Université Mohamed Khider, Biskra
Faculté des Sc. Exactes et Sc. de la Nature et la Vie
Département de Mathématiques
Master 1: 2021/2022

Solution de l'exercice 6 de la Série N°3

Exercice 6. Selon un institut de sondage A, 510 sur 980 personnes interrogées sont favorables à une certaine mesure gouvernementale. Un autre institut de sondage B donne 505 personnes favorables (à la même mesure) sur 1030. Tester, au niveau de signification 5%, l'égalité des proportions de gens favorables proposées par les deux instituts.

****

Solution. Il s'agit ici d' test de comparaison entre deux proportions:

$$\begin{cases} H_0: & p_1 = p_2 \\ H_1: & p_1 \neq p_2 \end{cases}$$

Nous avons $\alpha = 0.05$, $n_1 = 980$, $n_2 = 1030$, $p_{1,obs} = 510/980$, $p_{2,obs} = 505/1030$. Sous l'hypothèse "$p_1 = p_2$", la statistique de test est

$$\frac{\widehat{p}_1 - \widehat{p}_2}{\sqrt{\widehat{p}\,(1-\widehat{p})\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1),$$

où

$$\widehat{p} := \frac{n_1\widehat{p}_1 + n_2\widehat{p}_2}{n_1+n_2},$$

et l'estimateur commun de $p_1$et p_2, à condition que

$$n_1 + n_2 > 30,\ n_i p_i \geq 5 \text{ et } n_i(1-p_i) \geq 5,\ \text{pour } i = 1, 2.$$

Pour notre problème nous avons:

$$n_1 + n_2 = 2010 > 30;\ n_1 p_1 = 510 > 5;\ n_2 p_2 = 505 > 5.$$

La région critique associée est :

$$W = \left\{ \left(x_1^{(1)}, ..., x_1^{(980)}; x_2^{(1)}, ..., x_2^{(1030)}\right) \in \mathbb{R}_+^{2010} \mid \frac{|\widehat{p}_1 - \widehat{p}_2|}{\sqrt{\widehat{p}\,(1-\widehat{p})\left(\frac{1}{980}+\frac{1}{1030}\right)}} \geq z_{1-0.05/2} \right\},$$

où $z_{1-0.05/2}$ (la valeur critique) est le quantile d'ordre $1-\alpha/2$ de $\mathcal{N}(0,1)$. De la table statistique de la loi normale centré réduite on obtient $z_{1-0.05/2} = z_{0.975} \simeq 1,88$, ainsi

$$W = \left\{ \left(x_1^{(1)}, ..., x_1^{(980)}; x_2^{(1)}, ..., x_2^{(1030)}\right) \in \mathbb{R}_+^{2010} \mid \frac{|\widehat{p}_1 - \widehat{p}_2|}{\sqrt{\widehat{p}\,(1-\widehat{p})\left(\frac{1}{980}+\frac{1}{1030}\right)}} \geq 1.88 \right\}$$

La valeur observée de $\widehat{p}$ donne:

$$p_{obs} = \frac{n_1 p_{1,obs} + n_2 p_{2,obs}}{n_1+n_2} = \frac{510+505}{980+1030} = 0.50498.$$

Ainsi la valeur observée de la statistique de test est

$$\begin{aligned} &\frac{|p_{1,obs} - p_{2,obs}|}{\sqrt{p_{obs}\,(1-p_{obs})\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} \\ &= \frac{|510/980 - 505/1030|}{\sqrt{0.50498\,(1-0.50498)\left(\frac{1}{980}+\frac{1}{1030}\right)}} \simeq 1.35. \end{aligned}$$

Comme $1.35 < 1.88$, alors on accepte l'hypothèse d'égalité de deux proportions.