Chapitre V

Loi de comportement en élasticité linéaire

V-1- Définition

La loi de comportement est la manière dont le matériau s'oppose à la sollicitation. Cette loi dépend du point du matériau considéré, de la direction, de la température et du temps. Elle exprime la relation entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations.

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\varepsilon_{hk}\ , x, T, t)$$

V-2- Loi de comportement du solide élastique linéaire

Pour qu'un corps ait un comportement élastique linéaire il faudra qu'en tout point du matériau et pour une température donnée, un état de contrainte ne provoque qu'un seul état de déformation et que la loi de comportement locale soit inversible.

(Elasticité linéaire = linéarité géométrique + linéarité physique)

Cette loi s'écrit dans un repère orthonormé sous la forme suivante :

$\sigma_{ij} = C_{ijhk}\ \varepsilon_{hk}$ ou $\{\sigma\}=[C]\ \{\varepsilon\}$ [C] : matrice de rigidité

$\varepsilon_{ij} = S_{ijhk}\ \sigma_{hk}$ ou $\{\varepsilon\}=[S]\ \{\sigma\}$ [S] : matrice de souplesse

σ_{ij} et ε_{hk} sont des tenseurs d'ordre deux comportant chacun neuf (09) composantes. Donc le tenseur C_{ijhk} (ou S_{ijhk}) est un tenseur d'ordre 04 comportant 81 composantes.

Les tenseurs σ_{ij} et ε_{hk} étant symétriques, donc ils comportent chacun six composantes.

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_{hk} = \varepsilon_{kh}$$

Donc $C_{ijhk} = C_{jihk}$ et $C_{ijhk} = C_{jikh}$

Le tenseur C_{ijhk} comportera que 36 composantes.

$$\begin{pmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ \sigma_{23}\\ \sigma_{13}\\ \sigma_{12}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1113} & C_{1112}\\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2213} & C_{2212}\\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3313} & C_{3312}\\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2323} & C_{2313} & C_{2312}\\ C_{1311} & C_{1322} & C_{1333} & C_{1323} & C_{1313} & C_{1312}\\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1223} & C_{1213} & C_{1212}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{33}\\ \varepsilon_{23}\\ \varepsilon_{13}\\ \varepsilon_{12}\end{pmatrix}$$

Tenant compte de considérations énergétiques relatives à l'énergie de déformation, le tenseur de rigidité C (ou S) est symétrique : donc $C_{ijhk} = C_{hkij}$

Donc dans ce cas le tenseur de rigidité ne nécessite que vingt et un (21) composantes indépendantes :

$$\begin{pmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ \sigma_{23}\\ \sigma_{13}\\ \sigma_{12}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1113} & C_{1112}\\ & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2213} & C_{2212}\\ & & C_{3333} & C_{3323} & C_{3313} & C_{3312}\\ & & & C_{2323} & C_{2313} & C_{2312}\\ & \text{Sym} & & & C_{1313} & C_{1312}\\ & & & & & C_{1212}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{33}\\ \varepsilon_{23}\\ \varepsilon_{13}\\ \varepsilon_{12}\end{pmatrix}$$

Un milieu qui nécessite 21 composantes indépendantes est dit un milieu élastique linéaire anisotrope.

Remarque :

L'énergie de déformation élastique W est définie par : $\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij}$

En élasticité linéaire :

$$\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij} = C_{ijhk} \cdot \varepsilon_{ij}$$

avec $W = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\Sigma \cdot \mathscr{E}) = \frac{1}{2}\sigma_{ij} \cdot \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}C_{ijhk} \cdot \varepsilon_{hk} \cdot \varepsilon_{ij}$

V-3- Elasticité orthotrope :

Un matériau est dit orthotrope pour une propriété donnée, si cette propriété st invariante par changement de direction obtenu par symétrie relative à deux plans orthogonaux.

L'intersection des trois plans d'orthotropie définit les trois axes principaux d'orthotropie.

Pour un matériau orthotrope le tenseur de rigidité [C] (ou de souplesse [S]) ne possède que neuf (9) composantes indépendantes : 03 modules de tension (E_1 , E_2 , E_3)

03 modules de cisaillement (G_{12} , G_{13} , G_{23})

03 coefficients de contraction (ν_{12} , ν_{13} , ν_{23})

La loi de comportement s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/E_3 & -\nu_{12}/E_1 & -\nu_{13}/E_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{21}/E_2 & 1/E_2 & -\nu_{23}/E_2 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{31}/E_3 & -\nu_{32}/E_3 & 1/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2G_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2G_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}$$

La symétrie du tenseur [S] implique les relations suivantes :

$$\frac{\nu_{12}}{E_1}=\frac{\nu_{21}}{E_2} \qquad \frac{\nu_{13}}{E_1}=\frac{\nu_{31}}{E_3} \qquad \frac{\nu_{23}}{E_2}=\frac{\nu_{32}}{E_3}$$

V-4- Elasticité isotrope :

Un matériau est dit isotrope si tout axe est un axe de symétrie. Dans ce cas il nécessite deux (2) composantes indépendantes : E , ν

La loi de Hooke généralisée

$$\mathscr{E}=\frac{1+\nu}{E}\,\Sigma - \frac{\nu}{E}\,s\,I \qquad \text{ou} \qquad \varepsilon_{ij}=\frac{1+\nu}{E}\,\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\,\sigma_{kk}\,\delta_{ij} \qquad s = tr(\Sigma)$$

$$\Sigma = 2\mu\,\mathscr{E} + \lambda\, e\, I \qquad \text{ou} \qquad \sigma_{ij} = 2\mu\,\varepsilon_{ij} + \lambda\,\varepsilon_{kk}\,\delta_{ij} \qquad e = tr(\mathscr{E})$$

$$\lambda=\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \qquad \mu=\frac{E}{2(1+\nu)}=G$$

[(λ , μ) coefficients de Lamé]

V-5-Elasticité à isotropie transverse :

Un matériau est élastique à isotropie transverse si ses propriétés d'élasticité sont identiques pour tous les couples de directions symétriques par rapport à un axe. Si l'axe d'isotropie transverse est x_1, le matériau est 'isotrope' dans tous les plans normaux à x_1.

Par rapport au cas orthotrope, on ajoute les égalités suivantes :

$$E_1 = E_L \quad , \qquad E_2 = E_3 = E_T$$

$$G_{12} = G_{13} = G_{LT}$$

$$\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{LT} \quad , \quad \nu_{23} = \nu_{TT}$$

Remarque : $G_{23} = G_{TT} = E_{LT}/2(1+\nu_{LT})$

Donc le matériau est caractérisé par cinq (5) composantes indépendantes : E_L , E_T , G_{LT} , ν_{LT} , ν_{TT}

La loi de comportement s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/E_L & -\nu_{LT}/E_T & -\nu_{LT}/E_T & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{LT}/E_T & 1/E_T & -\nu_{LT}/E_T & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{LT}/E_T & -\nu_{LT}/E_T & 1/E_T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/(2G_{TT}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/(2G_{LT}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/(2G_{LT}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}$$