

Travaux Dirigés (Série N° 1)

Exercice N° 1 :

Soient $e_1 (1,0,0)$, $e_2 (0,1,0)$, $e_3 (0,0,1)$ une base de \mathbb{R}^3 ; on définit les vecteurs A et B par :

$$A = 4 e_1 + 2 e_2 + e_3 \quad B = 3 e_1 - 5 e_2 + 2 e_3$$

- 1°) déterminer le produit scalaire $(A \cdot B)$ des vecteurs A et B.
- 2°) déterminer le produit vectoriel $(A \wedge B)$ des vecteurs A et B.
- 3°) déterminer le produit tensoriel $(A \otimes B)$ des vecteurs A et B.
- 4°) déterminer l'angle entre les vecteurs A et B.

Même chose pour les vecteurs $A = (2, 1, 3)$ $B = (1, 2, 4)$

Exercice N° 2 :

On considère la base $\{f_j\}$ de \mathbb{R}^3 défini par les vecteurs suivants :

$$f_1 = (1, 0, 0) \quad f_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0\right) \quad f_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

et les vecteurs : $A = 8 e_1 + 6 e_2 + 3 e_3$

- 1°) la base $\{f_j\}$ est-elle orthonormée ?
- 2°) déterminer les projections du vecteur A sur les axes de vecteurs f_1 , f_2 et f_3 .
- 3°) déterminer les composantes du vecteur A dans la base (f_1, f_2, f_3) .

Exercice N° 3 :

Montrer que : $I + (*n)^2 = {}^t(n)(n)$ avec $n(n_1, n_2, n_3)$ un vecteur unitaire

Exercice N° 4 :

On considère la fonction vectorielle définie par $F = (u, v, w)$ telle que :

$$\begin{aligned} u &= 8x_1 + 6x_2 \\ v &= 10x_1 - 8x_2 \\ w &= 12x_3 \end{aligned}$$

- 1°) Déterminer le tenseur $\text{Grad } F$.
- 2°) Déterminer le tenseur transposé du $\text{Grad } F$ noté $\text{Grad}^t F$.
- 3°) Déterminer le tenseur A tel que $A = (\text{Grad } F + \text{Grad}^t F)/2$.
- 4°) Déterminer les valeurs propres et les directions propres du tenseur A

Exercice N° 5 :

a) Démontrer les propriétés suivantes du gradient, pour des champs de scalaire $f(x_1, x_2, x_3)$ et $g(x, y, z)$:

$$\begin{aligned} \text{Grad}(f+g) &= \text{Grad}(f) + \text{Grad}(g) \\ \text{Grad}(af) &= a \text{Grad}(f) \\ \text{Grad}(f \cdot g) &= g \text{Grad}(f) + f \text{Grad}(g) \end{aligned}$$

b) Soit la fonction scalaire : $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 (2 + x_2 x_3^3)$

- Déterminer le Gradient de f.
- Déterminer le Laplacien de f.