Exo1 :

① $f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right)$

$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, \frac{x+2}{x-2} > 0 \text{ et } x-2 \neq 0 \right\}$

$g(x) = \frac{x+2}{x-2} \geq 0 \Rightarrow x \in ?$

x	$-\infty$ -2	2	$+\infty$
$x+2$	$-$ 0	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$ 0	$+$
$g(x)$	$+$ 0	$-$ ‖	$+$

d'après le tableau $\frac{x+2}{x-2} \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -2] \cup]2, +\infty[$

$\Rightarrow \boxed{D_f =]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[}$

② $f(x) = \ln(|x| - x) \Rightarrow D_f = ?$

$D_f = \{ x \in \mathbb{R} \,/\, |x| - x > 0 \}$

$|x| - x > 0 \Rightarrow \begin{cases} x - x > 0 & \text{si } x > 0 \\ -x - x > 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

$\Rightarrow -2x > 0 \Rightarrow \boxed{x < 0}$

$\boxed{D_f = \mathbb{R}^*_-}$

③ $f(x) = \sqrt{x - 2\sqrt{x}} \Rightarrow D_f = ?$

$D_f = \{ x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq 0 \text{ et } x - 2\sqrt{x} \geq 0 \}$

$$x - 2\sqrt{x} \geq 0 \iff x \geq 2\sqrt{x}$$
$$\iff x^2 \geq 4x.$$
$$\iff x^2 - 4x \geq 0.$$
$$\iff x(x-4) \geq 0$$

x	0		4		$+\infty$
$x-4$		$-$	0	$+$	
$x(x-4)$		$-$		$+$.	

$$\Rightarrow \boxed{D_f = [4, +\infty[}$$

(4) $f(x) = \dfrac{1}{2 - \sin(x)} \Rightarrow D_f = ?$

$$D_f = \{ x \in \mathbb{R} / 2 - \sin(x) \neq 0 \}.$$

$$2 - \sin(x) \neq 0 \Rightarrow \sin(x) \neq 2$$
$$\Rightarrow x \in \mathbb{R} / \text{car } \forall x \in \mathbb{R}$$
$$-1 \leq \sin(x) \leq 1$$

$$\Rightarrow \boxed{D_f = \mathbb{R}}$$

(5) $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x) + 1} \Rightarrow D_f = ?$

$$D_f = \{ x \in \mathbb{R} / \sin(x) + 1 \neq 0 \}.$$

$$\sin(x) + 1 = 0 \Rightarrow \sin(x) = -1$$
$$\Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi \quad / k \in \mathbb{Z}$$
$$\Rightarrow D_f = \mathbb{R} / \{ 3\pi/2 + 2\pi k / k \in \mathbb{Z} \}.$$

EX02

(1)
$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^3-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)}{(x^2+x+1)} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

(2)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1+x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1+x}}{(2x+1)-(x+1)}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{(\sqrt{1+2x}-\sqrt{1+x})}}{\cancel{(\sqrt{1+2x}-\sqrt{x+1})}(\sqrt{1+2x}+\sqrt{x+1})}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1+2x}+\sqrt{x+1}} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

(3)
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{2x+7}{x^2+x+1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2x}{x^2} = \boxed{0^+}$$
$$\lim_{x\to -\infty} \frac{2x+7}{x^2+x+1} = \lim_{x\to -\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x\to -\infty} \frac{2}{x} = \boxed{0^-}$$

(4)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{2x} = \frac{3}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{3x} = \frac{3}{2} \lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t}$$
$$= \boxed{\frac{3}{2}}$$

(5)
$$\lim_{x\to \infty} \left(\sqrt{x} - \sin(x)\right) = ?$$

on a $-1 \leq \sin(x) \leq 1$

$$\sqrt{x} - 1 \leq \sqrt{x} - \sin(x) \leq \sqrt{x} + 1$$
$$\lim_{x\to \infty} \sqrt{x} - 1 \leq \lim_{x\to \infty} (\sqrt{x} - \sin(x)) \leq \lim_{x\to \infty} \sqrt{x} + 1$$
$$+\infty \leq \lim_{x\to \infty} (\sqrt{x} - \sin(x)) \leq +\infty$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to \infty} (\sqrt{x} - \sin(x)) = +\infty$$

⑥ $$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{\sin(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} * \frac{x}{\sin(x)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{\ln(1+x)}{x}}_{\to 1} * \lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{x}{\sin(x)}}_{\to 1}$$

$$= 1 \times 1 = \boxed{1}$$

EXO3 :

① $x^5 - x^2 = 2 \iff x^5 - x^2 - 2 = 0$ / $f(x) = x^5 - x^2 - 2$.

on utilisant le théorème des valeurs intermédiaire on peut montre que $f(x)$ admet une solution dans $[0,2]$.

ⓐ $f(x)$ est continue sur $[0,2]$ —— (*)

ⓑ $f(0) = -2$ $\Big\}$ $\Rightarrow f(0) \times f(2) = -52 < 0$ (**)

ⓒ $f(2) = 26$

de (*) et (**) on déduit que le polynôme $x^5 - x^2 - 2$ admet une solution dans $[0,2]$

② soit $f(x) = x + 2\ln(x)$.

ⓐ $f(x)$ est continue dans $]0,1[$ — (*)

ⓑ $f(0) * f(1) = -\infty * 1 < 0$ — (**).

de (*) et (**) on déduit que $f(x)$ admet une solution dans $[0,1]$.

EX04

$\boxed{\text{On dit que } f \text{ est continue en un pt } x_0 \text{ ssi } \lim_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = f(x_0).}$

① $f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) ; & x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$ / si f n'est pas continue ce sera au pt $x=0$.

ⓐ $\lim_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{t \to +\infty} \frac{\sin(t)}{t} = 0.$

ⓑ $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{t \to +\infty} \frac{\sin(t)}{t} = 0.$

On remarque que

$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = f(0) \Rightarrow f$ est continue sur $\mathbb{R}$.

② $g(x) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{x}}{x-1} ; & x \neq 1 \\ \frac{1}{2} ; & x = 1 \end{cases}$

$\lim_{x \to 1} g(x) = \lim_{x \to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{(x-1)} = \lim_{x \to 1} \frac{(1-\sqrt{x})}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$

$= \lim_{x \to 1} \frac{-\cancel{(\sqrt{x}-1)}}{\cancel{(\sqrt{x}-1)}(\sqrt{x}+1)} = \frac{-1}{2} \neq g(1)$

donc g n'est pas continue en $x=1$

Exo 6

f est dérivable au pt x_0 ssi :

$$\boxed{\lim_{x \overset{<}{\to} x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \overset{>}{\to} x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \ell \in \mathbb{R}}$$

(1) $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)-0}{x-0} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} x\cos\left(\frac{1}{x}\right) = ?$$

on a $-1 \leq \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$

$\Rightarrow \quad -x \leq x\cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq x \quad / x \geqslant 0$

$\Rightarrow \lim_{x \overset{>}{\to} 0}(-x) \leq \lim_{x \overset{>}{\to} 0} x\cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq \lim_{x \overset{>}{\to} 0} x$

$0 \leq \lim_{x \overset{>}{\to} 0} x\cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq 0$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0} \text{ — } (*)$$

on a d'autre part $-1 \leq \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$

$-x \geq x\cos\left(\frac{1}{x}\right) \geq x \quad / x \leq 0$

$\Rightarrow \lim_{x \overset{<}{\to} 0}(-x) \geq \lim_{x \overset{<}{\to} 0} x\cos\left(\frac{1}{x}\right) \geq \lim_{x \overset{<}{\to} 0}(x)$

$\Rightarrow \quad 0 \geq \lim_{x \overset{<}{\to} 0} x\cos\left(\frac{1}{x}\right) \geq 0$

$\Rightarrow \boxed{\lim_{x \overset{<}{\to} 0} x\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0}$ —— $(**)$

d'après la définition de la dérivabilité en un point et $(*)$ et $(**)$ on conclut que f est dérivable au pt $x=0$.

$\Rightarrow$ $\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}}$

② $g(x) = \begin{cases} 1-\cos(x) & x < 0 \\ \sin(x) & x \geq 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{(1-\cos(x)) - (1-\cos(0))}{x-0}$$

$$= \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{(1-\cos(x))(1+\cos(x))}{x(1+\cos(x))}$$

$$= \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{1-\cos^2(x)}{x(1+\cos(x))} = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{\sin^2(x)}{x(1+\cos(x))}$$

$$= \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \underbrace{\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)}_{1} \underbrace{\left(\frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}\right)}_{0} = 0$$

$\Rightarrow \boxed{\lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = 0}$ —— $(*)$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{\sin(x)-\sin(0)}{x-0}$$

$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

on remarque que

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} \neq \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0}$$

donc g n'est pas dérivable au pts $x_0 = 0$. $\Rightarrow$ g n'est pas dérivable sur tout $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $\boxed{g \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}/\{0\}}$

EXO7 :

① $f_1'(x) = ?$

$$f_1'(x) = \left(e^{-2x-1}\right)' = \boxed{-2e^{-2x-1}} \quad / \quad \boxed{\left(e^{g(x)}\right)' = g'(x)\, e^{g(x)}}$$

② $f_2'(x) = ?$

$$f_2'(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right)' = \frac{\left(\frac{x+2}{x-2}\right)'}{\frac{x+2}{x-2}} = \frac{\frac{(x-2)-(x+2)}{(x-2)^2}}{\frac{x+2}{x-2}}$$

$$f_2'(x) = \frac{-4}{(x-2)^{\cancel{2}}} \times \frac{\cancel{(x-2)}}{x+2} = \frac{-4}{(x-2)(x+2)} = \boxed{\frac{-4}{x^2-4} = f_2'(x)}$$

$$\boxed{\ln(f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}} \quad \text{et} \quad \boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}}$$

(3) $f_3'(x) = ?$

$$f_3'(x) = \left(\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)' = \left(\left(x+x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)'$$

$$= \frac{1}{2}\left(x+x^{\frac{1}{2}}\right)' \cdot \left(x+x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}-1}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)\left(x+x^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \boxed{\frac{1+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} = f_3'(x)}$$

(4) $f_4'(x) = ?$

$$f_4'(x) = \left(\left(\sin(x^2)\right)^4\right)' = 4\left(\sin(x^2)\right)'\left(\sin(x^2)\right)^3$$

$$= 4\left[2x\cos(x^2)\right]\left(\sin(x^2)\right)^3$$

$$\boxed{f_4'(x) = 8x\cos(x^2)\left[\sin(x^2)\right]^3}$$

EXO7:

soit $f(x) = \ln(x)$ avec $x \in [u, v] \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$

d'après le théorème des accroissements finis

on a : $\exists x_0 \in [u, v]$ tq $f'(x_0) = \frac{f(v) - f(u)}{v - u}$

$\Rightarrow \frac{1}{x_0} = \frac{\ln(v) - \ln(u)}{v - u}$ avec $u \leq x_0 \leq v$

$\Rightarrow x_0 = \frac{v - u}{\ln(v) - \ln(u)}$ avec $u \leq x_0 \leq v$.

on a : $u \leq x_0 \leq v \Rightarrow \boxed{u < \frac{v - u}{\ln(v) - \ln(u)} < v}$

EXO8:

f est bijectif ? $(\mathbb{R}_+)$

① f est injectif ?

soit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$ tq $f(x_1) = f(x_2)$.

$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{1}{1 + x_1^2} = \frac{1}{1 + x_2^2}$

$\Leftrightarrow 1 + x_1^2 = 1 + x_2^2$

$\Leftrightarrow x_1^2 = x_2^2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_1 = -x_2 \end{cases}$ (rejeter car $x_1, x_2 \geq 0$.)

d'où f est injectif ...(*)

② f est surjective ?

on a f est défine par :

$$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow]0,1] \qquad \Big/ \quad 0 < \frac{1}{1+x^2} \leq 1$$
$$x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$$

soit $y \in]0,1]$ tq $y = f(x)$. alors :

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{1}{1+x^2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{y} = 1 + x^2$$
$$\Leftrightarrow x^2 = -1 + \frac{1}{y} = \frac{1-y}{y}.$$
$$\Leftrightarrow x = \begin{cases} \sqrt{\frac{1-y}{y}} & \text{si } x \geq 0 \\ -\sqrt{\frac{1-y}{y}} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

de fait que $x \in \mathbb{R}_+$ donc

$$x = \sqrt{\frac{1-y}{y}} \quad \text{———} (**)$$

d'après $(**)$ on remarque que $\forall y \in]0,1]$ alors $\exists x \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow$ $\boxed{f \text{ est surjective}}$ — $(***)$

de $(*)$ et $(***) \Rightarrow f$ est bijective

③ $\underline{f^{-1}(x) = ?}$ $f^{-1}(x)$ est défine par : $f^{-1}(x) :]0,1] \longrightarrow \mathbb{R}_+$
$$y \longmapsto \sqrt{\frac{1-y}{y}}.$$