3-2- Passage à une solution de base adjacente

On utilise la technique des coûts duaux qui consiste à déterminer une décomposition des coefficients c_{ij} (les coûts de transport) de la forme

$$c_{ij} = u_i + v_j$$

Pour les indices correspondants à ceux de la solution de base.

Il y a *m+n-1* équations pour *m+n* inconnues. Dans la pratique on pose $u_1 = 0$ et on résout pour les autres variables.

Reprenons notre exemple du début. Pour chaque case, on affiche le coefficient *cij* qui est sont encadré et la solution de base. La case est vide si la variable est hors-base. Démarrons avec la solution fournie par la méthode du coin nord-ouest.

400 $\boxed{1470}$	50 $\boxed{1210}$	$\boxed{3440}$	$\boxed{5520}$	450
$\boxed{2410}$	400 $\boxed{1530}$	50 $\boxed{1020}$	$\boxed{3120}$	450
$\boxed{4510}$	$\boxed{3640}$	500 $\boxed{5570}$	250 $\boxed{2850}$	750
400	450	550	250	1650

On évalue les coûts duaux $c_{ij} = u_i + v_j$ de la manière suivante

$$c_{11} = u_1 + v_1 \Leftrightarrow 1470 = 0 + v_1 \Rightarrow v_1 = 1470$$
$$c_{12} = u_1 + v_2 \Leftrightarrow 1220 = 0 + v_2 \Rightarrow v_2 = 1210$$
$$c_{22} = u_2 + v_2 \Leftrightarrow 1530 = u_2 + 1210 \Rightarrow u_2 = 320$$
$$c_{23} = u_2 + v_3 \Leftrightarrow 1020 = 320 + v_3 \Rightarrow v_3 = 700$$
$$c_{33} = u_3 + v_3 \Leftrightarrow 5570 = u_3 + 700 \Rightarrow u_3 = 4870$$
$$c_{34} = u_3 + v_4 \Leftrightarrow 2850 = 4870 + v_4 \Rightarrow v_4 = -2020$$

0n ajoute ces informations dans le tableau

400 $\boxed{1470}$	50 $\boxed{1210}$	$\boxed{3440}$	$\boxed{5520}$	450	$u_1 = 0$
$\boxed{2410}$	400 $\boxed{1530}$	50 $\boxed{1020}$	$\boxed{3120}$	450	$u_2 = 320$
$\boxed{4510}$	$\boxed{3640}$	500 $\boxed{5570}$	250 $\boxed{2850}$	750	$u_3 = 4870$
400	450	550	250	1650	
$v_1 = 1470$	$v_2 = 1210$	$v_3 = 700$	$v_4 - 2020$		

Pour toutes les cases hors-base, on évalue la quantité $\Delta z = c_{ij} - u_i - v_j$

400 $\boxed{1470}$	50 $\boxed{1210}$	(2740) $\boxed{3440}$	(7540) $\boxed{5520}$	450	$u_1 = 0$
(620) $\boxed{2410}$	400 $\boxed{1530}$	50 $\boxed{1020}$	(4820) $\boxed{3120}$	450	$u_2 = 320$
(-1830) $\boxed{4510}$	(-2440) $\boxed{3640}$	500 $\boxed{5570}$	250 $\boxed{2850}$	750	$u_3 = 4870$
400	450	550	250	1650	
$v_1 = 1470$	$v_2 = 1210$	$v_3 = 700$	$v_4 = -2020$		

La solution de base sera optimale si tous les $\Delta z \geq 0$

Sinon, choisir la case qui minimise la valeur de $\Delta z < 0$ et recommencer le processus.

Faisons entrer la variable x_{32} dans la base. Il faudra identifier la variable qui sortira de la base et calculer la valeur de cette variable $x_{32} = \theta$

	D1	*D2*	*D3*	*D4*	
S1	*400*	*50*			*450*
S2		*400 –* θ	*50 +* θ		*450*
S3		Θ	*500 -* θ	*250*	*750*
	400	*450*	*550*	*250*	

Le choix de θ doit respecter la contrainte de positivité

$400 - \theta \geq 0$

$50 + \theta \geq 0$

$500 - \theta \geq 0$

$\theta \geq 0$

Alors

$\theta \leq 400$

Si on choisi $\theta = 400$, la case (2,2) devient nulle et donc x_{22} sort de la base. La nouvelle solution de base est

	D1	*D2*	*D3*	*D4*	
S1	*400*	*50*			*450*
S2			*450*		*450*
S3		*400*	*100*	*250*	*750*
	400	*450*	*550*	*250*	

Poursuivons les calculs à partir de cette étape. On doit mettre à jour les coûts duaux avec la nouvelle base. On obtient le tableau

400 $\boxed{1470}$	50 $\boxed{1210}$	(+) $\boxed{3440}$	(+) $\boxed{5520}$	450	$u_1 = 0$
(+) $\boxed{2410}$	(+) $\boxed{1530}$	450 $\boxed{1020}$	(+) $\boxed{3120}$	450	$u_2 = -2120$
(+) $\boxed{4510}$	400 $\boxed{3640}$	100 $\boxed{5570}$	250 $\boxed{2850}$	750	$u_3 = 2430$
400	450	550	250	1650	
$v_1 = 1470$	$v_2 = 1210$	$v_3 = 3140$	$v_4 = 420$		

Tous les $\Delta z \geq 0$ ce qui montre que la solution est optimale.

Et

$z = 3833000$ comme valeur minimale.

Exemple :

Considérons le problème de transport suivant

	D_1	D_2	D_3	
S_1	$\boxed{8}$	$\boxed{10}$	$\boxed{6}$	100
S_2	$\boxed{7}$	$\boxed{4}$	$\boxed{9}$	80
S_3	$\boxed{13}$	$\boxed{12}$	$\boxed{8}$	45
	90	60	75	225

a) On démarre avec la solution du coin nord-ouest et on évalue les coûts duaux.

	D_1	D_2	D_3		
S_1	90 $\boxed{8}$	10 $\boxed{10}$	(-9) $\boxed{6}$	100	$u_1 = 0$
S_2	(5) $\boxed{7}$	50 $\boxed{4}$	30 $\boxed{9}$	80	$u_2 = -6$
S_3	(12) $\boxed{13}$	(9) $\boxed{12}$	45 $\boxed{8}$	45	$u_3 = -7$
	90	60	75	225	
	$v_1 = 8$	$v_2 = 10$	$v_3 = 15$		

b) La case (1, 3) entre dans la base. On doit trouver celle qui quitte.

	D_1	D_2	D_3	
S_1	90	$10-\theta$	θ	100
S_2		$50+\theta$	$30-\theta$	80
S_3			45	45
	90	60	75	225

Donc $\theta = 10$ ce qui conduit à la solution de base

	D_1	D_2	D_3	
S_1	90		10	100
S_2		60	20	80
S_3			45	45
	90	60	75	225

Les coûts duaux

	D_1	D_2	D_3		
S_1	90 $\boxed{8}$	(9) $\boxed{10}$	10 $\boxed{6}$	100	$u_1 = 0$
S_2	(-4) $\boxed{7}$	60 $\boxed{4}$	20 $\boxed{9}$	80	$u_2 = 3$
S_3	(2) $\boxed{13}$	(8) $\boxed{12}$	45 $\boxed{8}$	45	$u_3 = 3$
	90	60	75	225	
	$v_1 = 8$	$v_2 = 1$	$v_3 = 6$		

La case (2, 1) entre dans la base. On doit trouver celle qui quitte.

	D_1	D_2	D_3	
S_1	$90-\theta$		$10+\theta$	100
S_2	θ	60	$20-\theta$	80
S_3			45	45
	90	60	75	225

Donc $\theta = 20$ ce qui conduit à la solution de base

	D_1	D_2	D_3	
S_1	70		30	100
S_2	20	60		80
S_3			45	45
	90	60	75	225

Les coûts duaux

	D_1	D_2	D_3		
S_1	70 $\boxed{8}$	$(+)$ $\boxed{10}$	30 $\boxed{6}$	100	$u_1 = 0$
S_2	20 $\boxed{7}$	60 $\boxed{4}$	$(+)$ $\boxed{9}$	80	$u_2 = -1$
S_3	$(+)$ $\boxed{13}$	$(+)$ $\boxed{12}$	45 $\boxed{8}$	45	$u_3 = 2$
	90	60	75	225	
	$v_1 = 8$	$v_2 = 5$	$v_3 = 6$		

Ce tableau est optimal et la valeur de $z = 1480$.