Université Mohamed Khider Biskra.

Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Vie
Département d'Informatique

$2^{ème}$ Année Info (LMD).
Module: Méthodes Numériques
Ann Univ: 2021/2022.

SERIE DE TDN°02

SYSTEMES D'EQUATIONS LINEAIRES
(METHODES DIRECTES)

Exercice n°01: Appliquer la méthode de Cramer sur les systèmes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 5 & -4 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Exercice N°02: Utiliser la méthode de Gauss (avec ou sans pivot) pour résoudre les systèmes linéaires suivants:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 & = 0 \\ 6x_1 - 6x_2 + 10x_3 + 14x_4 & = 4 \\ -4x_1 + 18x_2 + 3x_3 - 2x_4 & = -3 \\ 4x_1 - 15x_2 + 28x_3 - 10x_4 & = -11 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_1 + 6x_3 + 2x_4 & = 6 \\ 8x_1 - 2x_3 - 2x_4 & = -2 \\ 2x_1 + 9x_2 + x_3 + 3x_4 & = -8 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 10x_4 & = -4 \end{cases}$$

Exercice n°03: On considère le système linéaire en dimension 4; $CX = d$, où:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \text{ et } d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1°/ La résolution de ce système peut être ramenée à celle d'un système de dimension 3. Quelle est l'inconnue x_j facile à déterminer. Donner cette inconnue et le système (3×3) restant, que l'on notera $Ax = b$.

2°/ Réaliser la factorisation LU de A.

3°/ Utiliser les matrices triangulaires L et U pour calculer A^{-1}.

Exercice n°04: On considère le système linéaire $Ax = b$ suivant:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2\alpha x_2 + 2x_3 & = 1 \\ 2\alpha x_1 + 2x_2 + \frac{2}{\alpha} x_3 & = 0 \\ 2x_1 + \frac{2}{\alpha} x_2 + 4x_3 & = 1 \end{cases}$$

1°/ Pour quelles valeurs du paramètre réel α, La matrice A admet la factorisation LU.

2°/ Pour $\alpha = 1$, Résoudre le système $Ax = b$ par la factorisation LU.

3°/ Donner l'interprétation matricielle de la méthode de Gauss par l'utilisation des matrices de Frobenius.

4°/ Montrer que: $b^{(3)} = L^{-1}b$.

Série de TD n°02

Exercice n°01 : On utilise la méthode de Cramer pour résoudre les systèmes linéaires :

- $\det(A) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} + & - & + \end{array} \\ \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \end{array} = 2\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

$= 2(-4) + (-2) + 2(2) = -6 \Rightarrow \det(A) = -6$

On a besoin aussi de calculer les déterminants :

- $D_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} + & - & + \end{array} \\ \begin{vmatrix} 6 & -1 & 2 \\ 8 & -1 & 3 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix} \end{array} = \begin{array}{ccccc} 6 & -1 & 2 & 6 & -1 \\ 8 & -1 & 3 & 8 & -1 \\ 6 & 1 & 1 & 6 & 1 \end{array} = (-6-18+16) - (-12+18-8)$

$= -8 + 2 = -6 \Rightarrow D_1 = -6$

- $D_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} + & - & + \end{array} \\ \begin{vmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 1 & 8 & 3 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} \end{array} = 2(-10) - 6(-2) + 2(-2)$

$= -20 + 12 - 4 = -12 \Rightarrow D_2 = -12$

- $D_3 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} + & - & + \end{array} \\ \begin{vmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 1 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} \end{array} = \begin{array}{ccccc} 2 & -1 & 6 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 8 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 6 & 1 & 1 \end{array} = (-12-8+6) - (-6+16-6)$

$= -14 - 4 = -18 \Rightarrow D_3 = -18$

Donc :
- $x = D_1 / \det(A) = -6/-6 = 1$
- $y = D_2 / \det(A) = -12/-6 = 2$; $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
- $z = D_3 / \det(A) = -18/-6) = 3$

- $\det(A) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} + & - & + \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 5 & -4 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} \end{array} = -8 - 3(20+12) = -8 - 96 = -104$

$\Rightarrow \det(A) = -104$

- $D_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} + & - & + \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} \end{array} = \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 & -4 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 4 \end{array} = (-8-12) - 12 = -32$

$\Rightarrow D_1 = -32$

$$\bullet\ D_2 = \begin{array}{c} \\ \begin{vmatrix} \overset{+}{1} & \overset{-}{1} & \overset{+}{-3} \\ 5 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \end{array} = 2 - 10 - 6 = -14 \Rightarrow D_2 = -14$$

$$\bullet\ D_3 = \begin{vmatrix} \overset{+}{1} & \overset{-}{0} & \overset{+}{1} \\ 5 & -4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 1 & 5 & -4 \\ 3 & 4 & 1 & 3 & 4 \end{matrix} = (-4+20) - (-12+4)$$

$$= 16 + 8 = 24 \Rightarrow D_3 = 24$$

Donc : $\bullet\ x = \dfrac{-32}{104} = \dfrac{4}{3}$ $\bullet\ y = \dfrac{-14}{-104} = \dfrac{7}{52}$ $\bullet\ z = \dfrac{-24}{104} = \dfrac{-3}{13}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/13 \\ 7/52 \\ -3/13 \end{pmatrix}$$

Exercice n° 02 : Ici, on utilise la méthode de Gauss :

• On a :

$$A^{(1)} = \begin{array}{c} 3 \\ -2 \\ 2 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 3 & 4 & 0 \\ 6 & -6 & 10 & 14 & 4 \\ -4 & 18 & 3 & -2 & -3 \\ 4 & -15 & 28 & -10 & -11 \end{array}\right) \rightarrow A^{(2)} = \begin{array}{c} \\ \\ 4 \\ -3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 12 & 9 & 6 & -3 \\ 0 & -9 & 22 & -18 & -11 \end{array}\right)$$

$$A^{(3)} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ 5 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -2 & -19 \\ 0 & 0 & 25 & -12 & 1 \end{array}\right) \rightarrow A^{(4)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -2 & -19 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 96 \end{array}\right)$$

Alors :

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -19 \\ 96 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \\ 5x_3 - 2x_4 = -19 \\ -2x_4 = 96 \end{cases}$$

$x_4 = -48$; $x_3 = -23$, $x_2 = 41$; $x_1 = 192$.

$$\begin{array}{c} \\ 8 \\ 2 \\ 2 \end{array} A^{(1)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 6 & 2 & 6 \\ 8 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 2 & 9 & 1 & 3 & -8 \\ 2 & 1 & -3 & 10 & -4 \end{array}\right) \longrightarrow A^{(2)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 6 & 2 & 6 \\ 0 & \boxed{0} & -50 & -18 & -50 \\ 0 & 9 & -11 & -1 & -20 \\ 0 & 1 & -15 & 6 & -16 \end{array}\right)$$

On remarque que : le deuxième pivot est nul ; donc, il faut utiliser la strategie de pivot partiel (On va faire une permutation entre la $2^{ème}$ et la $3^{ème}$ ligne).

$$\begin{array}{c} \\ \\ 0 \\ 1/9 \end{array} A^{(2)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 6 & 2 & 6 \\ 0 & 9 & -11 & -1 & -20 \\ 0 & 0 & -50 & -18 & -50 \\ 0 & 1 & -15 & 6 & -16 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{c} \\ \\ \\ \frac{62}{225} \end{array} A^{(3)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 6 & 2 & 6 \\ 0 & 9 & -11 & -1 & -20 \\ 0 & 0 & -50 & -18 & -50 \\ 0 & 0 & \frac{-124}{9} & \frac{55}{9} & \frac{-124}{9} \end{array}\right)$$

$$A^{(4)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 6 & 2 & 6 \\ 0 & 9 & -11 & -1 & -20 \\ 0 & 0 & -50 & -18 & -50 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2491}{225} & 0 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 9 & -11 & -1 \\ 0 & 0 & -50 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2491}{225} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -20 \\ -50 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + 6x_3 + 2x_4 = 6 \\ 9x_2 - 11x_3 - x_4 = -20 \\ -50x_3 - 18x_4 = -50 \\ \frac{2491}{225} x_4 = 0 \end{cases} \qquad x \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exercice n°03 : On a :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 0 & — (1) \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 1 & — (2) \\ 4x_3 = 11 & — (3) \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_4 = 0 & — (4) \end{cases}$$

1°/ Le x_j facile à déterminer est x_3

③ $\iff x_3 = 11/4$

Donc le nouveau système $Ax=b$:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_4 = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2°/ $$A^{(1)} = \begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \to A^{(2)} = \begin{array}{c} \\ \\ 3/2 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix} \to A^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -3/2 \end{pmatrix}$$

Alors : $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3/2 & 1 \end{pmatrix}$ et $U = A^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -3/2 \end{pmatrix}$

3°/ On a : $A^{-1} = (LU)^{-1} = U^{-1} L^{-1}$; où :

$L^{-1} = \dfrac{Com(L)}{det(L)}$; $det(L) = 1$ et $U^{-1} = \dfrac{Com(U)}{det(U)}$; $det(U) = 3$

Donc : $L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3/2 & 1 \end{pmatrix}$ et $U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$

Enfin : $A^{-1} = U^{-1} L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3/2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2/3 \end{pmatrix}$$

Exercice n°04: 1°/ Dma $A=\begin{pmatrix}4 & 2\alpha & 2\\ 2\alpha & 2 & 2/\alpha\\ 2 & 2/\alpha & 4\end{pmatrix}$

- $|4|\neq 0$
- $\begin{vmatrix}4 & 2\alpha\\ 2\alpha & 2\end{vmatrix}\neq 0 \Leftrightarrow 8-4\alpha^2\neq 0 \Leftrightarrow \alpha^2\neq 2 \Leftrightarrow \alpha=\pm\sqrt{2}$
- $\det(A)=|A|=4\left(8-\frac{4}{\alpha^2}\right)-2\alpha\left(8\alpha-\frac{4}{\alpha}\right)+2(4-4)\neq 0$

$4\left(\frac{8\alpha^2-4}{\alpha^2}\right)-2\alpha\left(\frac{8\alpha^2-4}{\alpha}\right)\neq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{8\alpha^2-4}{\alpha}\right)\left(\frac{4}{\alpha}-2\alpha\right)\neq 0$

$\Leftrightarrow \frac{(8\alpha^2-4)(4-2\alpha^2)}{\alpha^2}\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha^2\neq 0\\ 8\alpha^2-4\neq 0\\ 4-2\alpha^2\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha\neq 0\\ \alpha\neq\pm\sqrt{1/2}\\ \alpha\neq\pm\sqrt{2}\end{cases}$

2°/ Si $\underline{\alpha=1}$: $A=\begin{pmatrix}4 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 4\end{pmatrix}$

$A^{(1)}=\begin{matrix}\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{matrix}\begin{pmatrix}4 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 4\end{pmatrix} \rightarrow A^{(2)}=\begin{pmatrix}4 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix} \rightarrow A^{(3)}=\begin{pmatrix}4 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}=U$

et $L=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ \frac{1}{2} & 1 & 0\\ \frac{1}{2} & 1 & 1\end{pmatrix}$. $Ax=b \Leftrightarrow L.\underbrace{Ux}_{y}=b \Leftrightarrow \begin{cases}① \ Ly=b\\ ② \ Ux=y.\end{cases}$

① $Ly=b \Leftrightarrow \begin{cases}y_1=1\\ \frac{1}{2}y_1+y_2=0\\ \frac{1}{2}y_1+y_2+y_3=1\end{cases} \Leftrightarrow y=\begin{pmatrix}1\\ -1/2\\ 1\end{pmatrix}$.

② $Ux=y \Leftrightarrow \begin{cases}4x_1+2x_2+2x_3=1\\ x_2+x_3=-1/2\\ 2x_3=1\end{cases} \Leftrightarrow x=\begin{pmatrix}1/2\\ -1\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

2°/ **Remarque :** On peut trouver L et U par l'utilisation des matrices de Frobenius.

$$U = M^{(2)} M^{(1)} A \text{ ; où } M^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } M^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

• $$U = M^{(2)} M^{(1)} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

• $$L = \left(M^{(1)}\right)^{-1} \left(M^{(2)}\right)^{-1} \text{ ; } \left(M^{(1)}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \left(M^{(2)}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3°/ D'après la méthode de Gauss : $A^{(3)} x = b^{(3)}$; où $U = A^{(3)}$.

On a $LUx = b \Leftrightarrow LA^{(3)}x = b \Leftrightarrow Lb^{(3)} = b \Leftrightarrow b^{(3)} = L^{-1}.b$