الجمهورية الجزائرية الديموقراطية الشعبية

جامعة محمد خيضر بسكرة
قسم البيولوجي –الحاجب
السنة الأولى جذع مشترك
علوم طبيعية و الحياة
مادة الرياضيات

الأستاذ الدكتور شالة عادل

السنة الجامعية
2022-2021

الفرض الثاني

الفرض الثاني رقم 1

التمرين الأول أحسب التكاملات التالية مع وضع القانون المستعمل للحساب

$$\int (x^3 + \sqrt[3]{x^2})dx \quad \text{et} \quad \int \frac{(2x+1)}{(x^2+x)}dx$$

التمرين الثاني

1) قم بكتابة الدالة الكسرية التالية على شكل مجموع عوامل أولية من الشكل $\frac{b}{x+2} + \frac{a}{x+3}$ بحيث a,b هما عددان حقيقيان يطلب تعيينهما.

$$\frac{1}{(x+2)(x+3)}$$

2) أحسب التكاملات التالية

$$\int \frac{6}{x^2+5x+6}dx.$$

الإجابة

التمرين الأول

$$\int \left(x^3 + \sqrt[3]{x^2}\right)dx = \int (x^3)dx + \int \left(\sqrt[3]{x^2}\right)dx = \int (x^3)dx + \int (x^2)^{\frac{1}{3}}dx$$

$$= \int (x^3)dx + \int x^{\frac{2}{3}}dx = \frac{1}{3+1}x^{3+1} + \frac{1}{\frac{2}{3}+1}x^{\frac{2}{3}+1} + c$$

$$= c + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{\frac{5}{3}}x^{\frac{5}{3}}$$

$$\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + c.$$

$$\int \frac{(2x+1)}{(x^2+x)}dx = \int \frac{(x^2+x)'}{(x^2+x)}dx = ln|x^2+x| + c.$$

التمرين الثاني

1) نقوم بكتابة الدالة الكسرية على شكل مجموع عوامل أولية الشكل $\frac{b}{x+2} + \frac{a}{x+3}$ بحيث a,b هما عددان حقيقيان يطلب تعيينهما.

و منه

$$\frac{a}{x+3} + \frac{b}{x+2} = \frac{a(x+2)+b(x+3)}{(x+3)(x+2)} = \frac{ax+2a+bx+3b}{(x+3)(x+2)}$$

$$= \frac{(a+b)x+2a+3b}{(x+3)(x+2)}$$

نقوم الآن بمطابقة العلاقة الأخيرة مع الدالة الكسرية

$$\frac{1}{(x+2)(x+3)} = \frac{0x+1}{(x+2)(x+3)}$$

و منه

$$\begin{cases} a+b=0, \\ 2a+3b=1. \end{cases}$$

و منه

$$\begin{cases} a = -b, \\ 2(-b) + 3b = 1. \end{cases}$$

و منه

$$\begin{cases} a = -b, \\ b = 1. \end{cases}$$

و منه

$$\begin{cases} a = -1, \\ b = 1. \end{cases}$$

و منه يمكننا التفكيك و التحليل إلى مجموع عاملين أوليين كما هو موضح في العلاقة التالية

$$\frac{1}{(x+2)(x+3)} = \frac{-1}{x+3} + \frac{1}{x+2}.$$

2) لحساب التكامل نقوم بإتباع الخطوات التالية و هذا بالاستعانة بالعلاقات و الاستنتاجات الموجودة في السؤال السابق, و عليه

$$\begin{aligned} \int \frac{6}{x^2+5x+6}dx &= 6\int \frac{1}{x^2+5x+6}dx = 6\int \frac{1}{(x+2)(x+3)}dx = 6\int (\frac{-1}{x+3} + \frac{1}{x+2})dx. \\ &= 6\int (\frac{-1}{x+3})dx + 6\int (\frac{1}{x+2})dx = -6\int \left(\frac{(x+3)'}{x+3}\right)dx + 6\int \left(\frac{(x+2)'}{x+2}\right)dx \\ &= -6ln|x+3| + 6ln|x+2| + c = 6ln\left|\frac{x+2}{x+3}\right| + c. \end{aligned}$$

الفرض الثاني رقم 2

التمرين الأول أحسب التكاملات التالية مع توضيح جيدا العلاقة المستعملة لحساب التكامل

$$\int \left(6x^5 + 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + \frac{2x}{x^2} + \frac{1}{x}\right) dx$$

التمرين الثالث أحسب التكاملات التالية

$$\int \cos(\sqrt{x})\, dx + \int \sin(\sqrt{x})\, dx$$

الإجابة

التمرين الأول

أولا نقوم بتوزيع التكامل على المجموع, كما هو مبين في العلاقة التالية

.

$$\int \left(6x^5 + 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + \frac{2x}{x^2} + \frac{1}{x}\right) dx$$
$$= \int (6x^5)dx + \int (5x^4)dx + \int (4x^3)dx + \int (3x^2)dx + \int \left(\frac{2x}{x^2}\right) dx + \int \left(\frac{1}{x}\right) dx$$

بعد هذا نقوم بإخراج الثوابت من داخل التكاملات إلى خارجها, و هذا بإستخدام العلاقات الموجودة في الدرس, بحيث

$$\int (6x^5)dx + \int (5x^4)dx + \int (4x^3)dx + \int (3x^2)dx + \int \left(\frac{2x}{x^2}\right) dx + \int \left(\frac{1}{x}\right) dx$$
$$= 6\int (x^5)dx + 5\int (x^4)dx + 4\int (x^3)dx + 3\int (x^2)dx + \int \left(\frac{2x}{x^2}\right) dx + \int \left(\frac{1}{x}\right) dx$$

بإستخدام العلاقات الموجودة في الدرس التالية

$$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + c. \qquad et \qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = ln|f(x)| + c.$$

و منه

$$6\int (x^5)dx + 5\int (x^4)dx + 4\int (x^3)dx + 3\int (x^2)dx + \int \left(\frac{2x}{x^2}\right) dx + \int \left(\frac{1}{x}\right) dx$$
$$= 6\frac{1}{5+1}x^{5+1} + 5\frac{1}{4+1}x^{4+1} + 4\frac{1}{3+1}x^{3+1} + 3\frac{1}{2+1}x^{2+1} + \int \left(\frac{(x^2)'}{x^2}\right) dx$$
$$+ \int \left(\frac{(x)'}{x}\right) dx = 6\frac{1}{6}x^6 + 5\frac{1}{5}x^5 + 4\frac{1}{4}x^4 + 3\frac{1}{3}x^3 + ln|x^2| + ln|x|$$
$$= x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + 3ln|x^2| + c.$$

التمرين الثاني

أولا نقوم بتوزيع التكامل على المجموع, لتصبح العلاقة التكامل كما يلي

$$\int \cos(\sqrt{x})\, dx + \int \sin(\sqrt{x})\, dx = \int \cos(\sqrt{x})\, dx + \int \sin(\sqrt{x})\, dx$$

نقوم بتبديل المتغير, بحيث نضع

$$t = \sqrt{x}$$

و منه

$$x = t^2 = \varphi(t).$$

نشتق العلاقة السابقة نجد

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\varphi(t)}{dt} = 2t.$$

و منه

$$dx = 2tdt.$$

نعوض العلاقة السابقة في التكامل المراد حسابه لنجد

$$\int \cos(\sqrt{x})\,dx + \int \sin(\sqrt{x})\,dx = \int 2t\cos t\,dt + \int 2t\sin t\,dt = 2\int t\cos t\,dt + 2\int t\sin t\,dt$$

بما أن العلاقة السابقة هي عبارة عن تكامل جداء دالتين, إذن التكامل الذي يمكننا تطبيقه هنا هو التكامل بالتجزئة.

بحيث نضع$\int t\cos t\,dt$

$$f(t) = t, \quad alors\ f'(t) = 1,$$

$$g'(t) = cost, \quad alors \quad g(t) = sint.$$

$$\int t\cos t\,dt = \int f(t)g'(t)dt = f(t)g(t) - \int f'(t)g(t)dt = tsin(t) - \int 1\sin(t)\,dt = tsin(t) - \big(-con(t)\big) + c = tsin(t) + \cos(t) + c.$$

نحسب الآن التكامل الثاني و هو$\int t\sin t\,dt$

$$f(t) = t, \quad alors\ f'(t) = 1,$$

$$g'(t) = sint, \quad alors \quad g(t) = -\cos(t).$$

$$\begin{aligned}\int t\sin t\,dt = \int f(t)g'(t)dt &= f(t)g(t) - \int f'(t)g(t)dt \\ &= t(-cos(t)) - \int 1(-\cos(t))\,dt = -t(cos(t)) - \big(-sin(t)\big) + c = tcos(t) + \sin(t) + c.\end{aligned}$$

نقوم بتعويض النتائج السابقة في التكامل المراد حسابه

$$\int tcos(t)dt + \int tsin(t)dt = tsin(t) + \cos(t) - tcos(t) + \sin(t) + c = \sqrt{x}sin(\sqrt{x}) + \cos(\sqrt{x}) - \sqrt{x}cos(\sqrt{x}) + \sin(\sqrt{x}) + c.$$

الفرض الثاني رقم 3

التمرين الأول : أحسب التكاملات التالية مع تحديد نوع التكامل

$$\int x\cos(x^2)dx \qquad ,et \qquad \int \ln(2+x)\,dx \qquad et \qquad \int e^{\sqrt{x}}dx$$

التمرين الثاني : أحسب التكاملات التالية

$$\int (\boldsymbol{x^3+\cos(x)+e^x})\boldsymbol{dx}$$

الإجابة

التمرين الأول

نقوم بحساب التكامل الأول $\int x\cos(x^2)dx$, و هذا بإستخدام طريقة تبديل المتغير كما هو موضح فيما يلي

نضع $t=x^2$

و منه

$$\frac{dt}{dx}=2x, \quad alors \quad dt=2xdx, \quad alors \qquad xdx=\frac{1}{2}dt.$$

بالتعويض نجد

$$\int x\cos(x^2)dx=\int \frac{1}{2}\cos(t)\,dt=\frac{1}{2}\int \cos(t)\,dt=\frac{1}{2}\sin(t)+c=\frac{1}{2}\sin(x^2)+c.$$

نقوم بحساب التكامل الثاني $\int \ln(2+x)\,dx$ و هذا بإستخدام تبديل المتغير كما يلي

نضع $t=(x+2)$

و منه $x=t-2=\varphi(t)$

نشتق نجد $\frac{dx}{dt}=\frac{d\varphi(t)}{dt}=1.$

نعوض في التكامل المراد حسابه لنجد

$$\int \ln(x+2)\,dx=\int \ln(t)\,dt=\int 1\times\ln(t)\,dt.$$

بما أن التكامل الأخير هو عبارة عن تكامل لجداء دالتين فإننا سوف نستخدم طريقة حساب التكامل بالتجزئة, كما هو موضح في العلاقات التالية.

$$f'^{(t)}=1, \ \ alors \quad f(t)=t,$$

$$g(t)=\ln(t)\,, \ \ alors \qquad g'(t)=\frac{1}{t}.$$

و منه

$$\begin{aligned}\int 1\times\ln(t)\,dt&=\int f'(t)g(t)dt\\&=f(t)g(t)-\int f(t)g'(t)dt=t\times ln(t)-\int t\times\frac{1}{t}dt=t\times ln(t)-\int 1dt\\&=t\times ln(t)-t+c=(2+x)\times\ln(2+x)-(2+x)+c.\end{aligned}$$

و في الأخير نتطرق إلى حساب التكامل الأخير $\int e^{\sqrt{x}}dx$ بما أن الدالة المكاملة هي عبارة عن دالة مركبة من دالتين, إذا فإن التكامل المناسب لحساب مثل هذا التكامل هو إستخدام طريقة التكامل بتبديل المتغير, كما يلي

نضع $t=\sqrt{x}$

و منه $x=t^2=\varphi(t)$

نشتق نجد $\frac{dx}{dt}=\frac{d\varphi(t)}{dt}=2t$

ومنه $dx=2tdt$

نعوض في التكامل المراد حسابه لنجد

$$\int e^{\sqrt{x}}dx=\int 2t\times e^t dt=2\int t\times e^t dt.$$

بما أن التكامل الأخير هو عبارة عن تكامل لجداء دالتين, إذن فإن أحسب طريقة لحساب مثل هذا التكامل هو إستخدام طريقة التكامل بالتجزئة, كما هو مبين في الحساب التالي

$$f(t)=t,\quad alors\quad f'(t)=1,$$
$$g'(t)=e^t,\quad alors\quad g(t)=e^t.$$

و منه

$$\int te^t dt=\int f(t)g'(t)dt=f(t)g(t)-\int f'(t)g(t)dt=te^t-\int 1\times e^t dt=te^t-e^t+c.$$

و منه

$$\int e^{\sqrt{x}}dx=\int 2t\times e^t dt=2\int t\times e^t dt=2(te^t-e^t)+c.$$

التمرين الثاني

أولا و قبل كل شيء, نقوم بتوزيع التكامل على المجموع لتصبح العلاقة كما يلي

$$\int(x^3+\cos(x)+e^x)dx=\int(x^3)dx+\int(\cos(x))dx+\int(e^x)dx$$

بإستخدام العلاقات الموجودة في الدرس, و كما هو مبين في حلول الفروض السابقة

$$\int(x^3)dx+\int(\cos(x))dx+\int(e^x)dx=\frac{1}{3+1}x^{3+1}+\sin(x)+e^x+c.$$

الفرض الثاني رقم 4

التمرين الأول : لتكن لدينا الدالة المعرفة بالشكل التالي

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)}.$$

1) أكتب الدالة السابقة على شكل مجموع عوامل أولية من الشكل $\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x+2}$ بحيث a,b هما عددان حقيقيان يطلب تعيينهما.
2) حاول كتابة كثير الحدود التالي على شكل جداء عاملين أوليين

$$x^2+3x+2$$

3) أحسب التكامل التالي و هذا باستخدامك كل ما تم أيجاده في السؤالين السابقين

$$\int \frac{4}{(x^2+3x+2)}dx.$$

التمرين الثاني: أحسب التكامل التالي و هذا مع تحديد القانون الأساسي الذي إستخدمته لحساب التكامل

$$\int \frac{3}{1+x}dx+\int \sqrt{5}x^5dx.$$

الإجابة

التمرين الأول.

1) نقوم بكتابة الدالة الكسرية على شكل مجموع عوامل أولية الشكل $\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x+2}$ بحيث a,b هما عددان حقيقيان يطلب تعيينهما.

و منه

$$\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x+2}=\frac{b(x+1)+a(x+2)}{(x+1)(x+2)}=\frac{bx+b+ax+2a}{(x+1)(x+2)}$$

$$=\frac{(a+b)x+b+2a}{(x+1)(x+2)}$$

نقوم الآن بمطابقة العلاقة الأخيرة مع الدالة الكسرية

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{0x+1}{(x+1)(x+2)}$$

و منه

$$\begin{cases} a+b=0, \\ b+2a=1. \end{cases}$$

و منه

$$\begin{cases} a=-b, \\ b+2(-b)=1. \end{cases}$$

و منه

$$\begin{cases} a=-b, \\ -b=1. \end{cases}$$

و منه

$$\begin{cases} a=1, \\ b=-1. \end{cases}$$

و منه يمكننا التفكيك و التحليل إلى مجموع عاملين أوليين كما هو موضح في العلاقة التالية

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+1}+\frac{-1}{x+2}.$$

2) نقوم بتفكيك كثير الحدود إلى جداء عاملين أوليين من الشكل

$$x^2+3x+2=(x-\alpha)(x-\beta)$$

أولا نقوم بحساب المميز Δ بحيث

$$\Delta = b^2 - 4ac = (3)^3 - 4 \times 2 \times 1 = 1 > 0.$$

و منه كثير الحدود من الدرجة الثانية يقبل حلين مختلفين من الشكل

$$\alpha = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - \sqrt{1}}{2} = -2.$$

$$\beta = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + \sqrt{1}}{2} = -1.$$

و منه

$$x^2 + 3x + 2 = (x + 2)(x + 1).$$

3) لحساب التكامل نقوم بإتباع الخطوات التالية و هذا بالاستعانة بالعلاقات و الاستنتاجات الموجودة في السؤال السابق, و عليه

$$\int \frac{4}{x^2 + 3x + 2} dx = 4 \int \frac{1}{x^2 + 3x + 2} dx = 4 \int \frac{1}{(x + 2)(x + 1)} dx = 4 \int (\frac{-1}{x + 2} + \frac{1}{x + 1}) dx.$$

$$= 4 \int (\frac{-1}{x + 2}) dx + 4 \int (\frac{1}{x + 1}) dx = -4 \int \left(\frac{(x + 2)'}{x + 2}\right) dx + 4 \int \left(\frac{(x + 1)'}{x + 1}\right) dx$$

$$= -4ln|x + 2| + 4ln|x + 1| + c = 4ln\left|\frac{x + 1}{x + 2}\right| + c.$$

<u>التمرين الثاني</u>

لحساب التكامل نقوم بتطبيق كل ما تم التطرق له في الحلول السابقة, و هذا باستخدام العلاقتين التاليتين

$$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha + 1} x^{\alpha + 1} + c. \quad et \quad \int \alpha f(x) dx = \alpha \int f(x) dx \quad et \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = ln|f(x)| + c.$$

و منه

$$\int \frac{3}{1+x} dx + \int \sqrt{5} x^5 dx = 3 \int \frac{1}{1+x} dx + \sqrt{5} \int x^5 dx = 3 \int \frac{(1+x)'}{1+x} dx + \sqrt{5} \int x^5 dx = 3ln|1 + x| + ..\sqrt{5} \frac{1}{5+1} x^{5+1} + c.$$

الفرض الثانى رقم 5

التمرين الأول أحسب التكامل التالي و هذا بتوضيح العلاقة الفعلية المستخدمة لحساب التكامل

$$\int x\cos(x)\,dx$$

التمرين الثاني

1) قم بتفكيك الدالة الكسرية التالية إلى مجموع عوامل أولية من الشكل $\frac{a}{x}+\frac{b}{x-3}$ بحيث a,b هما عددان حقيقيان يطلب تعيينهما

$$\frac{1}{x(x-3)}.$$

2) بإستخدام كل ما تم التوصل إليه في السؤال السابق أحسب التكاملات التالية

$$\int \frac{1}{e^x-3}dx.$$

الإجابة

التمرين الأول

نلاحظ الآن أن التكامل هو عبارة عن تكامل لدالة الجداء, و منه أحسن طريقة لحساب مثل هذا الشكل من التكاملات هي أستخدام التكامل بالتجزئة, و عليه

$$\int \mathrm{x}\cos x\,dt$$

$$f(x)=x,\quad alors\ f'(x)=1,$$

$$g'(x)=cosx,\quad alors\quad g(x)=sinx.$$

$$\begin{aligned}\int \mathrm{x}\cos x\,dx &= \int \mathrm{f(x)g'(x)}dx\\ &= f(x)g(x)\\ &-\int f'(x)g(x)dx\\ &= xsin(x)-\int 1\sin(x)\,dx = xsin(x)-\big(-con(x)\big)+c = xsin(x)+\cos(x)+c.\end{aligned}$$

التمرين الثاني

1) نقوم بكتابة الدالة الكسرية على شكل مجموع عوامل أولية الشكل $\frac{a}{x}+\frac{b}{x-3}$ بحيث a,bهما عددان حقيقيان يطلب تعيينهما.

و منه

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{x-3}=\frac{b(x)+a(x-3)}{(x)(x-3)}=\frac{bx+ax-3a}{(x)(x-3)}$$

$$=\frac{(a+b)x-3a}{(x)(x-3)}$$

نقوم الآن بمطابقة العلاقة الأخيرة مع الدالة الكسرية

$$\frac{1}{(x)(x-3)}=\frac{0x+1}{(x)(x-3)}$$

و منه

$$\begin{cases} a+b=0, \\ -3a=1. \end{cases}$$

و منه

$$\begin{cases} a=-b, \\ a=-\frac{1}{3}. \end{cases}$$

و منه

$$\begin{cases} a=-\frac{1}{3}, \\ b=\frac{1}{3}. \end{cases}$$

و منه يمكننا التفكيك و التحليل إلى مجموع عاملين أوليين كما هو موضح في العلاقة التالية

$$\frac{1}{(x)(x-3)}=-\frac{1}{3}\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\frac{1}{x-3}.$$

2) نحسب التكامل التالي

$$\int \frac{1}{e^x-3}dx.$$

أولا بوضع متغير جديد الذي يسمح لنا بحساب التكامل السابق بطريقة أبسط

نضع $t=e^x$

و منه $x=\ln(t)=\varphi(t).$

نشتق نجد

$$\frac{dx}{dt}=\frac{d\varphi(t)}{dt}=\frac{1}{t}.$$

و منه

$$dx=\frac{1}{t}dt.$$

بالتعويض في التكامل نجد

$$\int \frac{1}{e^x-3}dx=\int \frac{1}{t}\frac{1}{t-3}dt= \int (\frac{-1}{3}\frac{1}{t}+\frac{1}{3}\frac{1}{t-3})dt = \int (\frac{-1}{3}\frac{1}{t})dt+\int (\frac{1}{3}\frac{1}{t-3})dt$$
$$=\frac{-1}{3}\int \left(\frac{(t)'}{t}\right)dt+\frac{1}{3}\int \left(\frac{(t-3)'}{t-3}\right)dt=\frac{-1}{3}ln|t|+\frac{1}{3}ln|t-3|+c=\frac{1}{3}ln\left|\frac{t-3}{t}\right|+c.$$

و منه

$$\int \frac{1}{e^x-3}dx\int \frac{1}{t}\frac{1}{t-3}dt=\frac{1}{3}ln\left|\frac{t-3}{t}\right|+c=\frac{1}{3}ln\left|\frac{e^x-3}{e^x}\right|+c.$$

الفرض الثاني رقم 6

التمرين الأول

أحسب التكاملات التالية مع تحديد بدقة الطريقة و العلاقة المتبعة لحساب التكامل

$$\int \frac{(3x^2+2)}{x^3+2x-5}dx, \quad et \quad \int \frac{cosx}{1+sinx}dx, \qquad et \qquad \int \frac{e^x}{1+e^x}dx$$

$$\int (x+2cosx)dx$$

التمرين الثاني

بعد تعيين طريقة الحساب التكامل, أحسب التكاملات التالية

$$\int \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx, \qquad et \qquad \int e^x(cosx)dx$$

الإجابة

التمرين الأول

نحاول حساب ثلاث تكاملات الأولى و هذا بإستخدام نفس العلاقة و هي (تكامل مشتق الدالة على الدالة نفسها), و منه

$$\int \frac{(3x^2+2)}{x^3+2x-5}dx = \int \frac{(x^3+2x-5)'}{(x^3+2x-5)}dx = ln|x^3+2x-5|+c.$$

$$\int \frac{cosx}{1+sinx}dx = \int \frac{(1+sinx)'}{(1+sinx)}dx = ln|1+sinx|+c.$$

$$\int \frac{e^x}{1+e^x}dx = \int \frac{(1+e^x)'}{(1+e^x)}dx = ln|1+e^x|+c.$$

أما بالنسبة للتكامل الأخير فإننا نحاول أولا توزيع التكامل على المجموع, ثم نخرج العدد الثابت خارج التكامل ثم نقوم بحساب كل تكامل على حدى, كما هو موضح أسفله

$$\int (x+2cosx)dx = \int (x)dx + \int (2cosx)dx = \int (x)dx + 2\int (cosx)dx = \frac{1}{1+1}x^{1+1} + 2\sin(x) + c.$$

التمرين الثاني

نقوم بحساب التكامل الأول و هذا بإستخدام طريقة تبديل المتغير بحيث نضع $t=\sqrt{x}$

و منه $x=t^2=\varphi(t)$

و منه بإشتقاق الطرفين نجد $\frac{dx}{dt} = \frac{d\varphi(t)}{dt} = 2t$

و منه $dx=2tdt$

نعوض في التكامل فنجد

$$\int \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{1+t}{t}2tdt$$

$$= \int 2(1+t)dt = 2\int (1+t)dt = 2\int 1dt + 2\int tdt = 2t + 2\frac{1}{1+1}t^{1+1} + c$$

و منه

$$\int \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{1+t}{t}2tdt = 2t + 2\frac{1}{2}t^{1+1} + c = 2\sqrt{x} + (\sqrt{x})^2 + c = 2\sqrt{x} + x + c.$$

نتطرق الآن إلى حساب التكامل الثاني.

بما أن التكامل هو عبارة عن تكامل لجداء دالتين فإن أحسب طريقة لحسابه هي التكامل بالتجزئة.

$$\int e^x(cosx)dx$$

$$f(x) = e^x, \quad alors \quad f'(x) = e^x,$$

$$g'(x) = \cos(x), \quad alors \quad g(x) = \sin(x).$$

و منه

$$\int e^x(cosx)dx = \int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx = e^x\sin(x) - \int e^x\sin(x)dx.$$

نقوم بحساب التكامل بالتجزئة للمرة الثانية للدالة $\int e^x\sin(x)dx.$

$$f(x) = e^x, \quad alors \quad f'(x) = e^x,$$

$$g'(x) = \sin(x), \quad alors \quad g(x) = -\cos(x).$$

و منه

$$\int e^x(sinx)dx = \int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx = e^x(-\cos(x)) - \int e^x(-\cos(x))dx.$$

و منه

$$\int e^x(sinx)dx = -e^x cosx + \int e^x cosxdx.$$

بتعويض النتيجة الأولى و النتيجة الثانية في التكامل المراد حسابه نتحصل على العلاقة التالية

$$\begin{aligned} I = \int e^x(cosx)dx \\ &= e^x\sin(x) \\ &- \int e^x \sin(x)\, dx = e^x \sin(x) - \left(-e^x cosx + \int e^x cosxdx\right) \\ &= e^x \sin(x) + e^x cosx + \int e^x cosxdx = e^x sinx + e^x cosx - I. \end{aligned}$$

و منه

$$2I = 2\int e^x(cosx)dx = e^x sinx + e^x cosx.$$

و منه

$$I = \frac{1}{2}(e^x sinx + e^x cosx) + c.$$