Partie 2 : Equations Différentielles avec Conditions aux Limites

2.1. Introduction

Jusqu'à présent, nous avons essentiellement présenté des méthodes relatives aux problèmes aux conditions initiales. Les choses se compliquent un peu pour les problèmes aux conditions aux limites.

Dans cette section, nous faisons l'étude des équations différentielles linéaires d'ordre 2 avec conditions aux limites de la forme :

$$y''(x) = a_2(x)\,y'(x) + a_1(x)\,y(x) + a_0(x)$$

$$y(a) = y_a \text{ et } y(b) = y_b \qquad (1.2.1)$$

2.2. Méthode de Tir

La solution de l'équation différentielle avec conditions aux limites est donnée par :

$$y(x) = y_1(x) + \left(\frac{y_b - y_1(b)}{y_2(b)}\right) y_2(x) \qquad (1.2.2)$$

où $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont les solutions des équations différentielles avec conditions initiales :

$$y''_1(x) = a_2(x)\,y'_1(x) + a_1(x)\,y_1(x) + a_0(x)$$

$$y_1(a) = y_a \text{ et } y'_1(\mathrm{a}) = 0 \qquad (1.2.3)$$

et

$$y''_2(x) = a_2(x)\,y'_2(x) + a_1(x)\,y_2(x) + a_0(x)$$

$$y_2(a) = 0 \text{ et } y'_2(\mathrm{a}) = 1 \qquad (1.2.4)$$

On peut résoudre les équations différentielles avec conditions initiales (1.2.3) et (1.2.4) à l'aide de la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4. On doit d'abord transformer chacune d'elles en un système de 2 équations différentielles d'ordre 1. En Posant :

$$\begin{cases} u_1(x) = y_1(x) \\ u_2(x) = y'_1(x) \end{cases} \tag{1.2.5}$$

$$\begin{cases} v_1(x) = y_2(x) \\ v_2(x) = y'_2(x) \end{cases} \tag{1.2.6}$$

On obtient les 2 systèmes suivants :

$$\begin{cases} u'_1(x) = u_2(x) \\ u'_2(x) = a_2(x)u_2(x) + a_1(x)u_1(x) + a_0(x) \end{cases} ; \begin{matrix} u_1(a) = y_a \\ u_2(a) = 0 \end{matrix} \tag{1.2.7}$$

$$\begin{cases} v'_1(x) = v_2(x) \\ v'_2(x) = a_2(x)v_2(x) + a_1(x)v_1(x) \end{cases} ; \begin{matrix} v_1(a) = 0 \\ v_2(a) = 1 \end{matrix} \tag{1.2.8}$$

La solution finale peut alors s'écrire :

$$y(x) = y_1(x) + \left(\frac{y_b - y_1(b)}{y_2(b)}\right) y_2(x) = u_1(x) + \left(\frac{y_b - u_1(b)}{v_1(b)}\right) v_1(x) \tag{1.2.9}$$

<u>Remarque :</u>

On rencontre fréquemment un autre type d'équation différentielle avec conditions aux limites de la forme :

$$y''(x) = a_2(x)y'(x) + a_1(x)y(x) + a_0(x)$$

$$y(a) = y_a \text{ et } y'(b) = y'_b \tag{1.2.10}$$

La solution de l'équation différentielle est donnée par :

$$y(x) = y_1(x) + \left(\frac{y_b - y_1(b)}{y_2(b)}\right) y_2(x) \tag{1.2.11}$$

où $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont les solutions des équations différentielles avec conditions initiales (1.2.3) et (1.2.4). Suivant la notation du système, la solution s'écrit :

$$y(x) = y_1(x) + \left(\frac{y'_b - y'_1(b)}{y'_2(b)}\right) y_2(x) = u_1(x) + \left(\frac{y'_b - u_2(b)}{v_2(b)}\right) v_1(x) \qquad (1.2.12)$$

Exemple :

Soit le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} y''(x) = -4y'(x) + 4y(x) \quad x \in [0,2] \\ y(0) = 1 \quad et \quad y(2) = 2.62 \quad ; \quad h = 0.2 \end{cases}$$

Trouver la valeur approximative de la solution $y(x)$ aux points d'abscisses $x_1 = 0.2$; $x_2 = 0.4$ par la méthode de Tir.

Cette méthode ramène la résolution de problème à celle des deux problèmes de Cauchy suivants :

$$\begin{cases} y_1''(x) = -4y_1' + 4y_1 \\ y_1(0) = 1, \quad y_1'(0) = 0, \quad h = 0.2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_2''(x) = -4y_2' + 4y_2 \\ y_2(0) = 1, \quad y_1'(0) = 1, \quad h = 0.2 \end{cases}$$

Une fois ces deux problèmes de Cauchy résolus, la solution du problème aux limites est données par :

$$y(x) = y_1(x) + \frac{2.62 - y_1(2)}{y_2(2)} y_2(x)$$

où $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont respectivement les solutions des problèmes de Cauchy.

Commençons par la résolution du problème en posant $u_1(x) = y_1(x)$ et $u_2(x) = y'_1(x) = u'_1(x)$, le problème devient :

$$\begin{cases} u_1' = u_2 \\ u_2' = -4u_2 + 4u_1 \\ u_1(0) = 1 \quad et \quad u_2(0) = 0 \end{cases}$$

En utilisant, par exemple, la méthode d'Euler modifiée, on obtient les résultats reportés dans le Tableau suivant :

x_i	U_{1i}	U_{2i}
0.2	1.08	0.512
0.4		
0.6		
⋮	⋮	⋮
2	4.509	3.769

Tableau 1.2.1. Résultats de système 1

De la meme manière on résout le $2^{\text{ième}}$ système donné par :

$$\begin{cases} u_1' = u_2 \\ u_2' = -4u_2 + 4u_1 \\ u_1(0) = 1 \quad et \quad u_2(0) = 1 \end{cases}$$

Les résultats obtenus sont résumés dans le Tableau suivant :

x_i	U_{1i}	u_{2i}
0.2	0.12	0.568
0.4		
0.6		
⋮	⋮	⋮
2.0	0.883	0.739

Tableau 1.2.2. Résultats de système 2

En appliquant la formule donnant la solution $y(x)$ du problème aux limites, nous obtenons au point d'abscisse $x_1 = 0.2$:

$$y(0.2) = y_1(0.2) + \frac{2.62-4.509}{0.883} y_2(0.2) = 0.82$$