----------السلسلة 01----------

صياغة نموذج البرمجة الخطية :

إن أهم مرحلة في البرمجة الخطية هي مرحلة إنشاء نموذج البرمجة الخطية . و نعني بالنموذج هو التعبير عن علاقات واقعية بعلاقات رياضية مفترضة و مبنية على دراسة الواقع و تحليله وتبعا لصيغة المسألة يمكن تقييم النموذج إما بيانيا أو رياضيا. و بعد الانتهاء من تكوين النموذج الملائم يجب التأكد من مطابقته للمشكلة قيد الدراسة ثم الإنتقال إلى المرحلة التالية و المتمثلة في تقييمه و تحليله للتعرف على تأثيرات العوامل المختلفة في المشكلة و الوصول إلى الحل المناسب، ولكن ليس لكل مشكلة يمكن حلها بأسلوب البرمجة الخطية حيث يتطلب حل المشكلة بأسلوب البرمجة الخطية أن تتوافر الشروط التالية **(نصير، 2017)**:

– **تحديد دالة الهدف:** وهو الهدف المنشود والذي نرغب في تحقيقه وإمكانية التعبير عن هذا الهدف في صورة دالة خطية والحصول على قيمة رقمية له ومحاولة تعظيم هذه القيمة وإيجاد النهاية العظمى لها إذا كان الهدف المنشود ربحا أو تقليل القيمة وإيجاد النهاية الصغرى إذا كان الهدف تكلفة أي الوصول إلى أدنى تكلفة ممكنة ، وتتكون دالة الهدف من المتغيرات، أما المعامل الخاص بكل متغير هو عبارة عن ربح الوحدة الواحدة في حالة تعظيم دالة الهدف أو يكون المعامل عبارة عن تكلفة الوحدة الواحدة في حالة تخفيض دالة الهدف.

– **تحديد القيود(الموارد):** أي إمكانية التعبير عن العلاقة بين المتغيرات القرارية والإمكانيات المتاحة في صورة قيود خطية وهي توضح ما تحتاجه كل وحدة إنتاج من كل مورد من الموارد المتاحة في شكل متراجحات أو معادلات خطية أو خليط منها وتسمى بالقيود الهيكلية.

– **شرط عدم السلبية:** إذ يجب أن تكون المتغيرات القرارية في المشكلة قيد الدراسة متغيرات موجبة أو صفرية وغير سالبة. **(نصير، 2017)**

تمرين 01:

يقوم صاحب مطعم بعمل شطائر اللحم يتكون من لحم بقر ولحم ماعز .يحتوي لحم البقر على 80 % لحم صافي و20 % دهون ويكلف 24 دج لكل‌كيلو الواحد في حين أن لحم الماعز على يحتوي 68 % لحم صافي و 32 % دهون ويكلف 18 دج لكل‌كيلو الواحد . **المطلوب:** ما هي كمية (وزن) اللحم من كل نوع

الذي يجب أن يستخدمه صاحب المحل في كل كيلو من شطائر اللحم إذا علمت أنه يجب تخفيض التكاليف والمحافظة علي نسبة الدهون بحيث لا تزيد عن25 % ؟

الحل:

المتغيرات:

X_1: وزن لحم البقر المستخدم فيالكيلو الواحد

X_2: وزن لحم البقر المستخدم فيالكيلو الواحد

دالة الهدف:

$$Min\ Z = 24x_1 + 18x_2$$

القيود:

$$\begin{cases} 0{,}20\,x_1 + 0{,}32\,x_2 \leq 0{,}25 \\ x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 , x_2 \geq 0 \end{cases}$$

تمرين 02:

تقوم شركة الأوراس للنجارة بصناعة منتوجين هما: الطاولات والكراسي، وتقوم ببيعها في الأسواق المحلية، حيث تحقق ربحا عن كل وحدة قدرها: 300 دج و 200 دج على التوالي.

وتسخر الشركة أقسامها الإنتاجية الثلاثة (نجارة ، تلحيم، طلاء) لإنتاج هذه المنتوجات، حيث يمر كل منتوج أثناء عملية الإنتاج على الأقسام الثلاثة حتى يصبح قابلا للبيع.

ويوضح الجدول التالي الوقت الذي يستغرقه كل منتوج في كل قسم بالإضافة إلى الطاقة المتاحة في كل قسم.

القسم	المنتوج		ساعات العمل المتاحة
	طاولة	كرسي	في كل قسم
النجارة	6 سا	6 سا	420 سا
التلحيم	3 سا	6 سا	300 سا
الطلاء	4 سا	2 سا	240 سا
الربح	300 دج	200 دج	

المطلوب: صياغة البرمجة الخطية والذي تعظم به الأرباح؟

الحل:

المتغيرات:

x_1: عدد الطاولات التي يجب إنتاجها وبيعها من أجل تحقيق أقصى ربح ممكن.

x_2: عدد الكراسي التي يجب إنتاجها وبيعها من أجل تحقيق أقصى ربح ممكن.

دالة الهدف:

$$Max\ Z = 300x_1 + 200x_2$$

القيود:

قيد قسم النجارة: $6x_1 + 6x_2 \leq 480$

قيد قسم التلحيم: $3x_1 + 6x_2 \leq 300$

قيد قسم الطلاء: $4x_1 + 2x_2 \leq 240$

شرط عدم السلبية $x_1, x_2 \geq 0$

تمرين 03:

صائغ مجوهرات يصنع قلائد و أساور . هامش الربح للقلادة 32 دج وللسوار 24 دج . تتطلب القلائد ساعتين لقطع الأحجار و 7ساعات للتثبيت و 6ساعات للتلميع . والأساور تتطلب 5 ساعات لقطع الأحجار و7 ساعات للتثبيت و3 ساعات للتلميع. ويتوفر لدى الصائغ 40 ساعة لقطع الأحجار و 70 ساعة للتثبيت و 48 ساعة للتلميع. **المطلوب**: إيجاد التوليفة المثلى من الإنتاج والتي تعظم بها الأرباح ؟

الحل:

المتغيرات:

x_1: عدد القلائد التي يجب إنتاجها وبيعها من أجل تحقيق أقصى ربح ممكن.

x_2: عدد الأساور التي يجب إنتاجها وبيعها من أجل تحقيق أقصى ربح ممكن.

دالة الهدف:

$$Max\ Z = 32x_1 + 24x_2$$

القيود:

قيد القطع: $2x_1 + 5x_2 \leq 40$

قيد التثبيت: $7x_1 + 7x_2 \leq 70$

قيد التلميع: $6x_1 + 3x_2 \leq 48$

شرط عدم السلبية $x_1, x_2 \geq 0$

تمرين 04:

تقوم شركة مناجم بتشغيل ثلاثة مناجم فرعية تابعة لها. ويفصل الخام من كل منجم إلى نوعين قبل الشحن. ويبين الجدول التالي الطاقة الإنتاجية اليومية للمناجم، وكذلك التكلفة اليومية.

المنجم	نوعية الخام		تكلفة التشغيل 1000 دج/يوم
	خام عالي الجودة طن/يوم	خام قليل الجودة طن/يوم	
المنجم 01	4	4	20
المنجم 02	6	4	22
المنجم 03	1	6	18

ولقد إلتزمت الشركة بتسليم 54 طن من خام العالي الجودة، و 65 طن من قليل الجودة في نهاية كل أسبوع. كما أن للشركة تعاقدات مع العمال تضمن لها تواجد العمال بطول اليوم أو جزء من اليوم أثناء فتح المنجم . **المطلوب:** حدد عدد الأيام التي يجب أن يعملها كل منجم خلال الأسبوع المقبل للوفاء بالتزمات الشركة بأقل تكلفة ممكنة؟

الحل:

المتغيرات:

x_1: عدد الأيام التي سيعمل فيها العمال المنجم 01 خلال الأسبوع المقبل .

x_2: عدد الأيام التي سيعمل فيها العمال المنجم 02 خلال الأسبوع المقبل.

x_3: عدد الأيام التي سيعمل فيها العمال المنجم 03 خلال الأسبوع المقبل.

دالة الهدف:

$$\text{Min } Z = 20x_1 + 22x_2 + 18x_3$$

القيود:

قيد الطلب من خام العالي الجودة: $4x_1 + 6x_2 + x_3 \geq 54$

قيد الطلب من خام قليل الجودة: $4x_1\ 4x_2 + 6x_3 \geq 65$

قيد عدد الأيام $x_1, x_2, x_3 \leq 7$

شرط عدم السلبية $x_1, x_2 \geq 0$

حل نموذج البرمجة الخطية بالطريقة البيانية:

يتصف أسلوب الحل البياني بسهولته و وضوحه إلا أنه يعتبر أسلوبا مفيدا و صالحا للمشاكل التي تحتوي على متغيرين فقط، مثال ذلك :إنتاج سلعتين، و يتم التوصل إلى الحل باعتماد الطريقة البيانية من خلال تطبيق الخطوات التالية:

- تحديد النموذج الرياضي (دالة الهدف و القيود)؛
- تمثيل القيود بيانيا، على معلم متعامد و متجانس ؛
- تحديد منطقة الحلول الممكنة؛
- المفاضلة بين الحلول البديلة لاختيار البديل الأمثل. **(سالم، 2017)**

التعظيم باستخدام الرسوم البيانية:

تمرين 05:

ونعرض هذه الطريقة بالمثال الواقعي لتسهيل الشرح. افترض أن شركة ما متخصصة في صناعة: (حقائب النوم، وخيام) . وكل حقيبة نوم تستلزم 2 ساعة للقطع و 5 ساعات للخياطة و 1 ساعة للطلي ضد الماء. وكل خيمة تتطلب 1 ساعة للقطع و 5 ساعات للخياطة و 3 ساعات للطلي ضد الماء. وإذا علمت أن موارد الشركة هي 14 ساعة للقطع و 40 ساعة للخياطة و 18 ساعة للطلي ضد الماء في اليوم . وأن هامش الربح 50 دج في الحقيبة نوم الواحدة و30 دج في الخيمة الواحدة. **المطلوب:** إيجاد التوليفة المثلى من كلا المنتوجين لتحقيق أقصى ربح ممكن باستخدام الطريقة البيانية؟

الحل:

المتغيرات:

X_1: عدد الوحدات المنتجة من حقائب النوم والتي تحقق أقصى ربح ممكن .

X_2: عدد الوحدات المنتجة من الخيام والتي تحقق أقصى ربح ممكن .

دالة الهدف:

$$Max\ Z = 50x_1 + 30x_2$$

القيود:

قيد قسم القطع: $2x_1 + x_2 \leq 14$

قيد قسم الخياطة: $5x_1 + 5x_2 \leq 40$

قيد قسم الطلي ضد الماء: $x_1 + 3x_2 \leq 18$

شرط عدم السلبية $x_1, x_2 \geq 0$

تحويل المتراجحات إلى معادلات:

قيد قسم القطع: $2x_1 + x_2 = 14$ ..... (1)

قيد قسم الخياطة: $5x_1 + 5x_2 = 40$ ..... (2)

قيد قسم الطلي ضد الماء: $x_1 + 3x_2 = 18$ ..... (3)

إيجاد نقاط التقاطع مع المحورين:

$2x_1 + x_2 = 14$ / (0,14) (7,0)

x_1	0	7
x_2	14	0

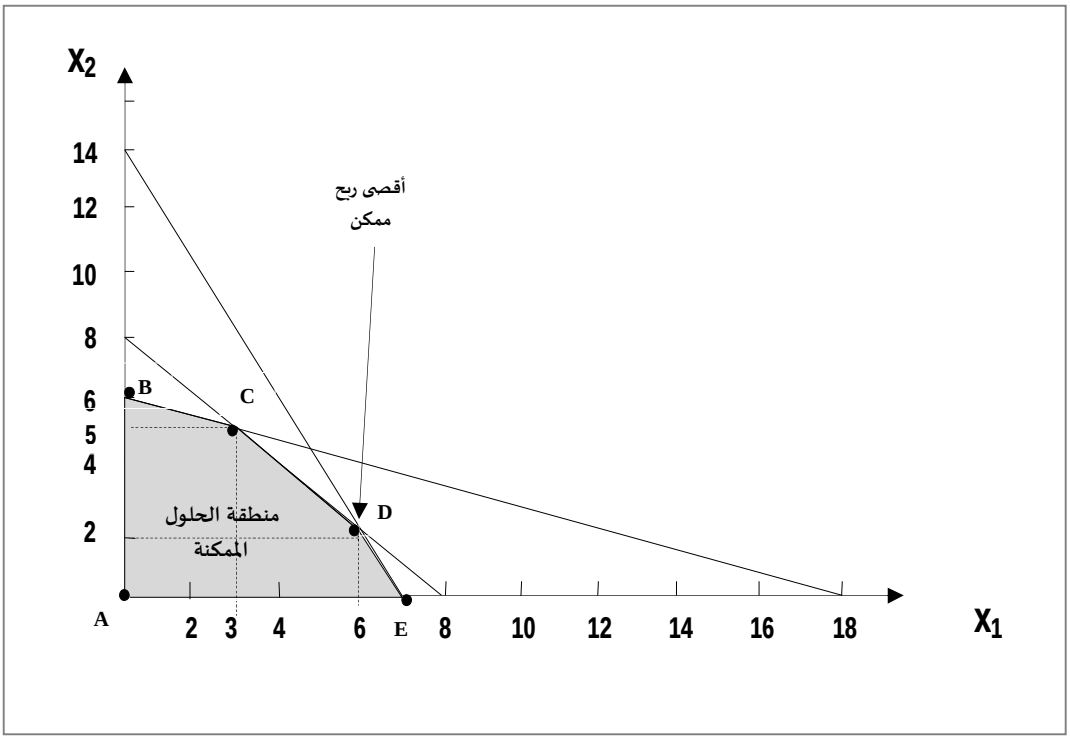
$5x_1 + 5x_2 = 40$ / (0,8) (8,0)

x_1	0	8
x_2	8	0

$x_1 + 3x_2 = 18$ / (0,6) (18,0)

x_1	0	18
x_2	6	0

التمثيل البياني:



إيجاد نقاط التقاطع المستقيمات مع بعضها:

- تقاطع المستقيم 2 مع 3:

$5x_1 + 5x_2 = 40$

$x_1 + 3x_2 = 18 \times(-5)$

$= 5x_1 + 5x_2 = 40$

$-5x_1 - 15x_2 = -90$

$= -10x_2 = -50$

$= x_2 = 5$

$x_1 = 3$

ومنه:

أي: نقطة التقاطع هي: $(5, 3)$

- تقاطع المستقيم 1 مع 2:

$2x_1 + x_2 = 14 \times(-5)$

$5x_1 + 5x_2 = 40$

$= -10x_1 - 5x_2 = -70$

$5x_1 + 5x_2 = 40$

$= -5x_1 = -30$

$= x_1 = 6$

$x_2 = 2$

ومنه:

أي: نقطة التقاطع هي: $(2, 6)$

إيجاد الحل الأمثل في نقاط الأركان:

النقطة	الإحداثيات	$\mathbf{Max\ Z = 50x_1 + 30x_2}$	النتيجة (الربح)
A	(0 , 0)	50(0)+30(0)	0 دج
B	(0 , 6)	50(0)+30(6)	180 دج
C	(3 , 5)	50(3)+30(5)	300 دج
D	(6 , 2)	50(6)+30(2)	360 دج
E	(7 , 0)	50(7)+30(0)	350 دج

القرار الإداري:

يجب على صاحب الشركة إنتاج 6 وحدات من حقائب النوم و 2 وحدة من الخيام وذلك لتحقيق أقصى ربح ممكن هو: 360 دج.

تمرين 06:

ورشة للخياطة تقوم بإنتاج منتوجين سراويل و معاطف، يمر كلا المنتوجين على ماكنتين: ماكنة الخياطة و ماكنة المكواة، لإنتاج وحدة واحدة من السراويل فإنه يلزم استخدام ساعتين من الزمن على ماكنة الخياطة و ساعة عمل واحدة على ماكنة المكواة، بينما تحتاج الوحدة الواحدة من المعاطف إلى ساعة عمل واحدة على كل من الماكنتين، و لأسباب تقنية فإن الماكنة الأولى لا تعمل أكثر من 10 ساعات في اليوم، بينما الماكنة الثانية لا تعمل أكثر من 6 ساعات يوميا.

ولأسباب متعلقة بالطلب السوقي، لا يمكن إنتاج أكثر من 4,5 وحدات من المنتوج الأول (سراويل) يوميا، وكذلك لا يمكن إنتاج أكثر من 4 وحدات يوميا من المنتوج الثاني (معاطف).

الوحدة الواحدة من السراويل تساهم بربح قدره 1,5 دج، بينما تساهم الوحدة الواحدة من المنتوج الثاني (معطف) بـ 1 دج. **المطلوب:** إيجاد التوليفة المثلى من كلا المنتوجين لتحقيق أقصى ربح ممكن باستخدام الطريقة البيانية؟

الحل:

المتغيرات:

x_1: عدد الوحدات المنتجة من السراويل والتي تحقق أقصى ربح ممكن .

x_2: عدد الوحدات المنتجة من المعاطف والتي تحقق أقصى ربح ممكن .

دالة الهدف:

$$Max\ Z = 1{,}5x_1 + x_2$$

القيود:

قيد قسم الخياطة: $2x_1 + x_2 \leq 10$

قيد قسم الكي: $x_1 + x_2 \leq 6$

قيد خاص بالطلب السوقي من السراويل: $x_1 \leq 4{,}5$

قيد خاص بالطلب السوقي من المعاطف: $x_2 \leq 4$

شرط عدم السلبية $x_1 , x_2 \geq 0$

تحويل المتراجحات إلى معادلات:

قيد قسم الخياطة: $2x_1 + x_2 = 10$ ..... (1)

قيد قسم الكي: $x_1 + x_2 = 6$ ..... (2)

قيد خاص بالطلب السوقي من السراويل: $x_1 = 4{,}5$ ..... (3)

قيد خاص بالطلب السوقي من المعاطف: $x_2 = 4$ ..... (4)

إيجاد نقاط التقاطع مع المحورين:

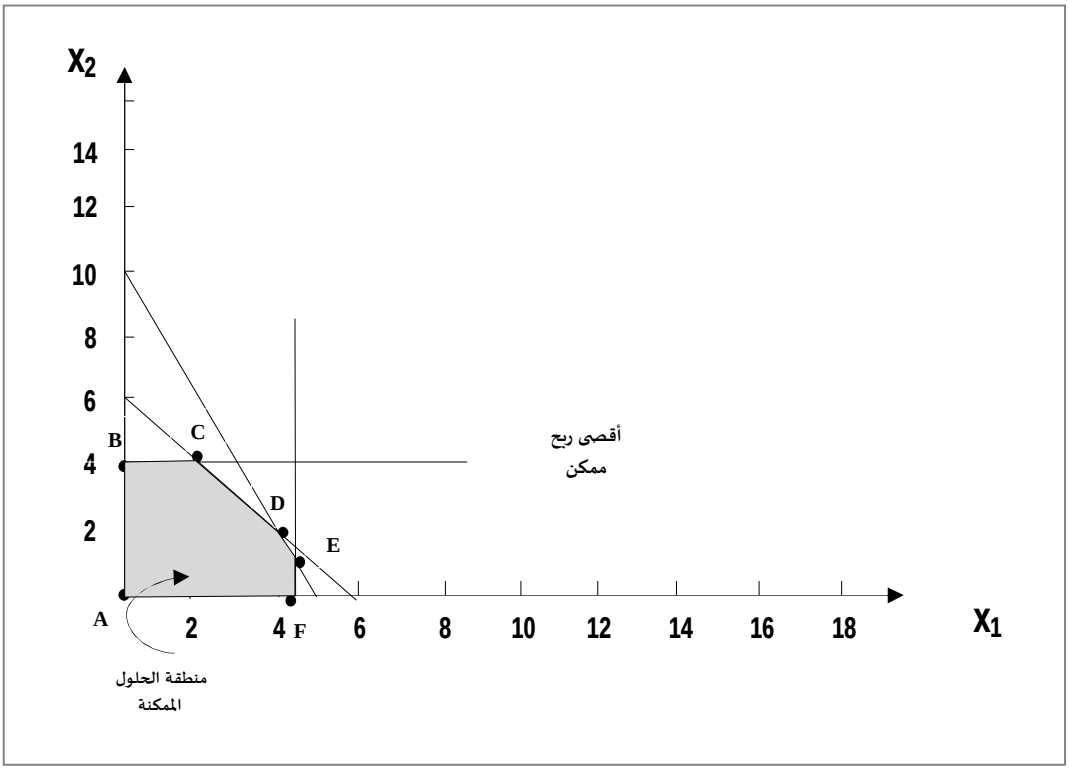
$2x_1 + x_2 = 10$ / (0 ,10) (5,0)

x_1	0	5
x_2	10	0

$x_1 + x_2 = 6$/ (0 ,6) (6,0)

x_1	0	6
x_2	6	0

التمثيل البياني:



إيجاد نقاط التقاطع المستقيمات مع بعضها:

– <u>النقطة C: تقاطع المستقيم 2 مع 4:</u>

$2x_1 + x_2 = 10$

$x_2 = 4$

$=2x_1 + (4) = 10$

$=2x_1 = 6$

$=\boxed{x_1= 3}$

أي: نقطة التقاطع هي: C(3,4)

– النقطة D: تقاطع المستقيم 1 مع 2:

$2x_1 + x_2= 10$

$x_1+ x_2 =6\times(-2)$

$=2x_1 + x_2= 10$

$-2x_1-2x_2= -12$

$= -x_2= -2$

$=\boxed{x_2= 2}$

ومنه: $\boxed{x_1 =4}$

أي: نقطة التقاطع هي: D(4,2)

– النقطة E: تقاطع المستقيم 1 مع 3:

$2x_1 + x_2= 10$

$x_1 = 4,5$

$=2(4,5) + x_2= 10$

$=\boxed{x_2= 1}$

أي: نقطة التقاطع هي: E(4,5,1)

إيجاد الحل الأمثل في نقاط الأركان:

النقطة	الإحداثيات	$\mathbf{Max\ Z = 1,5x_1 + x_2}$	النتيجة (الربح)
A	(0 , 0)	1,5(0)+ (0)	0 دج
B	(0 , 4)	1,5(0)+ (4)	4 دج
C	**(3 , 4)**	**1,5(3)+ (4)**	**8,5 دج**
D	(2 , 4)	1,5(2)+ (4)	7 دج
E	(4,5 , 1)	1,5(4,5)+ (1)	7,75 دج
F	(4,5 , 0)	1,5(4,5)+ (0)	6,75 دج

القرار الإداري:

يجب على صاحب ورشة الخياطة إنتاج 3 وحدات من سراويل و 4 وحدات من المعاطف وذلك لتحقيق أقصى ربح ممكن هو: 8,5 دج.

2.4.1. تقليل التكاليف باستخدام الرسوم البيانية:

مثال 07:

في إحدى المستشفيات الخاصة، طلب من المسؤول عن المطبخ أن تكون وجبة الإفطار الصباحية تستجيب للمتطلبات الغذائية اليومية من البروتين، الفيتامين و الحديد، و تكون بأقل تكلفة ممكنة؛ و بعد الاتصال بمتخصصين في التغذية تم التوصل إلى المعطيات التالية:

المتطلبات الغذائية اليومية	الوجبـة		الحد الأدنى (وحدة/100غ)
	الوجبة 01 (وحدة/100غ)	الوجبة 02 (وحدة/100غ)	
البروتين	2	2	10
الفيتامين	2	1	7
الحديد	1,33	2	8
تكلفة (دج/100غ)	3	4	/

المطلوب: إيجاد التوليفة المثلى من كلا الوجبتين بأقل تكلفة ممكنة باستخدام الطريقة البيانية؟

الحل:

المتغيرات:

x_1: عدد الوحدات (الوجبة 01) والتي تحقق أقل تكلفة ممكنة .

x_2: عدد الوحدات (الوجبة 02) والتي تحقق أقل تكلفة ممكنة .

دالة الهدف:

$$\text{Min } Z = 3x_1 + 4x_2$$

القيود:

قيد مادة البروتين: $2x_1 + 2x_2 \geq 10$

قيد مادة الفيتامين: $2x_1 + x_2 \geq 7$

قيد مادة الحديد: $1,33x_1 + 2x_2 \geq 8$

شرط عدم السلبية $x_1 , x_2 \geq 0$

تحويل المتراجحات إلى معادلات:

قيد مادة البروتين: $2x_1 + 2x_2 = 10$ ---------- (1)

قيد مادة الفيتامين: $2x_1 + x_2 = 7$ ---------- (2)

قيد مادة الحديد: $1{,}33x_1 + 2x_2 = 8$ ---------- (3)

إيجاد نقاط التقاطع مع المحورين:

$2x_1 + 2x_2 = 10$ / (0,5) (5,0)

x_1	0	5
x_2	5	0

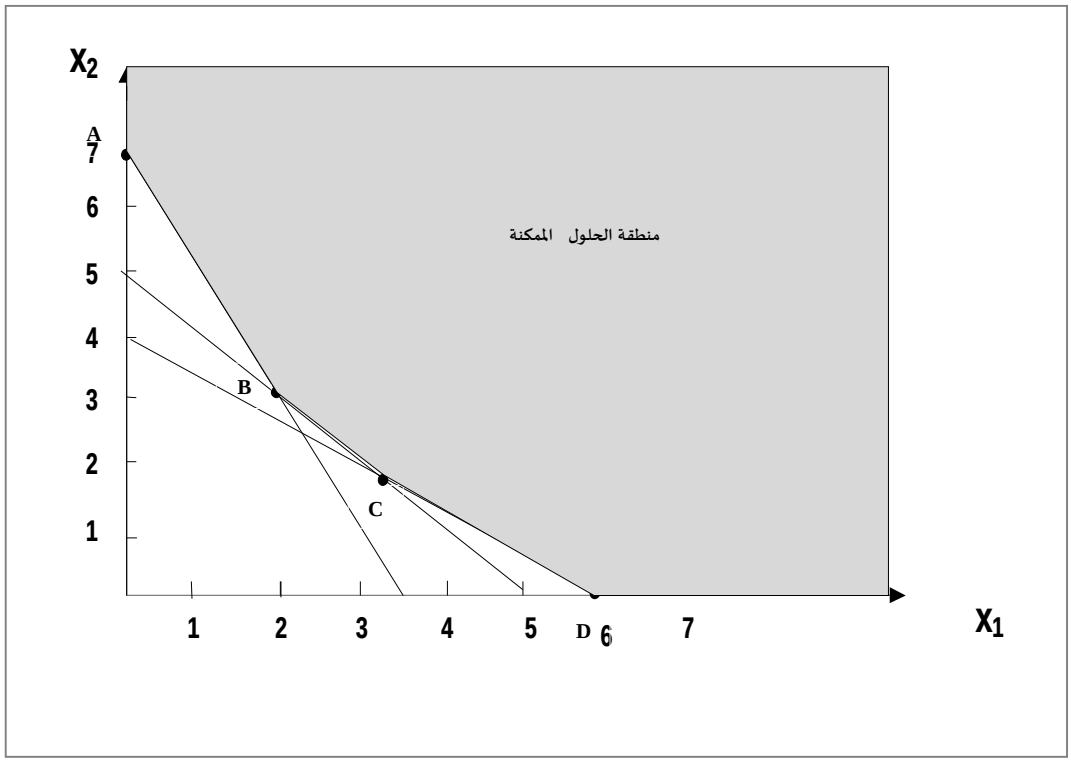
$2x_1 + x_2 = 7$ /(0,7) (3,5,0)

x_1	0	3,5
x_2	7	0

$1{,}33x_1 + 2x_2 = 8$

x_1	0	6
x_2	4	0

التمثيل البياني:



إيجاد نقاط التقاطع المستقيمات مع بعضها:

- النقطة B: تقاطع المستقيم 1 مع 2:

$2x_1 + 2x_2 = 10$

$2x_1 + x_2 = 7 \times (-1)$

$= 2x_1 + 2x_2 = 10$

$-2x_1 - x_2 = -7$

$= -x_2 = -3$

$= x_2 = 3$

$x_1 = 2$

ومنه:

أي: نقطة التقاطع هي: B(2,3)

- النقطة C: تقاطع المستقيم 1 مع 3:

$2x_1 + 2x_2 = 10$

$1{,}33x_1 + 2x_2 = 8 \times (-1)$

$= 2x_1 + 2x_2 = 10$

$-1{,}33x_1 - 2x_2 = -8$

$= 0{,}67x_1 = 2$

$= x_1 = 3$

$x_2 = 2$

ومنه:

أي: نقطة التقاطع هي: C(3,2)

إيجاد الحل الأمثل في نقاط الأركان:

النقطة	الإحداثيات	$\mathbf{Min\ Z = 3x_1 + 4x_2}$	النتيجة (التكلفة)
A	(0 , 7)	3(0)+ 4(7)	28 دج
B	(2 , 3)	3(2)+ 4(3)	18 دج
C	**(3 , 2)**	3(3)+ 4(2)	**17 دج**
D	(6 , 0)	3(6)+ 4(0)	18 دج

القرار الإداري:

يجب على مسؤول المطبخ إعداد 3 وجبات من (الوجبة 01) و 2 وجبة من (الوجبة 02) وذلك لتحقيق أقل تكلفة ممكنة قدرها: 17دج.