حل تمارين سلسلة 03 .
رياضيات

حل التمرين 01 :

1) $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = c = f'(x_0) \Leftarrow$ إذا f

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2 \cos \frac{1}{x} - 0}{x - 0}$

$= \lim\limits_{x \to 0} x \cos \frac{1}{x}$

نبحث عن $\lim\limits_{x \to a} f(x).g(x)$

اذا كانت $f(x)$ دالة محدودة

و الدالة $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$

فإن جداء الدالتين :

$f(x) \cdot g(x) \xrightarrow{\text{يؤول}} 0$

$x \longrightarrow a$

الدالة : $-1 \leq \cos \frac{1}{x} \leq 1$

و $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$

ومنه :

$\lim\limits_{x \to 0} x \cos \frac{1}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0 = f'(0)$.

ومنه :

f دالة قابلة للاشتقاق عند $x_0 = 0$ و بما أن f ق. إ فهي مستمرة .

2) $f(x) = \begin{cases} x \cos \frac{1}{x} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x \cos \frac{1}{x} - 0}{x - 0}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \cos \frac{1}{x}$

$= \infty$

بما أن النهاية لا تساوي ثابتا

فإن الدالة غير قابلة للاشتقاق

* ندرس الاستمرارية :

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \overset{??}{=} f(x_0)$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} x \cos \frac{1}{x}$

$= 0$

حسب ما سبق .

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$

ومنه f مستمرة عند 0 :

حل التمرين 02 :

* حساب المشتق :

1/ $f(x) = (x+2)^3 (3x-1)^2$

$D_f = \mathbb{R}$

و f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

$(f^n)' = n.f'.f^{n-1}$

$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f g'$

حل التمرين 4

1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1+x}} = \frac{0}{0}$

نستخدم نظرية لوبيتال

$\lim \frac{f}{g} = \lim \frac{f'}{g'}$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1+x}}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\frac{-2x}{2\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{2\sqrt{1+x}}}$

$= \frac{1}{-\frac{1}{2}}$

$= \boxed{-2}$

2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\sin^2 x} = \frac{0}{0}$

نظرية لوبيتال :

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{2\cos x \sin x} = \frac{0}{0}$

نستخدم أيضا نظرية لوبيتال

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{2(1+x^2)-2x(2x)}{(1+x^2)^2}}{2(-\sin x \sin x + \cos x \cos x)}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{-2x^2+2}{(1+x^2)^2}}{2(-\underbrace{\sin^2 x}_{0} + \underbrace{\cos^2 x}_{1})}$

$= \lim \frac{\frac{2}{1}}{2}$

$= \boxed{1}$

$f'(x) = \cancel{3(x+2)^2 \times 2 \times 3x}$

$f'(x) = 3(x+2)^2(3x-1)^2 + (x+2)^3 \times 2 \times 3 \times (3x-1)$

$= 3(x+2)^2(3x-1)^2 + 6(x+2)^3(3x-1)$

2) $g(x) = \frac{3x-2}{x^2-1}$.

$D_g = \mathbb{R}$.

g دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$.

$g'(x) = \frac{3(x^2-1)-2x(3x-2)}{(x^2-1)^2}$

$h(x) = \frac{1-\ln x}{1+\sqrt{x}}$

$D_h =]0, +\infty[$.

h قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

$(\ln f)' = \frac{f'}{f}$.

$(\sqrt{f})' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$.

$h'(x) = \frac{-\frac{1}{x}(1+\sqrt{x}) - \frac{1}{2\sqrt{x}}(1-\ln x)}{(1+\sqrt{x})^2}$

3) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = \dfrac{0}{0}$

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\frac{1}{x}}{1} = \boxed{1}$

4) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \dfrac{0}{0}$.

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1}$

$= \boxed{\dfrac{1}{2}}$.

5) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3-5x-4}{x+1} = \dfrac{0}{0}$.

$= \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{3x^2-5}{1}$

$= \boxed{-2}$.

3