Partie II : Probabilités

Chapitre I : Théorie et calcul des probabilités

1_ Introduction :

La Théorie des Probabilités est considérée comme une science dont l'objet consiste à étudier des phénomènes qui dépendent du hasard.

2_ Notions de base :

2_1 L'expérience aléatoire :

On dit qu'une expérience est aléatoire si on ne peut pas prévoir son résultat même si on répète l'expérience plusieurs fois.

Exemple :

On jete un dé ou une pièce de monnaie et on observe la face supérieure.

2_2 L'événement :

Soit une expérience aléatoire quelconque.

- On note les différents résultats par : $\{w_1, w_2, \dots w_n\}$.
- On appelle les singletons $\{w_1\}, \{w_2\}$ des événements élémentaires.
- L'union de deux ou plusieurs événements élémentaires $\{w_1, w_2\}, \{w_1, w_2, w_3\}, \dots$ sont des événements composés.

- On note l'ensemble de tous les résultats possibles par Ω.
On appelle Ω l'événement certain ou aussi l'ensemble fondamen
- On note $\overline{\Omega}$ (Le complémentaire) par ϕ et l'on appelle
événement impossible.

Exemple:

* On considère l'expérience aléatoire de dé.

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

A: " Obtenir la face 2" , $A = \{2\}$ (événement élémentaire)

B: " Obtenir un chiffre pair", $B = \{2, 4, 6\}$ (événement composé).

* L'expérience de la monnaie

$\Omega = \{F, P\}$.

2-3 Réalisation d'un événement:

Soit une expérience aléatoire, Ω son ensemble fondamental et A un événement dépendant de cette expérience.

- Si le résultat obtenu noté par w appartient à A ($w \in A$), On dit que A est réalisé (à travers w).
- Dans le cas contraire ($w \notin A$), alors n'est par réalisé.

A chaque expérience aléatoire, on associé le couple $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ tels que : Ω l'ensemble fondamental et $\mathcal{P}(\Omega)$ est l'ensemble de tous les événements dépendants de cette expérience.

2-4-Opérations sur les événements:

Soit $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des événements et A, et B deux événements de $\mathcal{P}(\Omega)$:

Symbole	Terminologie d'ensembles	Terminologie d'événements
Ω	L'ensemble total	L'ensemble fondamental L'événement certain.
ω	Elément	Résultat.
A	Un sous-ensemble	Un événement.
$\bar{A}$	Complémentaire de A	Négation de A A non réalisé.
ϕ	L'ensemble vide	L'événement impossible.
$A \cap B = \phi$	L'intersection de A et B est vide A et B sont disjoints	A et B sont incompatibles.

2.8 Notions mathématiques des probabilités (Kolmogorov 1938

Soit Ω l'ensemble fondamental associé à une expérience aléatoire et $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des événements.

On considère l'application suivante:

$$P : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$A \longmapsto P(A)$$

On dit que P est une probabilité et $P(A)$ est la probabilité de l'événement A si:

1 - $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$: $0 \leq P(A) \leq 1$.

2 - $P(\Omega) = 1$.

3 - Si $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ tels que $A \cap B = \phi$, alors
$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

4- Si $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ un ensemble d'événements dénombrables et disjoints deux à deux, alors:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Définition:

On appelle le triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace de probabilités.

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace dans toutes les propositions suivantes:

Proposition 1:

Si $\overline{A}$ est le complémentaire de l'événement A, alors:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

Cas particulier:

$$\phi = \overline{\Omega} \Rightarrow P(\phi) = P(\overline{\Omega}) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0.$$

Proposition 2:

Soient $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$, alors.

$$P(A \setminus B) = P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B).$$

où: $A \setminus B = \{x \in \Omega \,/\, x \in A \wedge x \notin B\}$.

Cas particulier:

Soient $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ tels que: $B \subset A$, alors $P(B) \leq P(A)$.

Proposition 3:

Soient A, B, ~~trois événements~~ $\in \mathcal{P}(\Omega)$, alors:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Corrolaire 1:

Soient A, B, C trois événements de $\mathcal{P}(\Omega)$, alors:

$$P(A\cup B\cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A\cap B) - P(A\cap C) - P(B\cap C) + P(A\cap B\cap C).$$

3- Les ensembles finis et équiprobables:

Souvent, dans des expériences aléatoires pratiques, ça demande qu'on associé des probabilités égales à tous les éléments de l'ensemble Ω.

Dans ce cas, on appelle $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un éspace uniforme.

Soit $\Omega = \{a_1, a_2, ---, a_n\}$, tel que: $\forall i = 1, ..., n$, $j = 1 .. n$

$P(a_i) = P(a_j)$.

On a: $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} \{a_i\} \Rightarrow 1 = P(\Omega) = P(\bigcup_{i=1}^{n} a_i)$.

$$\Rightarrow 1 = \sum_{i=1}^{n} P(a_i) = n\, P(a_i).$$

$$\Rightarrow P(a_i) = 1/n, \quad \forall i = 1, ..., n.$$

Donc: Si A est un événement composé de k éléments (élémentaires), alors:

$$P(A) = k \cdot \frac{1}{n} = \frac{k}{n}$$ ou on écrit aussi:

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\text{Nbre de cas favorables}}{\text{Nbre de cas possibles}}.$$

Exemple:

On lance un dé équilibré:

A: "Obtenir un chiffre impair"

B: " " " supérieur à 2"

On a chaque face des 6 faces a la même chance d'apparaître (la même probabilité).

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $Card(\Omega) = 6 = n$.

$\forall$ $1 \leq i, j \leq 2$, $P(a_i) = P(a_j) = 1/6$.

$A = \{1, 3, 5\}$, $P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = 3/6 = 1/2$.

$B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, $P(B) = \frac{card(B)}{card(\Omega)} = 5/6$.

4- Probabilités conditionnelles:

Définition:

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un éspace de probabilités et A, B deux événements de $\mathcal{P}(\Omega)$ tels que $P(A) > 0$.

La probabilité conditionnelle que l'événement B soit réalisé sachant que A est réalisé notée par $P(B/A)$ est donnée par

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Si $P(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ est un éspace uniforme, alors :

$$P(B/A) = \frac{Card(A \cap B)}{Card(A)}.$$

Exemple:

On lance deux dés bien équilibrés. Sachant que la somme deux faces obtenues est 6, quelle est la probabilité qu'un dé a donné la face 2.

$\Omega = \{1, 2, ..., 6\} \times \{1, 2, ..., 6\} = \{(1,1), (1,2), ... (6,6)\}$

$card(\Omega) = 36$.

A : " La somme des deux faces est 6 "

B : " Un dé donné la face 2".

$A = \{(1,5), (5,1), (2,4), (4,2), (3,3)\}$, card (A) = 5,

$B = \{(2,2), (2,1), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (1,2), (3,2), (4,2), (5,2), (6,2)\}$, card(B) = 11.

$$P(B/A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{\text{card}(A\cap B)}{\text{Card}(A)}$$

$A \cap B = \{(2,4), (4,2)\}$, card $(A\cap B) = 2$.

$P(B/A) = 2/5$.

Résultats:

$$* \begin{cases} P(B/A) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)} \\ P(A/B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(A\cap B) = P(B/A).P(A) \\ P(A\cap B) = P(A/B).P(B). \end{cases}$$

* On peut généraliser le premier résultat à n événements quelconques:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1).P(A_2/A_1).P(A_3/A_1\cap A_2) \times \dots \times P(A_n/A_1\cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_{n-1}).$$

Exemple:

Une urne contient 12 pièces dont 4 sont défectueuses. On tire 3 pièces l'une après l'autre sans remise. Quelle est la ~~prob~~ probabilité que les trois pièces tirées ne soient pas défectueuses.

A_1 : " La 1ière pièce tirée n'est pas défectueuse"

A_2 : " La 2ième " " " " "

A_3 : " La 3ième " " " " "

La probabilité que la 1ière pièce et la 2ième pièce et 3ième pièce ne soient pas défectueuses est de ~~de~~ calculer

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1).P(A_2/A_1).P(A_3/A_1 \cap A_2).$$
$$= \frac{8}{12} \times \frac{7}{11} \times \frac{6}{10}$$

5- Evénements indépendants:

Définition:

On dit que A et B sont deux événements indépendants ssi : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

On peut également utiliser la probabilité conditionnelle:

$P(B/A) = P(B)$ et $P(A/B) = P(A)$.

Car : $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\cancel{P(A)}.P(B)}{\cancel{P(A)}} = P(B)$.

Exemple:

On lance une pièce de monnaie équilibrée deux fois successives.

On a:

$\Omega = \{(F,F),(F,P),(P,F),(P,P)\}$, $card(\Omega) = 4$

A : "Obtenir P au premier lancé".

B : " " " deuxième lancé".

Quelle est la probabilité d'obtenir P au premier et au deuxièm lancé?

$A = \{(P,P),(P,F)\}$, $B = \{(P,P),(F,P)\}$.

$A \cap B = \{(P,P)\}$.

$$P(A \cap B) = \frac{card(A \cap B)}{card(\Omega)} = \frac{1}{4}$$

$$P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{card(B)}{card(\Omega)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

$P(A\cap B) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = P(A) \times P(B)$

$\Rightarrow$ A et B sont indépendants.

Remarque :

Il faut distinguer entre les événements indépendants et les événements incompatibles.

On peut avoir des événements indépendants et non incompatibles et le cas contraire est vrai.

A et B sont incompatibles $\Leftrightarrow A\cap B = \phi$.

A et B sont indépendants $\Leftrightarrow P(A\cap B) = P(A).P(B)$.

6- Principe des probabilités totales :

Soit $(\Omega; \mathcal{P}(\Omega), P)$ un éspace de probabilité. On dit que les événements $\{A_1, A_2, ---, A_n\}$ forment une système complet pour Ω si

- $\forall i = 1, ---, n \quad A_i \neq \phi \Leftrightarrow P(A_i) > 0$
- $A_i \cap A_j = \phi, \ \forall i, j = 1, ---, n$ et $i \neq j$.
- $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$

Soit A un événement quelconque de $\mathcal{P}(\Omega)$, on peut écrire

$$A = A\cap \Omega = A \cap (\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \bigcup_{i=1}^{n} (A\cap A_i)$$

$$\Rightarrow P(A) = P(\bigcup_{i=1}^{n} (A\cap A_i)) = \sum_{i=1}^{n} P(A\cap A_i).$$

Puisque $\{A_i\}$ sont disjoints deux à deux, alors $\{A\cap A_i\}$ sont aussi disjoints deux à deux.

Alors : $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A/A_i).P(A_i)$

Exemple :

Soit U_1, U_2, U_3 trois urnes telles que : ~~kbx~~.

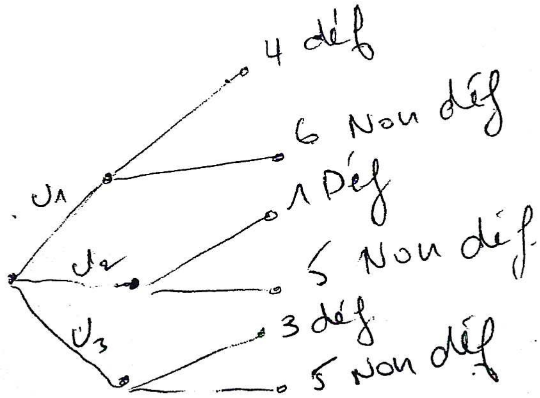
~~hx~~.

contient 10 lampes dont 4 sont d fet u
" 6 " " 1 est
" 8 " " 3 sont

choisit au hasard une urne, puis tire de cette dernière
une lampe.

Quelle est la probabilité que cette lampe soit defectueuse

Le choix de l'urne
) Le tirage d'une lampe



U_1 : "On choisit l'urne 1"
U_2 : " " " 2"
U_3 : " " " 3"

$P(U_1) = P(U_2) = P(U_3) = \frac{1}{3}$.

$\{U_1, U_2, U_3\}$ forment un système complet :

D : " On tire une lampe defectueuse".

$P(D) = P(D/U_1).P(U_1) + P(D/U_2).P(U_2) + P(D/U_3).P(U_3)$.

$P(D) = 1/3\left(\frac{4}{10} + \frac{1}{6} + \frac{3}{8}\right) = 0{,}315$.

Formule de Bayes:

Soit $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ un système complet pour Ω et A un événement quelconque de Ω.

~~Maintenant, calculer~~ On suppose que A est réalisé et on veut maintenant calculer la probabilité que A réalise à travers Ai pour i fixé.

On a : $P(A_i/A) = \dfrac{P(A_i \cap A)}{P(A)}$.

$$P(A_i/A) = \frac{P(A/A_i).\,P(A_i)}{\sum_{i=1}^{4} P(A/A_i).\,P(A_i)}$$

Le même exemple précédent, calculer la probabilité que la lampe défectueuse soit tirée de l'urne 3?

$P(U_3/D) = ?$

$$P(U_3/D) = \frac{P(D \cap U_3)}{P(D)} = \frac{P(D/U_3).\,P(U_3)}{P(D)} = \frac{\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{3}}{0{,}315} = 0{,}397.$$