Méthodes Numériques

- Chapitre I : Analyse matricielle
- Chapitre II : Méthodes directes de Résolution des systèmes linéaires
- Chapitre III : Méthodes itératives de résolution des systèmes linéaires
- Chapitre IV : Calcul de valeurs et de vecteurs propres
- Chapitre V : Généralites sur l'analyse numérique et le calcul scientifique (Erreur d'arrondi.

Chapitre I : Analyse matricelle

Dans ce chapitre, on va faire une petite rappelle sur les opérations matricelles.

I.1. Opérations sur les matrices :

une matrice réelle de type (m,n) est un tableau à m lignes et n Colonnes :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{i=\overline{1,m},\, j=\overline{1,n}}$$

- Si $m = n$, la matrice de type (n,n) est dite carrée.
- A est régulière (inversible) si $\det(A) \neq 0$.
- A est singulière si $\det(A) = 0$.
- Soient $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ (l'espace des matrices réelles de type (m,n)).

$(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$. (Addition)

$(A-B)_{ij} = A_{ij} - B_{ij}$. (soustraction)

$(\lambda A)_{ij} = \lambda A_{ij}$; $\lambda \in \mathbb{R}$ et $i = 1, \dots m$; $j = 1, \dots, n$.

(multiplication par un scalaire).

$A^T_{ij} = A_{ji}$ (Transposée)

• Soient $A \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,n}(\mathbb{K})$

Pour effectuer la multiplication matricielle $A \cdot B$, il faut que $p = q$.

On pose : $C = A \cdot B$; alors : $C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, telle que :

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{ip} b_{pj} \cdot (p = q)$$

pour $i = 1, \ldots, m$ et $j = 1, \ldots, n$.

Propriétés :

- $A \cdot B \neq B \cdot A$
- $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
- $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
- $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
- $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

Exemple : On donne

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

On peut pas calculer $A \cdot B$ parce que A a "4" colonnes et B a "2" lignes.

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 9 & 37 & 1 & 24 \\ 26 & 9 & 14 & 3 \end{pmatrix}.$$

I.2. Déterminant d'une matrice :

Dans cette section, on veut définir le déterminant d'une matrice $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$.

$$\det(A) = |A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} |A_{1j}|$$

$$= a_{11}|A_{11}| - a_{12}|A_{12}| + \dots + (-1)^{n} a_{1n-1}|A_{1n-1}|$$

$$+ (-1)^{n+1} a_{1n} |A_{1n}| \text{ ; où}$$

$A_{1j} \in \mathcal{M}_{n-1,n-1}(\mathbb{R})$ sont obtenues si on élimine la 1ère ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne.

$|A_{1j}|$: les mineurs.

$(-1)^{1+j}|A_{1j}|$: sont appelés les cofacteurs.

D'une manière générale, on peut calculer le déterminant de A par le développement suivant la ligne "i" ; c'est-à-dire :

$$\det(A) = |A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}| \text{ ; telle que :}$$

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j-1} & a_{2j+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{i-1\,1} & \dots & a_{i-1\,j-1} & a_{i-1\,j+1} & \dots & a_{i-1\,n} \\ a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Exemples Calculer le déterminant de A et B :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \\ 8 & 7 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = |A| = 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-15) - 1(-9) + 4(19) = -30 + 9 + 76 = 55$$

On fixe la deuxième Colonne :

$$\det(B) = |B| = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6.$$

propriétés :

- Une matrice qui a une Colonne ou une ligne est nulle, son déterminant est nul.
- Le déterminant d'une matrice est nul si deux lignes ou deux Colonnes sont identiques.
- Si on permute deux lignes ou deux Colonnes, le déterminant change de signe.
- $\det(A) = \det(A^T)$
- $\det(A.B) = \det(A).\det(B)$.

I.3. Inverse d'une matrice :

$A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est une matrice inversible ; telle que : $A \cdot A^{-1} = I_n$ (I_n est la matrice identitée). La matrice inverse A^{-1} est donnée par :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot C^{T} \text{ ; où}$$

C est la matrice des Cofacteurs ; appelée Comatrice ; et notée $Com(A)$.

$$Com(A) = C = (C_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}.$$

"Exemple : Calculer l'inverse de A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a :
- $\det(A) = 2$
- $C = Com(A) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Donc :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot C^{T} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$