éléments de masses alors on peut écrire :

$$\vec{x}_G = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{x}_i \cdot m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad \vec{y}_G = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{y}_i \cdot m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad \vec{z}_G = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{z}_i \cdot m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

**Exemple :**

Déterminer le centre d’inertie de la surface suivante



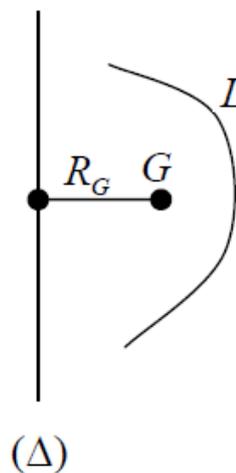
### IV.5 Théorème de Guldin

Une seconde méthode pour la détermination des centres d'inertie des solides linéaires ou surfaciques homogènes fut trouvée par *Guldin*. Elle consiste à faire tourner ces solides autour des axes qu'ils n'interceptent pas. Les solides linéaires décriront des surfaces et les solides surfaciques décriront des volumes.

#### IV.5.1 Premier théorème de Guldin

La surface  $S$  engendrée par la rotation d'un arc de courbe de longueur  $L$  autour d'un axe  $(\Delta)$  sans l'intercepter dans son plan est égale au produit de la longueur  $L$  de l'arc par la longueur de la circonférence  $2.\pi.R_G$  décrite par le centre d'inertie  $G$  de l'arc de courbe.

Soit  $L$  la longueur de l'arc et  $R_G$  sont centre d'inertie (Figure IV.2).



**Figure IV. 2:** Théorème de Guldin pour un solide linéaire.

La longueur (périmètre) décrite par la rotation du centre d'inertie  $G$  par rapport à l'axe  $(\Delta)$  est donnée par :  $2.\pi.R_G$  , alors la surface décrite par cet élément est égale à :

$$S_{/\Delta} = 2. \pi. R_G. L \quad \text{d'où} \quad R_G = \frac{S_{/\Delta}}{2.\pi.L}$$

Dans le cas d'un système homogène de plusieurs éléments on aura :  $R_G = \frac{S_{totale /\Delta}}{2.\pi.L_{totale}}$

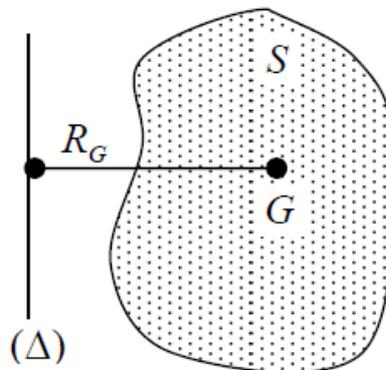
si l'axe  $(\Delta)$  représente l'axe  $(O, \vec{y})$  nous aurons :  $x_G = \frac{S_{/oy}}{2.\pi.L}$

si l'axe  $(\Delta)$  représente l'axe  $(O, \vec{x})$  nous aurons :  $y_G = \frac{S_{/ox}}{2.\pi.L}$

#### IV.5.2 Deuxième théorème de Guldin

Une surface plane homogène  $S$  , limitée par une courbe fermée simple et tournant autour d'un axe  $(\Delta)$  sans le rencontrer engendre un volume  $V$ .

Le volume  $V$  engendré est égal au produit de la surface  $S$  par la longueur du périmètre  $2.\pi.R_G$  décrit par le centre d'inertie  $G$  de cette surface autour de l'axe  $(\Delta)$  (Figure IV.3).



**Figure IV. 3:** Théorème de Guldin pour un corps surfacique.

Soit  $S$  la surface et  $R_G$  la distance de son centre d'inertie  $(\Delta)$ . La longueur (périmètre) décrite par la rotation du centre d'inertie  $G$  par rapport à l'axe  $(\Delta)$  est donnée par :  $2.\pi.R_G$ , alors le volume décrit par cette surface est égal à :

$$V_{/\Delta} = 2.\pi.R_G.S \quad \text{d'ou} \quad R_G = \frac{V_{/\Delta}}{2.\pi.S}$$

Dans le cas d'un système homogène composé de plusieurs surfaces on aura :  $R_G = \frac{V_{totale /\Delta}}{2.\pi.S_{totale}}$

si l'axe  $(\Delta)$  représente l'axe  $(O, \vec{y})$  nous aurons :  $x_G = \frac{V_{total /oy}}{2.\pi.S_{totale}}$

si l'axe  $(\Delta)$  représente l'axe  $(O, \vec{x})$  nous aurons :  $y_G = \frac{V_{total /ox}}{2.\pi.S_{totale}}$

## IV.6 Opérateur d'inertie

### IV.6.1 Définition du moment d'inertie d'un solide

Soit un solide de masse  $dm$  lié à une tige  $(AA')$  de masse négligeable, en rotation autour d'un axe  $(\Delta)$ . Si on applique un couple au système (tige + masse), il se mettra à tourner librement autour de l'axe  $(\Delta)$ . Le temps nécessaire à cet élément de masse  $dm$  pour atteindre une vitesse de rotation donnée est proportionnel à la masse  $dm$  et au carré de la distance  $r$  qui sépare la masse de l'axe  $(\Delta)$ . C'est pour cette raison que le produit  $r^2.dm$  est appelé moment d'inertie de la masse  $dm$  par rapport à l'axe  $(\Delta)$ .

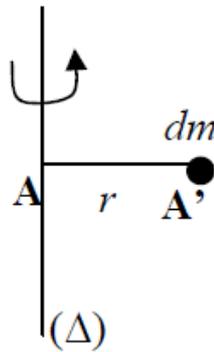


Figure IV. 4: Représentation d'un moment d'inertie d'un corps.

### IV.6.2 Moments et produits d'inertie d'un solide

Soit un repère orthonormé  $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  et un solide  $(S)$  tel que  $O \in (S)$ . Le moment d'inertie de ce solide par rapport au point  $O$  (Moment polaire) est obtenu en intégrant la relation  $r^2 \cdot dm$ .

$$I_O = \int_{(S)} r^2 \cdot dm$$

$$r^2 = OP^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

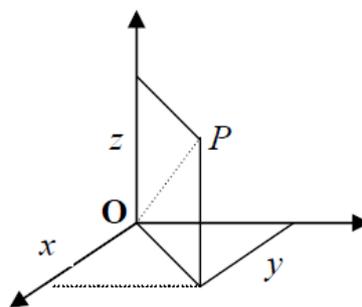


Figure IV. 5: Moment d'inertie d'un corps par rapport à un point (Moment polaire).

Les intégrales sont calculées sur le solide. Celui-ci peut être linéaire, surfacique ou volumique. L'élément d'intégration  $dm(P)$  est situé en un point  $P$  du solide.

Le tenseur d'inertie du solide au point  $O$  est représenté dans la base  $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  par une matrice notée: appelée matrice d'inertie en  $O$  dans la base  $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  du solide  $(S)$  :

$$I_{O(S)/R} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

Les éléments de la matrice d'inertie s'écriraient sous la forme :

- Moment d'inertie par rapport à l'axe  $(Ox)$  :  $I_{xx} = \int_{(S)} (y^2 + z^2) dm$
- Moment d'inertie par rapport à l'axe  $(Oy)$  :  $I_{yy} = \int_{(S)} (x^2 + z^2) dm$
- Moment d'inertie par rapport à l'axe  $(Oz)$  :  $I_{zz} = \int_{(S)} (x^2 + y^2) dm$
- Moment d'inertie par rapport au plan  $(Oxy)$  où produit d'inertie :  $I_{xy} = \int_{(S)} x \cdot y dm$
- Moment d'inertie par rapport au plan  $(Oxz)$  où produit d'inertie :  $I_{xz} = \int_{(S)} x \cdot z dm$
- Moment d'inertie par rapport au plan  $(Oyz)$  où produit d'inertie :  $I_{yz} = \int_{(S)} y \cdot z dm$

### Observations :

Certains solides présentent des formes particulières admettant *des plans de symétrie* par rapport aux axes du repère choisi. Pour chaque plan de symétrie, les produits d'inertie sur les deux autres plans sont nuls :

$$(xOy) \text{ plan de symétrie} \implies I_{xz} = \int_{(S)} x \cdot z dm = 0 \text{ et } I_{yz} = \int_{(S)} y \cdot z dm = 0$$

$$(yOz) \text{ plan de symétrie} \implies I_{xz} = \int_{(S)} x \cdot z dm = 0 \text{ et } I_{xy} = \int_{(S)} x \cdot y dm = 0$$

$$(xOz) \text{ plan de symétrie} \implies I_{yz} = \int_{(S)} y \cdot z dm = 0 \text{ et } I_{xy} = \int_{(S)} x \cdot y dm = 0$$

### IV.7 Solides plans

Dans le cas des solides plans, l'une des coordonnées de l'élément,  $dm$  est *nulle*. Si le solide est dans le plan  $(xOy)$  alors  $z = 0$ .

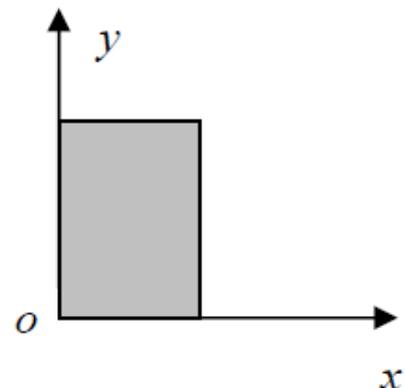
On déduit immédiatement que :

$$I_{xx} = \int_{(S)} y^2 dm$$

$$I_{yy} = \int_{(S)} x^2 dm$$

$$\text{d'où } I_{zz} = \int_{(S)} (x^2 + y^2) dm = I_{xx} + I_{yy}$$

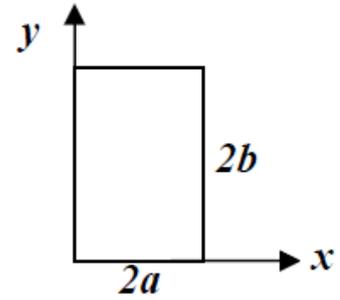
$$I_{xy} = \int_{(S)} x \cdot y dm \quad \text{avec } I_{zy} = I_{yz} = 0$$



**Exemple :**

Déterminer le moment d'inertie au point  $G$  de la plaque mince rectangulaire de masse  $m$ , de longueur  $2a$  et de largeur  $2b$  de centre d'inertie  $G(a, b, 0)$ .

Les plans  $(xGz)$  et  $(yGz)$  sont des plans de symétrie, alors tous les produits d'inertie sont nuls  $I_{Gxy} = I_{Gxz} = I_{Gyz} = 0$ ; la matrice d'inertie en  $G$  est diagonale.



Masse de la plaque :  $m = \sigma \cdot S = \sigma \cdot 4b$

Nous avons un solide plan :  $z = 0 \implies I_{Gzz} = I_{Gxx} + I_{Gyy}$

$$I_{Gxx} = \int_S y^2 dm = \int_S y^2 \sigma ds = \sigma \int_S y^2 dx dy = \sigma \int_{-a}^{+a} dx \int_{-b}^{+b} y^2 dy = \sigma \cdot 2a \cdot \frac{2}{3} b^3 = \sigma 4ab \frac{b^2}{3} = \frac{mb^2}{3}$$

$$I_{Gyy} = \int_S x^2 dm = \int_S x^2 \sigma ds = \sigma \int_S x^2 dx dy = \sigma \int_{-a}^{+a} x^2 dx \int_{-b}^{+b} dy = \sigma \cdot \frac{2}{3} a^3 \cdot 2b = \sigma 4ab \frac{a^2}{3} = \frac{ma^2}{3}$$

$$I_{Gzz} = I_{Gxx} + I_{Gyy} = \frac{m}{3}(a^2 + b^2)$$

La matrice d'inertie au point  $G$  s'écrit :

$$I_G(S) = \begin{bmatrix} \frac{mb^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ma^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{3}(a^2 + b^2) \end{bmatrix}$$

**IV.8 Théorème de HUYGENS**

Si le tenseur d'inertie est connu au centre d'inertie  $G$  du solide  $(S)$  dans la base  $R(\mathbf{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ; alors on peut déterminer le tenseur d'inertie au point  $O$  dans la même base par les six relations de Huygens, qui lient les moments d'inertie et les produits d'inertie en un point  $O$  d'un repère et le centre d'inertie  $G$  du solide dans le même repère.

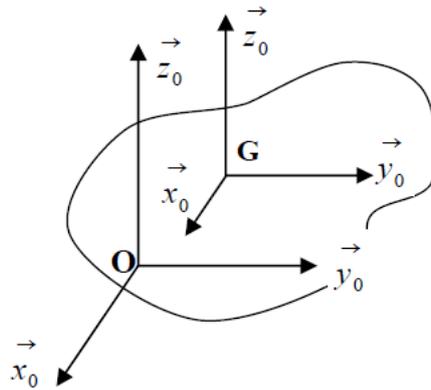


Figure IV. 6: Moment d'inertie par rapport deux point différents (Théorème de HUYGENS).

$$\begin{aligned}
 I_{Oxx} &= I_{Gxx} + m(y_G^2 + z_G^2) & I_{Oxy} &= I_{Gxy} + mx_G y_G \\
 I_{Oyy} &= I_{Gyy} + m(x_G^2 + z_G^2) & I_{Oxz} &= I_{Gxz} + mx_G z_G \\
 I_{Ozz} &= I_{Gzz} + m(x_G^2 + y_G^2) & I_{Oyz} &= I_{Gyz} + my_G z_G
 \end{aligned}$$

**Exemple :**

Déterminer le moment d'inertie au point  $O$  de la plaque mince rectangulaire de masse  $m$ , de longueur  $2a$  et de largeur  $2b$  de centre d'inertie  $G(a, b, 0)$ (exemple précédent).

On déduit par le théorème de Huygens :

$$\begin{aligned}
 I_{Oxx} &= \frac{mb^2}{3} + mb^2 = \frac{4}{3}mb^2 & ; & \quad I_{Oxy} = 0 + mab \\
 I_{Oyy} &= \frac{ma^2}{3} + ma^2 = \frac{4}{3}ma^2 & ; & \quad I_{Oxz} = 0 + ma \cdot 0 = 0 \\
 I_{Ozz} &= \frac{m}{3}(a^2 + b^2) + m(a^2 + b^2) = \frac{4}{3}m(a^2 + b^2) & ; & \quad I_{Oyz} = 0 + mb \cdot 0 = 0
 \end{aligned}$$

La matrice d'inertie au point  $O$  est égale à :

$$I_O(S) = \begin{bmatrix} \frac{4}{3}mb^2 & -mab & 0 \\ -mab & \frac{4}{3}ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3}m(a^2 + b^2) \end{bmatrix}$$

## **Chapitre V**

### **Cinématique d'un corps solide**

## V. Cinématique d'un corps solide

### V.1 Introduction

La cinématique est une partie de la mécanique rationnelle qui permet d'étudier le mouvement des corps indépendamment des causes qui les produisent (les actions mécanique). Elle introduit la notion de temps. Un terme plus général qui concerne la vitesse et les mécanismes d'une grande variété de processus en mécanique. Donc la cinématique permet d'étudier la trajectoire, la vitesse et l'accélération des mobiles à l'instant (t).

### V.2 Rappel sur la cinématique de point matériel

#### V.2.1 La trajectoire

Soit M point matériel se déplace dans un repère fixe  $R(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  Fig. (III.1)

La position du point M dans ce repère  $R(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  est définie par le vecteur de trajectoire à l'instant (t).

$$\vec{r}(t) = \begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases}$$

Avec:

$x(t), y(t), z(t)$ : sont les coordonnées du point M à l'instant (t).

$M(t)$ :est la position du point M à l'instant (t).

$M'(t + \Delta t)$ :est la position du point M à l'instant (t+  $\Delta t$ ).

$\overrightarrow{MM'}$ : est le vecteur déplacement du point M.

(S): est la trajectoire du point M par rapport au repère (R).

#### Remarque :

On dit un mouvement du point M est rectiligne lorsque la trajectoire (S) est une droite, et on dit le mouvement du point est curviligne lorsque la trajectoire (S) est une courbe.

#### V.2.2 Vitesse rectiligne (vecteur de vitesse)

On dit la vitesse du mobile est rectiligne lorsque le mouvement est rectiligne, il existe deux types de vitesse (moyenne et instantanée).

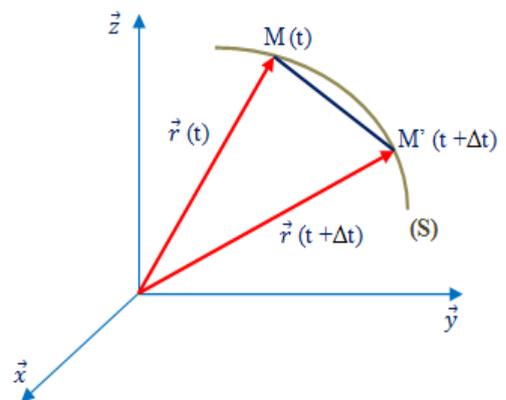


Figure V. 1: Trajectoire d'un mobile.

**a. Vitesse moyenne**

La vitesse moyenne entre deux instants ( $t$  et  $t+\Delta t$ ) est définie par:

$$\vec{V}_m = \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

**b. Vitesse instantanée**

La vitesse instantanée est définie par:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Ce vecteur reste toujours tangent à la trajectoire et du même sens du mouvement.

**V.2.3 Accélération**

Il existe deux types d'accélération

**a. Accélération moyenne**

L'accélération moyenne entre deux instants ( $t$  et  $t+\Delta t$ ) est définie par:

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

**b. Accélération instantanée**

L'accélération instantanée est la dérivée de la vitesse, elle est donnée par :  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

**V.3 Mouvement d'un point matériel****V.3.1 Mouvement rectiligne**

Si la trajectoire est une ligne droite alors  $\rho = \infty$ , donc  $W_n = \frac{v^2}{\rho} = 0$ , et l'accélération total du point matériel égale seulement à l'accélération tangentielle.

$$W = W_\tau = \frac{dv}{dt}$$

Dans ce cas, la vitesse varie seulement dans sa valeur, alors on peut conclure que l'accélération tangentielle représente la variation dans la valeur de la vitesse.

**V.3.2 Mouvement curviligne uniforme**

On appelle un mouvement curviligne uniforme si la valeur de la vitesse reste tout le temps constante ( $v = \text{const}$ ), dans ce cas,  $W_\tau = \frac{dv}{dt} = 0$  et l'accélération total égale à l'accélération normale seulement.

$$W = W_n = \frac{v^2}{\rho}$$

L'accélération sera orientée dans ce cas sur la normale de la trajectoire du point matériel : ou l'accélération se produit dans ce cas à cause de la variation de l'orientation de la vitesse. Donc on conclue que l'accélération normale représente la variation dans l'orientation de vitesse.

Pour l'écriture de la loi de mouvement curviligne uniforme, on a :

$$\frac{ds}{dt} = v \rightarrow ds = v \cdot dt$$

On considère que au début de mouvement ( $t=0$ ), l'abscisse initial est  $s_0$ , intégrant la formule précédente on obtient :

$$\int_{s_0}^s ds = \int_0^t v \cdot dt \rightarrow s - s_0 = v \cdot t \quad \text{avec } v = \text{const}$$

finalement on obtient :  $s = v \cdot t + s_0$

### V.3.3 Mouvement rectiligne uniforme

Dans un mouvement rectiligne uniforme l'accélération normale et l'accélération tangentielle sont nulles ( $W_n = W_\tau = 0$ ) , alors l'accélération totale est nulle  $W = 0$ . Donc le mouvement rectiligne uniforme est le seul mouvement qui à l'accélération nulle.

### V.3.4 Mouvement rectiligne uniformément variable

C'est le mouvement qui à une accélération tangentielle constante tout le temps  $W_\tau = \text{const}$ , on déduit la loi de mouvement si on pose à l'instant  $t=0$  l'abscisse initial  $s = s_0$  et  $v = v_0$ . avec  $v_0$  la vitesse initiale du point matériel.

$$W_\tau = \frac{dv}{dt} \rightarrow dv = W_\tau \cdot dt \quad \text{avec } W_\tau = \text{const}$$

$$\int_{v_0}^v dv = \int_0^t W_\tau \cdot dt \rightarrow v - v_0 = W_\tau \cdot t$$

finalement :  $v = W_\tau \cdot t + v_0$

on a aussi :  $v = \frac{ds}{dt}$

$$\frac{ds}{dt} = W_\tau \cdot t + v_0 \rightarrow ds = (W_\tau \cdot t + v_0) \cdot dt$$

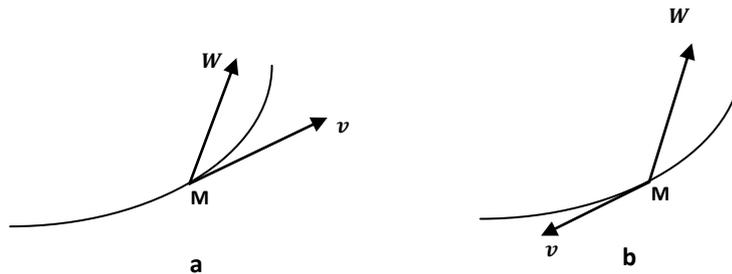
$$\int_{s_0}^s ds = \int_0^t (W_\tau \cdot t + v_0) \cdot dt \rightarrow s - s_0 = \frac{1}{2} \cdot W_\tau \cdot t^2 + v_0 \cdot t$$

finalement on obtient :  $s = \frac{1}{2} \cdot W_\tau \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0$

**Remarque:**

a- Le mouvement est accéléré :  $\vec{v} \cdot \overline{W}_t > 0$

b- Le mouvement est décéléré :  $\vec{v} \cdot \overline{W}_t < 0$



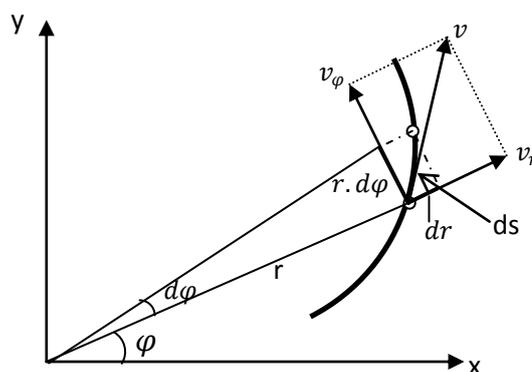
**Figure V. 2:** Représentation du mouvement rectiligne uniformément variable (Cas d'accélération et décélération).

**IV.1.8 La vitesse dans les coordonnées polaires**

Dans le cas où un point matériel se déplace tout le temps dans le même plan, donc on peut déterminer sa position avec les coordonnées polaires  $r$  et  $\varphi$  (voir figure).

Ces coordonnées polaires changent durant le mouvement du point dans le plan avec le temps, donc la loi de mouvement dans les coordonnées polaires est donnée par :

$$r = f_1(t), \quad \varphi = f_2(t)$$



**Figure V. 3:** Composantes polaires de la vitesse.

La vitesse est la dérivée du  $ds$  par rapport au temps  $\frac{ds}{dt}$ , le déplacement  $ds$  est composée d'un déplacement radial  $dr$  et un déplacement transversal  $r \cdot d\varphi$ . donc la vitesse est la somme de la composante radiale et la composante transversale.

$$v_r = \frac{dr}{dt} = \dot{r}, \quad v_\varphi = r \cdot \frac{d\varphi}{dt} = r \cdot \dot{\varphi}$$

$$v = \sqrt{(v_r)^2 + (v_\varphi)^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \cdot \dot{\varphi}^2}$$

On peut aussi déterminer ses équations en écrivant les coordonnées cartésiennes en fonction des coordonnées polaires :

$$x = r \cdot \cos\varphi, \quad y = r \cdot \sin\varphi$$

La vitesse :

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{r} \cdot \cos\varphi - r \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin\varphi \\ \dot{y} = \dot{r} \cdot \sin\varphi + r \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos\varphi \end{cases}$$

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \cdot \dot{\varphi}^2}$$

L'accélération :

$$W = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)^2 + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})^2}$$

Avec :  $W_r = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)$  est l'accélération radiale.

$W_\varphi = (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})$  est l'accélération transversale.

### V.4 Cinématique du corps solide

Un corps solide parfait, est un ensemble des points matériels, dans lequel distances entre ces points ne varient pas au cours du temps. Par conséquent, les vitesses entre ces points ne sont pas indépendantes. D'ici, la cinématique du corps solide permet d'étudier la distribution des vitesses des points dans un corps.

#### V.4.1 Torseur cinématique distribution des vitesses

Un corps solide se déplace dans un repère mobile  $R(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ . Supposons un repère de référence  $R_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ . (A,B) sont deux points appartenant au solide (S)

Le torseur cinématique exprimé au point A du solide (S) dans son mouvement par rapport au repère  $R_0$  est défini par :

$$[V_{S/R_0}]_A = \begin{pmatrix} \vec{\Omega}_{S/R_0} \\ \vec{V}_{A/R_0} \end{pmatrix}$$

avec :

$\vec{\Omega}_{S/R_0}$  : est le vecteur de la vitesse angulaire du solide (S) par rapport au repère  $R_0$ .

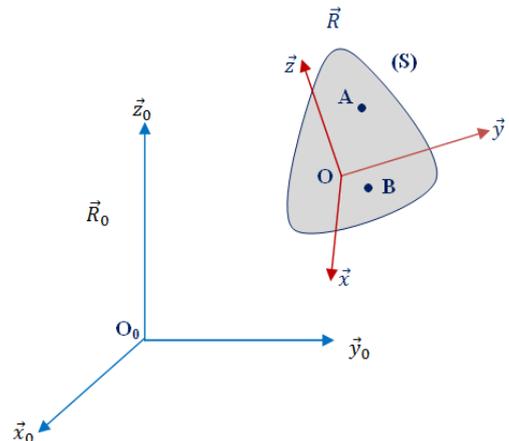


Figure V. 4 : Champ des vitesses d'un corps solide.

$\vec{V}_{A/R_0}$  : est le vecteur de la vitesse instantanée du point A appartenant au solide (S) par rapport au repère  $R_0$ .

#### V.4.2 Champ des vitesses d'un solide

Le vecteur de la vitesse du point A appartenant au solide (S) est défini par :

$$\vec{V}_{A/R_0} = \left( \frac{d\vec{OA}}{dt} \right)_{/R_0}$$

Un corps solide parfait est du que la dérivée par rapport au temps de la distance entre deux points quelconques A et B est nulle:

$$\frac{d(\overline{AB})^2}{dt} = 0 \Leftrightarrow 2\overline{AB} \cdot \frac{d\overline{AB}}{dt} = 2\overline{AB} \cdot (\vec{V}_B - \vec{V}_A) = 0$$

La relation de la vitesse du point A par rapport la vitesse du point B ( $\vec{V}_{A/R_0}, \vec{V}_{B/R_0}$ ) est exprimé par:

A partir la formule de dérivation d'un vecteur et le mouvement relatif (cours Physique 1 de 1<sup>ère</sup> année ST):

$$\vec{V}_{A/R_0} = \left( \frac{d\vec{OA}}{dt} \right)_{/R_0} = \left( \frac{d\vec{OA}}{dt} \right)_{/R} + \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \vec{OA}$$

$$\vec{V}_{B/R_0} = \left( \frac{d\vec{OB}}{dt} \right)_{/R_0} = \left( \frac{d\vec{OB}}{dt} \right)_{/R} + \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \vec{OB}$$

On a :

$$\vec{V}_{B/R_0} - \vec{V}_{A/R_0} = \left( \frac{d[\vec{OB} - \vec{OA}]}{dt} \right)_{/R} + \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge [\vec{OB} - \vec{OA}]$$

$$\vec{V}_{B/R_0} - \vec{V}_{A/R_0} = \left( \frac{d[\vec{AB}]}{dt} \right)_{/R} + \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge [\vec{AB}]$$

(S) est un corps solide parfait :

$$\Rightarrow \overline{AB} = \text{constante}$$

Donc :

$$\left( \frac{d[\vec{AB}]}{dt} \right)_{/R} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{V}_{B/R_0} = \vec{V}_{A/R_0} + \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \vec{AB}$$

C'est la formule de distribution des vitesses dans un corps solide indéformable en mouvement. Elle montre que le champ des vitesses d'un solide est un champ antisymétrique.

### V.4.3 Champ des accélérations d'un solide

Pour déterminer la relation entre l'accélération du point A avec l'accélération du point B, on peut dire :

$$\vec{\gamma}_{B/R_0} = \left( \frac{d\vec{V}_{B/R_0}}{dt} \right)_{/R_0}$$

Avec : A et B appartenant au corps solide (S)

$$\text{et : } \vec{V}_{B/R_0} = \vec{V}_{A/R_0} + \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge [\overline{AB}]$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}_{B/R_0} = \left( \frac{d\vec{V}_{B/R_0}}{dt} \right)_{R_0} = \left( \frac{\vec{V}_{A/R_0} + \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \overline{AB}}{dt} \right)_{R_0}$$

$$\vec{\gamma}_{B/R_0} = \left( \frac{d\vec{V}_{A/R_0}}{dt} \right)_{R_0} + \left( \frac{d\vec{\Omega}_{S/R_0}}{dt} \right)_{R_0} \wedge \overline{AB} + \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \left( \frac{d\overline{AB}}{dt} \right)_{R_0}$$

Ou :

$$\left( \frac{d\overline{AB}}{dt} \right)_{R_0} = \left( \frac{d\overline{AB}}{dt} \right)_R + \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \overline{AB}$$

$$\vec{\gamma}_{B/R_0} = \left( \frac{d\vec{V}_{A/R_0}}{dt} \right)_{R_0} + \left( \frac{d\vec{\Omega}_{S/R_0}}{dt} \right)_{R_0} \wedge \overline{AB} + \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge (\vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \overline{AB})$$

$$\vec{\gamma}_{B/R_0} = \vec{\gamma}_{A/R_0} + \vec{\varepsilon}_{S/R_0} \wedge \overline{AB} + \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge (\vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \overline{AB})$$

avec :

$\vec{\varepsilon}_{S/R_0}$  : est l'accélération angulaire du corps solide (S) par rapport le repère  $\vec{R}_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

C'est la Formule de distribution des accélérations dans un corps solide indéformable.

## V.5 Mouvements particuliers fondamentaux

### V.5.1 Mouvement de translation pur

On dit un solide (S) lié à un repère  $R(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  fait mouvement de translation pur par rapport à un repère  $\vec{R}_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ , si les axes de  $R(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  gardent une direction fixe par rapport à ceux de  $\vec{R}_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ , au cours du temps.

Tous les points du solide ont la même vitesse et la même accélération que le point  $A \in (S)$

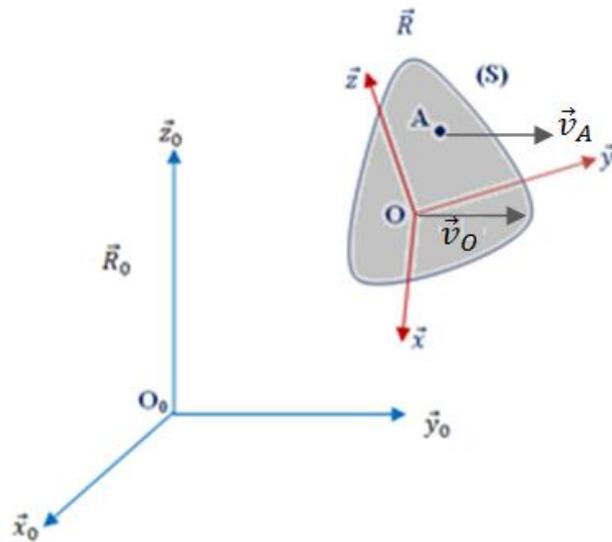


Figure V. 5: Mouvement de translation d'un solide.

On peut écrire la vitesse du point A par rapport  $\vec{R}_0$ . par :

$$\vec{V}_{A/R_0} = \vec{V}_{O/R_0} + \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \vec{OA}$$

La vitesse de rotation du solide est nulle par rapport  $\vec{R}_0$ .

On peut écrire :

$$\begin{cases} \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \vec{OA} = \vec{0} \\ \text{et} \\ \vec{OA} \neq \vec{0} \end{cases} \Rightarrow \vec{\Omega}_{S/R_0} = \vec{0} \Rightarrow \vec{V}_{A/R_0} = \vec{V}_{O/R_0}$$

Dans ce cas le champ des vitesses est un champ uniforme, Le torseur cinématique qui décrit le mouvement de translation est :

$$[V_{S/R_0}]_A = \begin{pmatrix} \vec{\Omega}_{S/R_0} = \vec{0} \\ \vec{V}_{A/R_0} = \vec{V}_{O/R_0} \end{pmatrix}$$

Dans ce cas les points du solide ont la même vitesse à chaque instant donc, tous les points font des trajectoires parallèles. Soient A et B deux points appartenant du solide, il ya trois types de trajectoires peuvent être d'écrites:

- **Trajectoire en translation rectiligne :**



- **Trajectoire en translation curviligne :**

Dans ce cas les vitesses de points  $A$  et  $B$  sont parallèles et égales.



- **Trajectoire en translation circulaire :**

Dans ce cas les points  $A$  et  $B$  font des cercles de même rayons à la même vitesse



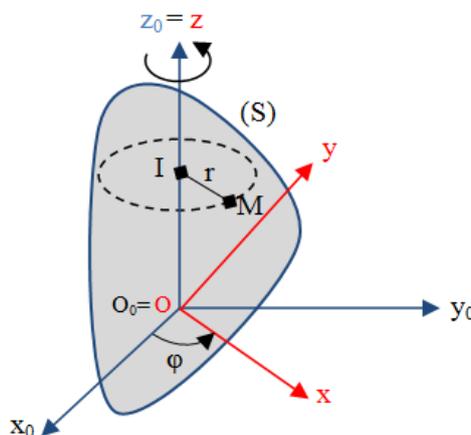
### V.5.2 Mouvement de rotation pur autour d'un axe du solide

#### a. Vitesse d'un point ( $M$ ) du solide

Un solide ( $S$ ) lié à un repère  $R(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  est dit en mouvement de rotation pur par rapport à un repère  $\vec{R}_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  si un axe de  $R(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  reste fixe à tout instant et d'une manière permanente dans le repère  $\vec{R}_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ .  $O$  et  $I$  deux points distincts du solide ( $S$ ) qui restent fixe dans le repère  $\vec{R}_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  au cours du mouvement de rotation. Le repère  $R(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  est en rotation pur par rapport au repère  $\vec{R}_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  à une vitesse angulaire donnée par :

$$\vec{\Omega}_{S/R_0} = \dot{\varphi} \vec{z}_1 = \dot{\varphi} \vec{z} \quad \text{et} \quad (\vec{V}_O)_{R_0} = \vec{0}$$

Soit  $M$  un point quelconque du solide et n'appartenant pas à l'axe de rotation  $(\vec{z}_0)$  tel que:  $\overline{IM} = r\vec{x}$



**Figure V. 6 :** Mouvement de rotation autour d'un axe fixe d'un solide.

En général on peut écrire la vitesse au point M par rapport le repère  $\vec{R}_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  par :

$$\vec{V}_{M/R_0} = \vec{V}_{I/R_0} + \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \overline{IM}$$

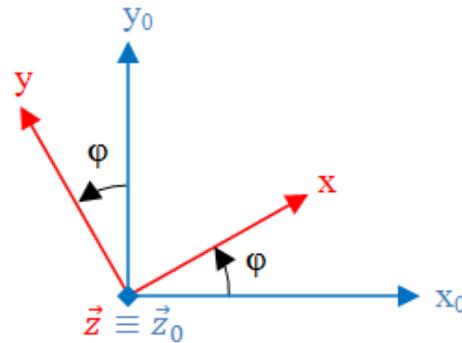
$$\begin{cases} \vec{V}_{I/R_0} = \vec{V}_{O/R_0} + \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \overline{OI} \\ \vec{V}_{O/R_0} = \vec{0} \text{ (O est fixe)} \\ \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \overline{OI} = \vec{0} \text{ (}\vec{\Omega}_{S/R_0}, \overline{OI} \text{ sont Parallèles)} \end{cases} \Rightarrow \vec{V}_{I/R_0} = \vec{0}$$

$$\begin{cases} \vec{\Omega}_{S/R_0} = \dot{\varphi} \vec{z}_1 = \dot{\varphi} \vec{z} \\ \overline{IM} = r \vec{x} \end{cases} \Rightarrow \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \overline{IM} = \dot{\varphi} \vec{z} \wedge r \vec{x} = r \dot{\varphi} \vec{y}$$

$$\Rightarrow \vec{V}_{M/R_0} = r \dot{\varphi} \vec{y}$$

- **La relation entre  $R(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  et  $\vec{R}_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$**

La vue de dessus des repères  $R(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  et  $\vec{R}_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  illustre par **Fig. (III.6)**



**Figure V. 7:** Vue de dessus des repères  $R(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  et  $\vec{R}_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ .

On a :

$$\begin{cases} \vec{x} = \cos\varphi \vec{x}_0 + \sin\varphi \vec{y}_0 \\ \vec{y} = -\sin\varphi \vec{x}_0 + \cos\varphi \vec{y}_0 \\ \vec{z} = \vec{z}_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{bmatrix}$$

avec :

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : \text{La matrice de passage du repère } \vec{R}_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0) \text{ vers le repère } R(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

La vitesse du point M par rapport le repère  $\vec{R}_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  est :

$$\vec{V}_{M/R_0} = r \dot{\varphi} \vec{y} = r \dot{\varphi} (-\sin\varphi \vec{x}_0 + \cos\varphi \vec{y}_0) = -r \dot{\varphi} \sin\varphi \vec{x}_0 + r \dot{\varphi} \cos\varphi \vec{y}_0$$

**b. Accélération d'un point (M) du solide**

En général on peut écrire la vitesse au point M par rapport le repère  $\vec{R}_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  par :

$$\vec{v}_{M/R_0} = \vec{v}_{I/R_0} + \vec{\varepsilon}_{S/R_0} \wedge \overline{IM} + \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge (\vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \overline{IM})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_{I/R_0} = \vec{v}_{O/R_0} + \vec{\varepsilon}_{S/R_0} \wedge \overline{OI} + \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \left( \frac{\vec{\Omega}_{S/R_0}}{R_0} \wedge \overline{OI} \right) \\ \vec{v}_{O/R_0} = \vec{0} \quad (O \text{ est fixe}) \\ \vec{\varepsilon}_{S/R_0} \wedge \overline{OI} = \vec{0} \quad (\vec{\varepsilon}_{S/R_0}, \overline{OI} \text{ sont Parallèles}) \\ \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \overline{OI} = \vec{0} \quad (\vec{\Omega}_{S/R_0}, \overline{OI} \text{ sont Parallèles}) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \vec{v}_{I/R_0} = \vec{0}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \overline{IM} = \dot{\varphi} \vec{z} \wedge r \vec{x} = r \dot{\varphi} \vec{y} \\ \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge (\vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \overline{IM}) = \dot{\varphi} \vec{z} \wedge r \dot{\varphi} \vec{y} = -r \dot{\varphi}^2 \vec{x} \\ \vec{\varepsilon}_{S/R_0} = \ddot{\varphi} \vec{z}_1 = \ddot{\varphi} \vec{z} \\ \vec{\varepsilon}_{S/R_0} \wedge \overline{IM} = \ddot{\varphi} \vec{z} \wedge r \vec{x} = r \ddot{\varphi} \vec{y} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \vec{v}_{M/R_0} = \vec{\varepsilon}_{S/R_0} \wedge \overline{IM} + \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \left( \frac{\vec{\Omega}_{S/R_0}}{R_0} \wedge \overline{IM} \right) = -r \dot{\varphi}^2 \vec{x} + r \ddot{\varphi} \vec{y}$$

avec :  $\left\{ \begin{array}{l} -r \dot{\varphi}^2 \vec{x} = \vec{v}_N : \text{accélération normale} \\ r \ddot{\varphi} \vec{y} = \vec{v}_T : \text{accélération tangentielle} \end{array} \right.$

La vitesse du point M par rapport le repère  $\vec{R}_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  est :

$$\vec{v}_{M/R_0} = -r \dot{\varphi}^2 (\cos \varphi \vec{x}_0 + \sin \varphi \vec{y}_0) + r \ddot{\varphi} (-\sin \varphi \vec{x}_0 + \cos \varphi \vec{y}_0).$$

$$\vec{v}_{M/R_0} = -r (\dot{\varphi}^2 \cos \varphi + \ddot{\varphi} \sin \varphi) \vec{x}_0 + r (-\dot{\varphi}^2 \sin \varphi + \ddot{\varphi} \cos \varphi) \vec{y}_0$$

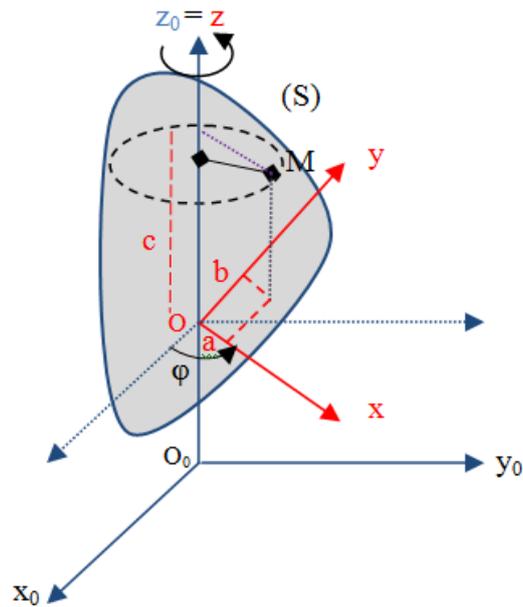
**V.5.3 Mouvement composé (rotation + translation)**

Un solide (S) lié à un repère  $R(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  décrit un mouvement composé (rotation +translation) rapport à un repère  $\vec{R}_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ .

- Un axe de  $R(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  reste en coïncidence à tout instant avec un axe du repère  $\vec{R}_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ .
- La coordonnée du point (O) centre du repère  $R(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  suivant l'axe de coïncidence, est proportionnelle à l'angle de rotation du repère  $\vec{R}_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  au cours du mouvement de rotation.
- On a :  $\overline{O_0O} = k \cdot \varphi(t) \vec{z} = k \cdot \varphi(t) \vec{z}_0$

avec :

$k$  : le pas du mouvement composé le long de l'axe de coïncidence



**Figure V. 8:** Mouvement composé (rotation+translation).

Un point (M) appartenant au solide (S), on a :

$$\overrightarrow{O_0M} = \overrightarrow{O_0O} + \overrightarrow{OM}$$

On a :

$$(\overrightarrow{O_0O})_{R_0} = \begin{pmatrix} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = k \cdot \varphi \end{pmatrix}$$

et :

$$(\overrightarrow{OM})_R = \begin{pmatrix} x = a \\ y = b \\ z = c \end{pmatrix} \text{ et } (\overrightarrow{OM})_{R_0} = \begin{pmatrix} x_0 = a \cdot \cos\varphi \\ y_0 = b \cdot \sin\varphi \\ z_0 = c \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{O_0M})_{R_0} = \begin{pmatrix} x_0 = a \cdot \cos\varphi \\ y_0 = b \cdot \sin\varphi \\ z_0 = c + k \cdot \varphi \end{pmatrix}$$

Donc la vitesse et l'accélération sont définies par :

$$\vec{V}_{M/R_0} = \frac{d(\overrightarrow{O_0M})_{R_0}}{dt} = \begin{pmatrix} V_{x_0} = -a \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin\varphi \\ V_{y_0} = b \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos\varphi \\ V_{z_0} = k \cdot \dot{\varphi} \end{pmatrix}$$

$$\vec{\gamma}_{M/R_0} = \frac{d\vec{V}_{M/R_0}}{dt} = \begin{pmatrix} \gamma_{x_0} = -a \cdot \ddot{\varphi} \cdot \sin\varphi - a \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \cos\varphi \\ \gamma_{y_0} = b \cdot \ddot{\varphi} \cdot \cos\varphi - b \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin\varphi \\ \gamma_{z_0} = k \cdot \ddot{\varphi} \end{pmatrix}$$

**Exemple :**

Une barre homogène de longueur  $L$ , d'extrémités  $O$  et  $A$ . Cette barre est en rotation autour d'un axe fixe  $(O, \vec{z}_1)$ , par un angle de rotation  $\theta$  (Figure V.3), dans le repère fixe  $\vec{R}_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ . Le repère  $R(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_1)$  est lié à la barre, tel que :  $\vec{OA} = L\vec{u}$

Déterminer les vecteurs de vitesse et d'accélération du point  $A$ , par deux méthodes

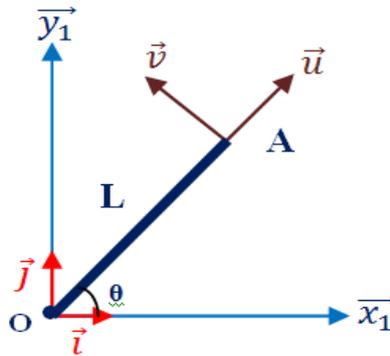


Figure V. 9: Mouvement d'une barre.

Pour déterminer les vecteurs de vitesse et d'accélération du point  $A$  en utilise deux méthodes :

- **Par dérivation directe**

**La vitesse :**

L'expression de la vitesse est donnée par la formule:

$$\vec{V}_{A/R_1} = \left( \frac{d\vec{OA}}{dt} \right)_{R_1} = \left( \frac{d(L\vec{u})}{dt} \right)_{R_1} = L \left( \frac{d\vec{u}}{dt} \right)_{R_1}$$

On a:

$$\vec{u} = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j} \Rightarrow \left( \frac{d\vec{u}}{dt} \right)_{R_1} = \dot{\theta}(-\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}) = \dot{\theta}\vec{v}$$

$$\vec{V}_{A/R_1} = \left( \frac{d\vec{OA}}{dt} \right)_{R_1} = L\dot{\theta}\vec{v}$$

**L'accélération:**

L'expression de l'accélération est donnée par la formule:

$$\vec{A}_{A/R_1} = \left( \frac{d\vec{V}_{A/R_1}}{dt} \right)_{R_1} = \left( \frac{d(L\dot{\theta}\vec{v})}{dt} \right)_{R_1} = L \left[ \dot{\theta} \left( \frac{d\vec{v}}{dt} \right)_{R_1} + \vec{v} \left( \frac{d\dot{\theta}}{dt} \right)_{R_1} \right]$$

On a:

$$\vec{v} = (-\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}) \Rightarrow \left( \frac{d\vec{v}}{dt} \right)_{R_1} = -\dot{\theta}(\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}) = -\dot{\theta}\vec{u}$$

$$\vec{\gamma}_{A/R_1} = \left( \frac{d(\vec{V}_{A/R_1})}{dt} \right)_{R_1} = -L(\dot{\theta})^2 \vec{u} + L\ddot{\theta} \vec{v}$$

- **Par la distribution des vitesses :**

**La vitesse :**

(A, O) sont deux points appartenant à la barre (L), la formule de distribution des vitesses dans un corps solide, on écrit dans le point A est:

$$\vec{V}_{A/R_1} = \vec{V}_{O/R_1} + \vec{\Omega}_{L/R_1} \wedge \overrightarrow{OA}$$

$$\vec{V}_{O/R_1} = \vec{0} \text{ (O: est le centre de rotation de la barre et fixe)}$$

$$\vec{\Omega}_{L/R_1} = \dot{\theta} \vec{z}_1$$

$$\Rightarrow \vec{V}_{A/R_1} = \vec{\Omega}_{L/R_1} \wedge \overrightarrow{OA} = \dot{\theta} \vec{z}_1 \wedge L\vec{u} = L\dot{\theta} \vec{v}$$

**L'accélération**

L'accélération du point A s'écrit :

$$\vec{\gamma}_{A/R_1} = \vec{\gamma}_{O/R_1} + \vec{\varepsilon}_{S/R_1} \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\Omega}_{S/R_1} \wedge (\vec{\Omega}_{S/R_1} \wedge \overrightarrow{AB})$$

On a :

$$\vec{\gamma}_{O/R_0} = \vec{0}$$

$$\vec{\varepsilon}_{S/R_1} = \ddot{\theta} \vec{z}_1$$

$$\vec{\Omega}_{L/R_1} = \dot{\theta} \vec{z}_1$$

$$\overrightarrow{AB} = L\vec{u}$$

$$\vec{\gamma}_{A/R_1} = \ddot{\theta} \vec{z}_1 \wedge L\vec{u} + \dot{\theta} \vec{z}_1 \wedge (\dot{\theta} \vec{z}_1 \wedge L\vec{u})$$

$$\vec{\gamma}_{A/R_1} = L\ddot{\theta} \vec{v} + \dot{\theta} \vec{z}_1 \wedge (L\dot{\theta} \vec{v})$$

$$\vec{\gamma}_{A/R_1} = -L(\dot{\theta})^2 \vec{u} + L\ddot{\theta} \vec{v}$$

## Référence bibliographique

FLORENT, Pierre, LAUTON, Michelle, et LAUTON, Gérard. *Calcul vectoriel, géométrie analytique*. Vuibert, 1981.

TARG, Semen. *Éléments de mécanique rationnelle*. Mir, 1975.

MCLEAN, William G. et NELSON, Eric William. *Theory and problems of engineering mechanics: statics and dynamics*. 1962.

MERIAM, J. L. et KRAIGE, L. G. *Engineering Mechanics Statics*, 2002.

Combarnous M., Desjardins D., Bacon C., "Mécaniques des solides – Cours et Exercices corrigés", 2eme édition, Dunod, 199p.

DELANETTE M., DUBOIS M., " Mécanique théorique et appliquée", Librairie de la grave, Paris, 1986.

Ferdinand P. Beer , "Mécanique à l'usage des l'ingénieurs - STATIQUE", Edition Russell.

Hamzaoui N., Mécanique Rationnelle (Module TEC005), polycopie, USTHB, 1986, 90p.

McGILL D.J., WING W.W., "Engineering mechanics- Dynamics", Second Edition. Publishing Company, Pws - Kent. Boston, 1989, 608p.

McGILL D.J., WING W.W., "Engineering mechanics- Statics", Second Edition. Publishing Company, Pws - Kent. Boston, 1989, 607p.

MURAY R. SPIEGEL, "Mécanique générale - Théorie et application", Editions série schaum, 367p.

Tahar HANI, "Mécanique générale – Exercices et problèmes résolus avec rappels de cours ", Office des publications Universitaires, 1983, 386p.

STARJINSKI, "Mécanique rationnelle", Editions Mir (Moscou), 479p.

TOUTLEMONDE Georges, *Notions de mécanique statique et de résistance des matériaux*, Tome 1, Editions TECHNIP, 402p.