Université Mohamed Khider Biskra.

Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Vie
Département d'Informatique

$2^{ème}$ Année Info (LMD).
Module: Méthodes Numériques
Ann Univ: 2021/2022.

SERIE DE TDN°01

ANALYSE MATRICIELLE

Exercice N°01: On donne les matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer (s'il est possible) les opérations: $A+B$, $A+C$, $A+D$, $A.B$, $A.D$, $D.A$.

Exercice N°02: On considère la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calculer A^2 et A^3. Déterminer les valeurs de α et β; telles que:

$$A^3 = \alpha A^2 + \beta A.$$

Exercice N°03: Calculer le déterminant de A, B et C; où:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & -4 & -1 \\ 2 & -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice N°04: On considère la matrice A suivante:

$$A = \begin{pmatrix} 13 & -8 & -12 \\ 12 & -7 & -12 \\ 6 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

1°/ Montrer que A est inversible (régulière).

2°/ Calculer l'inverse de la matrice A.

3°/ Déduire A^n.

Série de TD N° 01

Exercice n° 01 :

- $A+B$, $A+D$, $A.D$: On peut pas effectuer ces opérations.

- $$A+C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

- $$A.B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 15 & 0 & -5 \\ -3 & 15 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

- $$D.A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 1 \\ 4 & -5 & 1 \\ 13 & -7 & -6 \\ 5 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice n° 02 :

- On calcule A^2 et A^3

$$A^2 = A.A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -5 \\ -3 & 3 & 5 \\ -5 & 5 & 11 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2.A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -5 \\ -3 & 3 & 5 \\ -5 & 5 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -11 & -21 \\ -11 & 11 & 21 \\ -21 & 21 & 43 \end{pmatrix}$$

- On détermine les valeurs de α et β :

On a :

$$A^3 = \alpha A^2 + \beta A \iff \begin{pmatrix} 11 & -11 & -21 \\ -11 & 11 & 21 \\ -21 & 21 & 43 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\alpha+\beta & -3\alpha-\beta & -5\alpha-\beta \\ -3\alpha-\beta & 3\alpha+\beta & 5\alpha+\beta \\ -5\alpha-\beta & 5\alpha+\beta & 11\alpha+3\beta \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 3\alpha+\beta = 11 & \text{— (1)} \\ -5\alpha-\beta = -21 & \text{— (2)} \end{cases}$$

- ① + ② $\Leftrightarrow -2\alpha = -10 \Rightarrow \boxed{\alpha = 5}$
- ① $\Leftrightarrow 3\times 5 + \beta = 11 \Rightarrow \boxed{\beta = -4}$

c'est-à-dire : $A^3 = 5A^2 - 4A$.

Exercice n°03 : On calcule les déterminants :

- $\det(A) = |A| = 11$
- $$\det(B) = |B| = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} + & - & + \end{array} \\ \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{-1} & \cancel{0} \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

On peut aussi utiliser la technique de Sarrus :

$$\det(B) = \begin{matrix} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \end{matrix} = \left[(1\times1\times3) + (-1\times2\times1) + (0\times1\times2)\right]$$
$$- \left[(0\times1\times1) + (1\times2\times2) + (-1\times1\times3)\right] = 0$$

- $$\det(C) = |C| = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} + & - & + & - \end{array} \\ \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{3} \\ -2 & -1 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & -4 & -1 \\ 2 & -4 & 1 & 3 \end{vmatrix} \end{array} = 1\underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 1 & -4 & -1 \\ -4 & 1 & 3 \end{vmatrix}}_{D_1} + 2\underbrace{\begin{vmatrix} -2 & -1 & 4 \\ -3 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 3 \end{vmatrix}}_{D_2} - 3\underbrace{\begin{vmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & -4 \\ 2 & -4 & 1 \end{vmatrix}}_{D_3}$$

- $D_1 = -49$ - $D_2 = 35$ - $D_3 = 35$

Alors : $\det(C) = -49 + 2\times35 - 3\times35 = -84$

$\det(C) = -84$

Exercice n°04 : 1°/ A est inversible si $\det(A) \neq 0$

$$\det(A) = \begin{array}{ccccc} 13 & -8 & -12 & 13 & -8 \\ 12 & -7 & -12 & 12 & -7 \\ 6 & -4 & -5 & 6 & -4 \end{array} = 1607 - 1608 = -1$$

$\det(A) = -1 \neq 0 \Rightarrow A$ est inversible.

2°/ On calcule l'inverse de A :

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot C^{T} \; ; \quad C = Com(A).$$

$$C = Com(A) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} -7 & -12 \\ -4 & -5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 12 & -12 \\ 6 & -5 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 12 & -7 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 8 & -12 \\ -4 & -5 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 13 & -12 \\ 6 & -5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 13 & -8 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} -8 & -12 \\ -7 & -12 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 13 & -12 \\ 12 & -12 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 13 & -8 \\ 12 & -7 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -13 & -12 & -6 \\ 8 & 7 & 4 \\ 12 & 12 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow C^{T} = \begin{pmatrix} -13 & 8 & 12 \\ -12 & 7 & 12 \\ -6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} C^{T} = -C^{T} = \begin{pmatrix} 13 & -8 & -12 \\ 12 & -7 & -12 \\ 6 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

Il est clair que : $A^{-1} = A$

3°/ $A^2 = A \times A = A \times A^{-1} = I_3$

$A^3 = A^2 \times A = I_3 \cdot A = A$

$A^4 = A^3 \times A = A \times A = A^2 = I_3$

$\vdots$

$$\Rightarrow A^n = \begin{cases} A & \text{si } n \text{ est impair} \\ I_3 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$