حل تمارين سلسلة رقم 02

رياضيات 1

حل التمرين 02:

حساب النهايات:

$$1-\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+1}=\frac{0}{0}\ \text{(ح.ع.ت)}$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{\cancel{(x+1)}(x-1)}{\cancel{(x+1)}}$$

$$=\lim_{x\to -1}(x-1)$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+1}=\boxed{-2}$$

$$2-\lim_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x^2-1}=\frac{0}{0}\ \text{(ح.ع.ت)}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^5-1}{(x+1)(x-1)}$$

باستخدام القسمة الاقليدية:

$$\begin{array}{r|l}
x^5-1 & x-1 \\ \hline
-\ x^5-x^4 & x^4+x^3+x^2+x+1 \\
x^4-1 & \\
-\ x^4-x^3 & \\
x^3-1 & \\
-\ x^3-x^2 & \\
x^2-1 & \\
-\ x^2-x & \\
x-1 & \\
-\ x-1 & \\
0 &
\end{array}$$

ومنه

$$x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$$

أو نستخدم القانون:

$$(a^n-b^n)=(a-b)(a^{n-1}b^0+a^{n-2}b^1+\dots+a^0b^{n-1}).$$

نجد نفس النتيجة بتعويض

$$a=x,\ b=1,\ n=5$$

وبالتالي:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^5-1}{(x+1)(x-1)}=\cancel{\lim (x-1)(x^4+x^3+x}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x^4+x^3+x^2+x+1)}{(x+1)\cancel{(x-1)}}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^4+x^3+x^2+x+1}{x+1}$$

$$=\boxed{\frac{5}{2}}$$

$$3-\lim_{x\to +\infty}\frac{2x^2-3x+1}{x^2+1}=\lim_{x\to +\infty}\frac{2\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}$$

$$=\boxed{2}$$

$$6-\lim_{x\to +\infty}\sqrt{x^2+1}-x=+\infty-\infty\ \text{(ح.ع.ت)}$$

بالضرب في المرافق نجد:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{(\sqrt{x^2+1}+x)}$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$=\frac{1}{\infty}$$

$$=\boxed{0}$$

حل التمرين 03:

* دراسة الاستمرارية عند 0:

1- $f(x) = \begin{cases} \sin x & ; x \leq 0 \\ x\ln x & ; x > 0. \end{cases}$

نقول أن الدالة مستمرة عند نقطة x_0 اذا تحقق مايلي:

$$\lim_{x \to x_0^{<}} f(x) = \lim_{x \to x_0^{>}} f(x) = f(x_0)$$

الدالة $\sin x$ مستمرة على مجال تعريفها،

$$\lim_{x \to 0^{<}} f(x) = \lim_{x \to 0} \sin x = \boxed{0}$$

الدالة $x\ln x$ مستمرة على مجال تعريفها:

$$\lim_{x \to 0^{>}} f(x) = \lim_{x \to 0} x\ln x = \boxed{0}$$

$$f(0) = \sin(0) = \boxed{0}.$$

ومنه:

$$\lim_{x \to 0^{<}} f(x) = \lim_{x \to 0^{>}} f(x) = f(0)$$

وبالتالي:

f مستمرة عند 0.

2- $g(x) = \begin{cases} 2x & ; x \leq 0. \\ 2x+1 & ; x > 0. \end{cases}$

الدالة $(2x)$ مستمرة على مجال تعريفها

$$\lim_{x \to 0^{<}} g(x) = \lim_{x \to 0} 2x = \boxed{0}.$$

الدالة $(2x+1)$ مستمرة على مجال تعريفها

$$\lim_{x \to 0^{>}} g(x) = \lim_{x \to 0} 2x+1 = \boxed{1}$$

$$\lim_{x \to 0^{<}} g(x) \neq \lim_{x \to 0^{>}} g(x).$$

ومنه g ليست مستمرة عند 0.

حل التمرين 04:

* دراسة استمرارية الدوال:

1- $f(x) = \dfrac{\sin x}{x^2+1}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2+1 \neq 0\}.$

$\Rightarrow D_f = \mathbb{R}.$

الدالة $\sin x$ مستمرة على $\mathbb{R}$.

" " x^2+1 " $\mathbb{R}$.

ومنه حاصل القسمة دالة مستمرة على $\mathbb{R}$.

3- $h(x) = \dfrac{x+2}{x^2-3x+2}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2-3x+2 \neq 0\}$

$\Delta = 1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

$D_f =]-\infty, 1[\cup]1, 2[\cup]2, +\infty[$
$= \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}.$

ومنه الدالة مستمرة على مجال تعريفها $\mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$.

حل التمرين 05:

* اثبات أن المعادلات تقبل على الأقل حل حقيقي:

نظرية القيم المتوسطة:

اذا كانت f دالة مستمرة على المجال $[a, b]$ و $f(a) \cdot f(b) < 0$

ومنه يوجد على الأقل حل c

$c \in]a, b[$

حيث $f(c) = 0$

$1- f(x) = x^5 - 4x^2 + 1$

f دالة معرفة على IR فإنها مستمرة على IR اذن مستمرة على أي مجال من IR

f دالة مستمرة على $[0,1]$

$f(0) = \boxed{1}$, $f(1) = \boxed{-2}$

ومنه $f(0).f(1) < 0$

اذن يوجد على الأقل حل c :

$c \in]0,1[$

و $f(c) = 0$

$3- x^2 - 3\cos x + 2 = 0.$

f معرفة و مستمرة على IR

ومنه f مستمرة على مجال من IR

f مستمرة على $[0, \pi]$.

$f(0) = \boxed{-1}.$

$f(\pi) = \boxed{\pi^2 + 5} > 0.$

$\Rightarrow f(0).f(\pi) < 0.$

ومنه يوجد على الأقل حل c :

$c \in]0, \pi[.$

$f(c) = 0.$ حيث

حل التمرين 06

* دراسة قابلية الاشتقاق عند 0:

نقول أن f قابلة للاشتقاق عند x_0 اذا تحقق ما يلي:

$$\lim_{x \overset{<}{\to} x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \overset{>}{\to} x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = c = f'(x_0).$$

$$1- f(x) = \frac{x}{1+|x|}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+x} \; ; & x \geq 0 \\ \dfrac{x}{1-x} \; ; & x < 0. \end{cases}$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{\frac{x}{1+x} - 0}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x(1+x)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{1+x} = \boxed{1}.$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{\frac{x}{1-x} - 0}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x(1-x)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{1-x} = \boxed{1}.$$

ومنه $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

وبالتالي f قابلة للاشتقاق عند 0

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{x\sqrt{-x} - 0}{x}$$

$$= \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \sqrt{-x}$$

$$= \boxed{0}$$

ومنه h قابلة للاشتقاق عند 0.

2- $g(x) = (x+1)\,|\ln(x+1)|$.

$$= \begin{cases} (x+1)\ln(x+1) & ; x \geq 0 \\ -(x+1)\ln(x+1) & ; x < 0. \end{cases}$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{-(x+1)\ln(x+1)}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{-x\ln(x+1)}{x} - \frac{\ln(x+1)}{x} \right).$$

$$= \lim_{x \overset{<}{\to} 0} (-\ln(x+1)) - \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{\ln(x+1)}{x}$$

$$= 0 - 1.$$

$$= \boxed{-1}.$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{(x+1)\ln(x+1)}{x}$$

$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \ln(x+1) + \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{\ln(x+1)}{x}$$

$$= 0 + 1.$$

$$= \boxed{1}.$$

ومنه:

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \neq \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0}$$

وبالتالي g غير قابلة للاشتقاق عند 0.

3- $h(x) = x\sqrt{|x|}$.

$$h(x) = \begin{cases} x\sqrt{x} & ; x \geq 0. \\ x\sqrt{-x} & ; x < 0. \end{cases}$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{x\sqrt{x} - 0}{x}$$

$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \sqrt{x}$$

$$= \boxed{0}$$