Université Mohamed Khider, Biskra 2021/2022
Faculté des Sc. Exactes et Sc. de la Nature et la Vie
Département de Mathématiques
Master 1:

Solution de l'exercice 1 de la série N°3

Exercice 1 *Une étude de sociologie porte sur le temps passé par des enfants, âgés de* 8 *à* 16 *ans, sur des jeux électroniques. La question est de savoir si le temps moyen par jour est de* 7 *heures. On a demandé à* 15 *enfants leurs nombres d'heures de jeu par jour et les réponses sont les suivantes:*

$$5 \quad 9 \quad 5 \quad 8 \quad 7 \quad 6 \quad 7 \quad 9 \quad 7 \quad 9 \quad 6 \quad 9 \quad 10 \quad 9 \quad 8$$

1. *En supposant que ce temps est normalement distribué, avec une variance égale à* 3, *que conclut-on au niveau de signification* 5% ?
2. *Répondre à la même question si la variance était inconnue.*

****

Solution. 1) Le cas variance connue $\sigma^2 = 3$. Il s'agit d'un test bilatéral:

$$\begin{cases} H_0: & \mu = 7 \\ H_1: & \mu \neq 7 \end{cases}$$

D'après le cours la région critique est de la forme

$$W := \left\{ (x_1, ..., x_{15}) \in \mathbb{R}^+ : |\overline{x} - 7| \geq k \right\},$$

avec $\mathbf{P}_{\mu=7}\left(\left|\overline{X} - 7\right| \geq k\right) = \alpha = 0.05$. En d'autres termes

$$\mathbf{P}_{\mu=7}\left(\left|\frac{\overline{X} - 7}{\sqrt{3/15}}\right| \geq \frac{k}{\sqrt{3/15}}\right) = 0.05,$$

ce qui est équivalent à $\mathbf{P}\left(|Z| \geq \sqrt{5}k\right) = 0.05$. Ceci implique que

$$\sqrt{5}k = \Phi^{-1}(1 - 0.05/2) = 1.96,$$

ainsi $k = 1.96/\sqrt{5} = 0.876$. La fonction test statistique est donc

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{si } |\overline{x} - 7| \geq 0.876 \\ 0 & \text{si } |\overline{x} - 7| < 0.876 \end{cases}.$$

Application: nous avons

$$\overline{x} = \frac{1}{15}(5 + 9 + 5 + 8 + 7 + 6 + 7 + 9 + 7 + 9 + 6 + 9 + 10 + 9 + 8) = 7.6.$$

Comme $|7.6 - 7| = 0.6 < 0.876$, alors en garde H_0, c'est à dire le temps passé par des enfants, âgés de 8 à 16 ans, sur des jeux électroniques est en effet de 7 heures.

2. **Le cas variance inconnue.** D'après le cours, la région critique est de la forme

$$W := \left\{(x_1,..., x_{15}) \in \mathbb{R}^+ : \left|\frac{\overline{x}-7}{\widetilde{s}/\sqrt{15-1}}\right| \geq t_{1-0.05/2}\right\},$$

où $\widetilde{s} = \sqrt{\frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15}(x_i - \overline{x})^2}$ (la variance empirique observée) et $t_{1-0.05/2}$ est le quantile d'ordre $1 - 0.05/2 = 0.975$ de loi de student à $15 - 1 = 14$ degrè de liberté. De la table statistique en tire $t_{1-0.05/2} = 2.144$. La fonction test statistique est donc

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{si } \left|\frac{\overline{x}-7}{\widetilde{s}/\sqrt{15-1}}\right| \geq 2.144 \\ 0 & \text{si } \left|\frac{\overline{x}-7}{\widetilde{s}/\sqrt{15-1}}\right| < 2.144 \end{cases}.$$

Application: nous avons $\widetilde{s}^2 = \frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15}(x_i - 7.6)^2 = 2.722$ qui donne $\widetilde{s} = 1.65$. Comme $\left|\frac{7.6-7}{1.65/\sqrt{15-1}}\right| = 1.3606 < 2.144$, alors on garde oncore une fois l'hypothèse nulle H_0.