Chapitre VII

Résolution des problèmes d'élasticité linéaire

VII-1 Problèmes d'élasticité linéaire

Soit un domaine (D) de volume (V) et de frontière (S), le problème d'élasticité linéaire (élastostatique) consiste à déterminer un état élastique [Σ , U] en tout point de (D) correspondant aux forces de volume (f) dan (D) et vérifiant les conditions aux limites sur (S).

Les inconnues (15) : $\Sigma\,(6)$, $\mathscr{E}\,(6)$, $U\,(3)$

Les équations (15) : Loi de Hooke (6)

$$\mathscr{E} = \frac{1+\nu}{E}\Sigma - \frac{\nu}{E} s\, I \qquad \text{ou} \qquad \Sigma = 2\mu\,\mathscr{E} + \lambda\, e\, I$$

Relations déformations - déplacements (6)

$$\mathscr{E} = \frac{1}{2}[\mathrm{Grad}(U) + \mathrm{Grad}(U)^T]$$

(ou les équations de compatibilité)

Equations d'équilibre (3)

$$\vec{f} + \mathrm{div}(\Sigma) = \vec{0}$$

Les conditions aux limites : il existe deux types :

(a) Champs de forces surfaciques imposées sur S_σ : $\vec{t}\,(P, \vec{n}) = \Sigma \cdot \vec{n}$

(b) Champs de déplacements imposés sur S_u : $\vec{u}(P) = \vec{u}_0$

VII-2 Méthodes de résolution

a) Méthode des déplacements :

Dans cette méthode les inconnues sont les déplacements U(3). Elle est utilisée dans le cas de champ de déplacement imposé. On doit vérifier dans ce cas les trois équations d'équilibre :

$$\vec{f} + \mathrm{div}(\Sigma) = \vec{0}$$

En utilisant la loi de Hooke et les relations déformations - déplacements on obtient les trois **équations de Navier** (ou Lamé-Navier) :

$$\vec{f}+(\lambda+2\mu)\,\overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\,\vec{U}) - \mu\,\overrightarrow{\text{rot}}\,(\text{rot}\,\vec{U}) = \vec{0}$$

b) Méthode des forces :

Dans cette méthode les inconnues sont les contraintes $\Sigma(6)$. Elle est utilisée dans le cas de champ de contraintes imposé. On doit vérifier dans ce cas les six équations de compatibilité :

$$\text{grad}\,\overrightarrow{\text{div}}\,(\mathscr{E}) + \text{grad}^t\,\overrightarrow{\text{div}}\,(\mathscr{E}) - \text{grad grad}\,(\text{tr}(\mathscr{E})) - \Delta\mathscr{E} = 0$$

En utilisant la loi de Hooke et les équations d'équilibre on obtient les six **équations de Beltrami** :

$$\text{grad}\,\vec{f} + \text{grad}^t\,\vec{f} + \frac{\nu}{1-\nu}(\,\text{div}\,\vec{f}\,)\,I + \Delta\Sigma + \frac{1}{1+\nu}\,\text{grad}\,\overrightarrow{\text{grad}}\,(\text{tr}(\Sigma)) = 0$$

VII-3 Problèmes d'élasticité linéaire plane

Les forces de volume, les déplacements imposés, les charges appliquées sont supposés indépendants de x_3.et parallèles aux plan (x_1 , x_2).

a) Déformations planes

$$\mathscr{E} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \varepsilon_{33} = 0 \\ \sigma_{33} \neq 0 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{33} &= \frac{1+\upsilon}{E}\sigma_{33} - \frac{\upsilon}{E}(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}) = 0 \\ \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{1+\upsilon}{E}\sigma_{11} - \frac{\upsilon}{E}(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}) \\ \varepsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \frac{1+\upsilon}{E}\sigma_{22} - \frac{\upsilon}{E}(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}) \implies \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2}(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}) = \frac{1+\upsilon}{E}\sigma_{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{33} &= \nu[\sigma_{11}+\sigma_{22}] \\ \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{1+\upsilon}{E}[(1-\upsilon)\sigma_{11} - \upsilon\sigma_{22}] \\ \varepsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \frac{1+\upsilon}{E}[(1-\upsilon)\sigma_{22} - \upsilon\sigma_{11}] \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2}(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}) = \frac{1+\upsilon}{E}\sigma_{12} \end{aligned}$$

Il suffit donc de trouver **(σ_{11} , σ_{22} , σ_{12})** pour résoudre le problème d'élasticité en déformation plane.

Il faut trois équations : une équation de Beltrami et deux équations d'équilibre :

$$\Delta(\sigma_{11}+\sigma_{22})+\frac{1}{1-\nu}\,\mathrm{div}(\vec{f})=0$$
$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2}+f_1=0 \qquad \text{avec} \quad \Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$
$$\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2}+f_2=0$$

b) Contraintes planes

$$\Sigma=\begin{pmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & 0\\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \qquad \mathscr{E}=\begin{pmatrix}\varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0\\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_{33}\end{pmatrix} \qquad \begin{matrix}\sigma_{33}=0\\ \varepsilon_{33}\neq 0\end{matrix}$$

$$\varepsilon_{11}=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}=\frac{1+\upsilon}{E}\sigma_{11}-\frac{\upsilon}{E}(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33})$$
$$\varepsilon_{22}=\frac{\partial u_2}{\partial x_2}=\frac{1+\upsilon}{E}\sigma_{22}-\frac{\upsilon}{E}(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33})$$
$$\sigma_{33}=\frac{1+\upsilon}{E}\sigma_{33}-\frac{\upsilon}{E}(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33})$$
$$\varepsilon_{12}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)=\frac{1+\upsilon}{E}\sigma_{12}$$

===>

$$\varepsilon_{11}=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}=\frac{1}{E}(\sigma_{11}-\upsilon\sigma_{22}]$$
$$\varepsilon_{22}=\frac{\partial u_2}{\partial x_2}=\frac{1}{E}(\sigma_{22}-\upsilon\sigma_{11})$$
$$\varepsilon_{33}=\frac{\partial u_3}{\partial x_3}=-\frac{\nu}{E}(\sigma_{11}+\sigma_{22})$$
$$\varepsilon_{12}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)=\frac{1+\upsilon}{E}\sigma_{12}$$

Il suffit donc de trouver **(σ_{11} , σ_{22} , σ_{12})** pour résoudre le problème d'élasticité en déformation plane.
Il faut trois équations : une équation de Beltrami et deux équations d'équilibre :

$$\Delta(\sigma_{11}+\sigma_{22})+(1+\nu)\mathrm{div}(\vec{f})=0$$
$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2}+f_1=0 \qquad \text{avec} \quad \Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$
$$\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2}+f_2=0$$

VII-4 Solution par la fonction d'Airy (élasticité linéaire plane)

Lorsque le champ des forces de volume (f) dérive d'un potentiel (V) ($\vec{f}=-\overrightarrow{\mathrm{grad}V}$) , la détermination des trois inconnues peut se ramener à la recherche d'une fonction $\phi(x_1,x_2)$, dite fonction de contrainte ou fonction d'Airy, dans le cas de déformation plane comme le cas de contrainte plane.

$$\sigma_{11}=\frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2}+V \qquad \sigma_{22}=\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2}+V \qquad \sigma_{12}=-\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1\partial x_2}$$

ϕ : fonction de contrainte ou fonction d'Airy

Les deux équations d'équilibre sont automatiquement vérifiées tandis que l'équation de Beltrami donne :

En déformation plane : $\Delta\Delta\phi=-\frac{1-2\upsilon}{1-\upsilon}\,\Delta V$

En contrainte plane : $\Delta\Delta\phi=-(1-\upsilon)\,\Delta V$

Avec $\Delta\Delta\phi=\frac{\partial^4\phi}{\partial x_1^4}+2\frac{\partial^4\phi}{\partial x_1^2\partial x_2^2}+\frac{\partial^4\phi}{\partial x_2^4}$ et $\Delta V=\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2}$

Remarque : cas de forces de volume nulles

Dans le cas des forces de volume nulles ou constantes ($\Delta V=0$) on obtient la même équation pour le cas de déformation plane et le cas de contrainte plane :

$$\Delta\Delta\Phi=0$$

Les étapes de résolution seront alors :

- choisir la fonction d'Airy $\phi(x_1,x_2)$ qui vérifie l'équation ($\Delta\Delta\Phi=0$) et les condition aux limites en contraintes imposées sur S_σ .

- déterminer les déformations en fonction de $\phi(x_1,x_2)$.

- déterminer les déplacements par intégration :

$$u_1=\int\varepsilon_{11}\,dx_1 +F(x_2) \qquad \text{et} \qquad u_2=\int\varepsilon_{22}\,dx_2 +G(x_1)$$

- déterminer les fonctions $F(x_2)$ et $G(x_1)$ en utilisant les conditions aux limites en déplacements imposés :

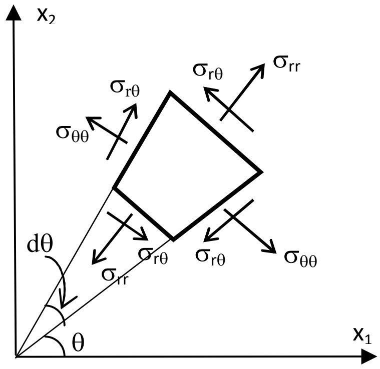
$$\varepsilon_{12}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)=-\frac{1+\upsilon}{E}\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1\partial x_2}$$

VII-5 Utilisation des coordonnées cylindriques

$$x_1 = r\cos(\theta) \qquad x_2 = r\sin(\theta) \qquad x_3 = x_3$$

et

$$U = \begin{cases} u_1 = u_1(r,\theta) \\ u_2 = u_2(r,\theta) \\ u_3 = 0 \end{cases}$$



$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_1}{\partial r} \quad ; \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_1}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_2}{\partial \theta}$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_1}{\partial \theta} + \frac{\partial u_2}{\partial r} - \frac{u_2}{r}$$

a) Déformations planes

$$\mathscr{E} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} & \varepsilon_{r\theta} & 0 \\ \varepsilon_{r\theta} & \varepsilon_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & 0 \\ \sigma_{r\theta} & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_{33} = 0$$
$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})$$

$$\Delta(\sigma_{rr} + +\sigma_{\theta\theta}) + \frac{1}{1-\nu}\operatorname{div}(\vec{f}) = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial x_\theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + f_r = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2}{r}\sigma_{r\theta} + f_\theta = 0$$

avec

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}$$

$$\operatorname{div}(\vec{f}) = \frac{\partial f_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f_\theta}{\partial \theta} + \frac{f_r}{r}$$

b) Contraintes planes

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & 0 \\ \sigma_{r\theta} & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathscr{E} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} & \varepsilon_{r\theta} & 0 \\ \varepsilon_{r\theta} & \varepsilon_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{33} = 0$$
$$\varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})$$

$$\Delta(\sigma_{rr} + +\sigma_{\theta\theta}) + (1+\nu)\operatorname{div}(\vec{f}) = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial x_\theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + f_r = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2}{r}\sigma_{r\theta} + f_\theta = 0$$

avec

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}$$

$$\operatorname{div}(\vec{f}) = \frac{\partial f_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f_\theta}{\partial \theta} + \frac{f_r}{r}$$

Fonction d'Airy : $\Phi(r,\theta)$

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \quad ; \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \quad ; \quad \sigma_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta}$$