2021/03/02

التصحيح النموذجي

(0.1 ج 11 نقاط)

التمرين 01

$A =]-\infty, 2]$

لدينا $\forall x \in A : x \leq 2$ (0,25)

ومنه A محدودة من الأعلى بالعدد 2 (0,25)

$\sup A = 2$ (0,5), $\max A = 2$ (0,5)

A غير محدودة من الأسفل لأن: (0,25)

$\inf A =$ غير موجود (0,25), $\min A =$ غير موجود (0,25)

$$B = \left\{ x = \frac{1}{2} + \frac{n}{2n+1} \;/\; n \in \mathbb{N} \right\}$$

$n = 0 \longrightarrow x = \frac{1}{2}$ (0,25)

$n = 1 \longrightarrow x = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$

$\vdots$

$n \to +\infty \longrightarrow x \longrightarrow 1$

$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{n}{2n+1} \right) = 1$ (0,25)

$B = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \dots, 1 \right[$ (0,25)

$\forall x \in B, \quad \frac{1}{2} \leq x < 1$ (0,25)

Scanné avec CamScanner

$\inf B = \frac{1}{2}$ و $\min B = \frac{1}{2}$

$\sup B = 1$ و $\max B$ غير موجود

التمرين 02

1) $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+x}} = \left(\frac{0}{0}\right)$ ت.ع.ح

بتطبيق لوبيتال:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+x}} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{2\sqrt{1+x}}}$$

$$= -2$$

2) $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\sin^2 x} = \left(\frac{0}{0}\right)$ ت.ع.ح

بتطبيق لوبيتال:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\sin^2 x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{2\sin x \cos x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2x}{(1+x^2)(2\sin x \cos x)} = \left(\frac{0}{0}\right)$$ ت.ع.ح

بتطبيق لوبيتال مرة أخرى

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2}{(4x \sin x \cos x + (1+x^2)(2\cos^2 - 2\sin^2 x))}$$

$$= 1$$

التمرين 03 :

① دراسة الاستمرارية على $\mathbb{R}$:

* على $\mathbb{R}^*$:

الدالة $x \mapsto x^2+1$ دالة مستمرة على $\mathbb{R}$ و $\mathbb{R}^*$ لأنها كثير حدود

الدالة $\sqrt{x}$ الدالة الجذرية مستمرة على $\mathbb{R}_+$

ومنه الدالة $\sqrt{x^2+1}$ مستمرة على $\mathbb{R}$ و $\mathbb{R}^*$ لأنها تركيب دالتين مستمرتين

ومنه الدالة $\sqrt{x^2+1}-1$ مستمرة على $\mathbb{R}$ و $\mathbb{R}^*$ لأنها الفرق بين الدالة المستمرة على $\mathbb{R}$ ومجموع دالتين مستمرتين على $\mathbb{R}^*$

الدالة $\frac{1}{x}$ الدالة الناطقة مستمرة على $\mathbb{R}^*$.

إذن الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}^*$ و $\mathbb{R}^*$ لأنها جداء دالتين مستمرتين على $\mathbb{R}^*$ و $\mathbb{R}^*$

* عند النقطة 0 :

$$\lim_{x \to 0} f(x) \overset{?}{=} f(0)$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} \right) = \left(\frac{0}{0} \right)$$ حالة عدم التعيين

بالضرب في المرافق نجد :

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{x^2+1}-1)(\sqrt{x^2+1}+1)}{x(\sqrt{x^2+1}+1)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x(\sqrt{x^2+1}+1)} = 0 = f(0)$$

Scanné avec CamScanner

إذن f مستمرة على $\mathbb{R}$

② دراسة قابلية الاشتقاق على $\mathbb{R}$:

* على $\mathbb{R}^*$:

الدالة $x \mapsto x^2+1$ دالة كثير حدود.

الدالة $x \mapsto \sqrt{x}$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$.

الدالة $x \mapsto x^2+1$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

ومنه الدالة $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها تركيب دالتين قابلتين للاشتقاق.

ومنه $f : x \mapsto \sqrt{x^2+1}-1$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق.

الدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$، الدالة الناطقة

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ لأنها عبارة عن مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق.

* عند النقطة 0 :

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

نضرب في المرافق

Scanné avec CamScanner

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{x^2+1}-1)(\sqrt{x^2+1}+1)}{x^2(\sqrt{x^2+1}+1)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x^2(\sqrt{x^2+1}+1)} = \frac{0}{2} = \frac{1}{2}$$

(3) ... f ... R_0 ... f ... $x=1$ ...

... f ...

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2\sqrt{x^2+1}-2}{x^2} & , x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & , x = 0 \end{cases}$$

Scanné avec CamScanner

كلية العلوم الاقتصادية و التجارية و علوم التسيير

قسم الجذع المشترك السنة الأولى
رياضيات 1

التاريخ: 02 مارس 2021
المدة : ساعة واحدة

الامتحان النهائي

التمرين 01 : (04 نقاط) أوجد الحد الأعلى و الأدنى و العنصر الأكبر و الأصغر للمجموعات التالية إن وجد :

$$B=\left\{x=\frac{1}{2}+\frac{n}{2n+1}, n\epsilon N\right\},\quad A=]-\infty,-2],$$

التمرين 02 : (04 نقاط) باستعمال قاعدة لوبيتال أحسب النهايات التالية :

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}} \qquad 2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{\sin^2 x}$$

التمرين 03 : (12 نقاط) لتكن الدالة f المعرفة على R كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}, & \text{si}\quad x\neq 0\\ 0, & \text{si}\quad x=0\end{cases}$$

1) أدرس استمرارية الدالة f على R ,

2) أدرس قابلية إشتقاق الدالة f على R ,

3) أحسب مشتق الدالة f ,

Scanné avec CamScanner