توزيع المعاينة للتباين S'^2 : توزيع كآي مربع

نظرية: إذا كان لديك مجتمع إحصائي يتوزع توزيعا طبيعيا بوسط قدره Ux وانحراف معياري قدره σ_x سحبنا مجموعة من العينات عشوائيا. تباين كل عينة S'^2 والاحتمالات المناظرة لها هي عبارة عن توزيع احتمالي يعرف بتوزيع المعاينة للتباين S'^2 ، هذا التوزيع يخضع لتوزيع يعرف بتوزيع كاي مربع ورمزه Xv^2 بدرجة حرية "V".

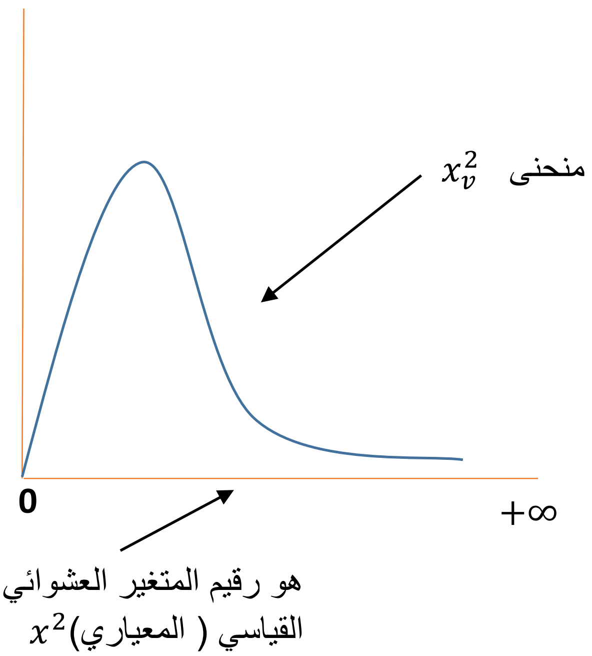
(حيث V تساوي (n−1))، أما متغير توزيع كاي مربع) أي متغيره القياسي فيعطى بالعلاقة التالية:

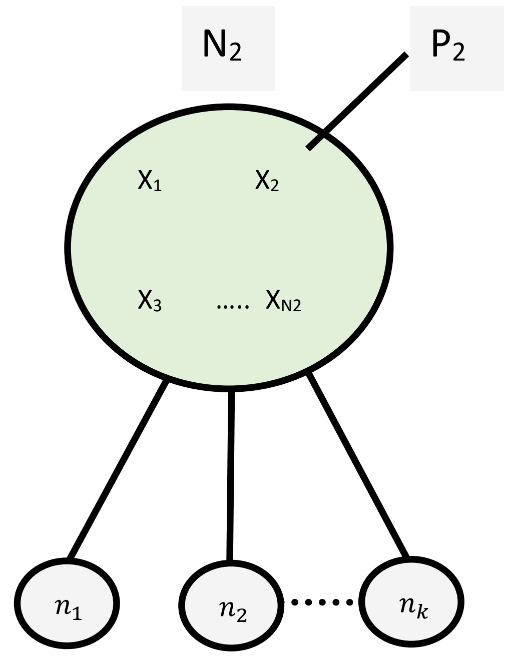
انظر الشكل *1

$$X_v^2 = \frac{(n-1)S'^2}{\sigma_x^2}$$

$$S'^2 = \frac{n}{n-1}S^2 \qquad \text{حيث } V = n-1$$

منحنى توزيع كآي مربع (X_v^2) هو منحنى غير متناظر حول وسطه الحسابي وهو منحنى ملتو إلى اليمين انظر الشكل 2 الموالي حيث يتسع الشكل *1 هذا الالتواء كلما كبر "n" أي كلما زادت درجة الحرية.





$S_1'^2$	$S_2'^2$	....	$S_k'^2$
$P(S_1'^2)$	$P(S_2'^2)$	....	$P(S_k'^2)$

القيمة المتوقعة(الأمل الرياضي) لتوزيع المعاينة للتباين S'^2 هو $E(S'^2)$ حيث:

$$E(S'^2) = \sigma_x^2$$

أما الانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للتباين فيعطى بالعلاقة التالية:

$$\sigma_{S'^2} = \sigma_x^2 \sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

تمرين تطبيقي (مثال):

لنفرض أن مصنعا ما لإنتاج نوع معين من الأسمدة الكيميائية، هذه الأخيرة تعبأ في أكياس بأحجام متساوية. فإذا كان متوسط الوزن لهذه الأكياس معبأة " هو 67 كلغ بانحراف معياري 0.97 كلغ وإذا سحبت عينة عشوائيا حجمها 15 كيساً.

إذا علمت أن توزيع الأوزان طبيعي:

1/ احسب القيمة المتوقعة لتوزيع المعاينة للتباين؟

2/ أحسب الانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للتباين؟

3/ احسب احتمال تباين العينات يفوق أو يساوي 1.25 كلغ^2 ؟

الحل:

المعطيات:

$$U_x = 67\ kg$$

$$\sigma_x = 0.97\ kg$$

$$n = 15$$ كيساً

توزيع الأوزان (Xi) طبيعي

أي $Xi \cong N(0.1)$

حساب الأمل الرياضي لتوزيع المعاينة للتباين $E(S'^2)$

$$E(S'^2) = \sigma_x^2 \rightarrow E(S'^2) = (0.97)^2 \rightarrow E(S'^2) = 0.949\ kg^2$$

2/ حساب الانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للتباين (S'^2):

$$\sigma_{S'^2} = \sigma_x^2 \sqrt{\frac{2}{n-1}} \rightarrow \sigma_{S'^2} = 0.9409 \sqrt{\frac{2}{15-1}} \rightarrow \sigma_{S'^2} = 0.3556\ kg$$

3/ حساب الاحتمال:

$$P(S'^2 \geq 1.25) \rightarrow (I)$$

نضرب طرفي المتراجحة (I) في (n−1)1.25 ونقسم على σ_x^2 فنجد:

$$P\left(\frac{(n-1)S'^2}{\sigma_x^2} \geq \frac{(n-1)1.25}{\sigma_x^2}\right)$$

$$P\left(X^2 \geq \frac{(15-1)1.25}{0.94409}\right)$$

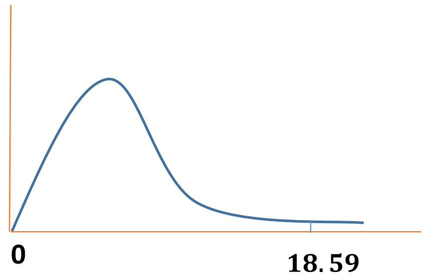
$P(X_v^2 \geq 18.5992)$ حيث $v = n - 1 \rightarrow v = 14$

$P(X_{14}^2 \geq 18.5992)$

$= 1 - P(X_{14}^2 \leq 18.5992)$

$= 1 - 0.825$ (جدول مآي مربع)

$= 0.175$ التعليق



$P(\overline{X_1} - \overline{X_2} \geq 0.002) \rightarrow (1)$ أو $P(\overline{X_1} - \overline{X_2} \leq 0.002) \rightarrow (2)$

$$Z = \frac{0.002 - 0}{0.000894} = 2.2371$$

$(1) \rightarrow P(Z \geq 2.23)$

$= 0.5 - P(0 \leq Z \leq 2.23)$

$= 0.5 - 0.4871$

$= 0.0129$

$(2) \rightarrow P(Z \leq -2.23) = 0.0129$

الاحتمال المطلوب هو : $0.0129 \times 2 = 0.0258$