Chapitre II : Méthodes directes de Résolution des systèmes linéaires

Dans le deuxième chapitre, on présente les méthodes numériques de résolution d'un système linéaire.

II.1. Remarques sur la résolution des systèmes triangulaires

On considère un système triangulaire supérieure :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \ddots \\ \qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n \text{ ; où } a_{11} \neq 0, \ldots, a_{nn} \neq 0. \end{cases}$$

Pour résoudre ce système, on propose la méthode de substitution successives :

$$\begin{cases} x_n = b_n / a_{nn} \\ x_{n-1} = (b_{n-1} - a_{n-1\,n}x_n)/a_{n-1\,n-1} \\ \vdots \\ x_j = [b_j - (a_{j\,j+1}x_{j+1} + a_{j\,j+2}x_{j+2} + \cdots + a_{jn}x_n)]/a_{jj} \end{cases}$$

Considérons maintenant le système triangulaire inférieure :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \text{ ; où } a_{11} \neq 0, \ldots, a_{nn} \neq 0 \end{cases}$$

On propose la même méthode pour résoudre numériquement ce système :

$$x_1 = b_1 / a_{11}$$
$$x_2 = (b_2 - a_{21}x_1)/a_{22}$$
$$\vdots$$
$$x_i = [b_i - (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{i\,i-1}x_{i-1})]/a_{ii}.$$

II.2. Méthode d'élimination de Gauss :

Le principe de la méthode est de transformer le système à un système triangulaire supérieure facile à résoudre.

Considérons le système linéaire $Ax=b$ suivant :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

On pose : $A^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & & & \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} \end{pmatrix}$; $a_{11}^{(1)} \neq 0$ et $b^{(1)} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(1)} \\ \vdots \\ b_n^{(1)} \end{pmatrix}$

On introduit les multiplicateurs : $m_{i1} = \dfrac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$; $i = 2, 3, \ldots, n$.

On peut éliminer l'inconnue x_1 des lignes $i = 2, \ldots, n$ ($a_{21}^{(1)} = 0, \ldots, a_{n1}^{(1)} = 0$) de la façon suivante :

$$\begin{cases} a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - m_{i1}\, a_{1j}^{(1)} \; ; \; i, j = 2, \ldots, n. \\ b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - m_{i1}\, b_1^{(1)} \; ; \; i = 2, \ldots, n. \end{cases}$$

On obtient un système de la forme :

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(2)} \end{pmatrix} \Leftrightarrow A^{(2)} x = b^{(2)}.$$

Typiquement, pour $k \geq 2$: la matrice $A^{(k)}$ est de la forme :

$$A^{(k)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{kk}^{(k)} & \cdots & a_{kn}^{(k)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nk}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)} \end{pmatrix}$$; telle que : $a_{ii}^{(i)} \neq 0$ pour $i = 1, \cdots, k$.

Il est clair que pour $k = n$, on obtient alors le système triangulaire supérieure $A^{(n)} x = b^{(n)}$ suivant :

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a_{nn}^{(n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

- D'une façon générale, pour passer du $k^{ème}$ système au $(k+1)^{ème}$ pour $k = 1, 2, \cdots, n-1$, on suppose $a_{kk}^{(k)} \neq 0$ et on calcule les multiplicateurs : $m_{ik} = \dfrac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$

On pose alors : $\begin{cases} a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - m_{ik} \cdot a_{kj}^{(k)} \\ b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - m_{ik} \cdot b_k^{(k)} \end{cases}$ $\quad i, j = k+1, \cdots, n$.

Lorsqu'un pivot est nul, la méthode de Gauss n'est plus applicable.

- **Procédé de pivot partiel:** On choisit com. pivot l'élément
$$a_{kk}^{(k)} = \max_{i=k:n} |a_{ik}|.$$
- **Procédé de pivot total:** Dans ce cas, le pivot est l'élément:
$$a_{kk}^{(k)} = \max_{i,j=k:n} |a_{ij}|$$

II.3. Interprétation matricielle de l'élimination de Gauss: la factorisation LU

On pose $A = A^{(1)}$ et on définit les matrices (de Frobenius) $M^{(k)}$; $k=1:n-1$

$$M^{(k)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & & 0 \\ & 1 & & & & \vdots \\ 0 & 0 & -\frac{a_{k+1,k}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} & & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 1 & \\ \vdots & \vdots & -\frac{a_{n,k}^{(k)}}{a_{k,k}} & 0 & \cdots\ 0 & 1 \\ 0 & 0 & & & & \end{pmatrix}$$

Il est facile de vérifier que: $A^{(k+1)} = M^{(k)} . A^{(k)}$; telle que:

$$\begin{cases} U = A^{(n)} = M^{(n-1)} \cdots M^{(2)} M^{(1)} A \\ L = (M^{(1)})^{-1} (M^{(2)})^{-1} \cdots (M^{(n-1)})^{-1}. \end{cases}$$

Il est clair que $A = L.U$ ($L_{11} = L_{22} = \cdots = L_{nn} = 1$).