Analyse T4, TD n° 5 / Vendredi 14 octobre 2016

Transformation de Laplace

Pierre-Jean Hormière

La transformation de Laplace est, avec la transformation de Fourier, l'une des plus importantes transformations intégrales. Elle intervient dans de nombreuses questions de physique mathématique, de calcul des probabilités, d'automatique, etc., mais elle joue aussi un grand rôle en analyse classique. Elle porte très légitimement le nom de Pierre-Simon Laplace (1749-1827), surnommé le « Newton français », éphémère ministre de l'intérieur de Napoléon Bonaparte, qui avait commencé ses travaux dès les années 1770, sous l'Ancien régime. En effet, Laplace a souligné l'intérêt de présenter la plupart des fonctions, des suites, des sommes partielles et restes de séries usuelles sous forme intégrale, afin d'en obtenir des développements. Sous l'influence de Liouville, le hongrois Joseph Petzval (1807-1891) fut le premier à étudier la transformation de Laplace en tant que telle, et ses applications aux équations différentielles linéaires. Plus tard, l'ingénieur britannique Oliver Heaviside (1850-1925) a inventé le calcul symbolique afin de résoudre des équations différentielles et intégrales. Laurent Schwartz (1915-2002) a étendu la transformation de Laplace aux distributions, permettant de mieux comprendre et étayer le calcul symbolique.

1. <u>Définition, abscisse de convergence</u>.

Définition : Soit f : $[0, +\infty[$ ou $]0, +\infty[\to \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ une fonction continue par morceaux sur tout segment. On appelle **transformée de Laplace** de f la fonction de variable réelle ou complexe :

$$F(p) = \mathfrak{L}f(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}.f(t).dt .$$

Soit f : **R** $\to$ **R** ou **C** une fonction continue par morceaux sur tout segment. On appelle **transformée de Laplace** de f la fonction de variable réelle ou complexe :

$$F(p) = \mathfrak{L} f\,(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-pt}.f(t)H(t).dt \;=\; \int_{0}^{+\infty} e^{-pt}.f(t).dt\,.$$

où H(t) est la fonction de Heaviside définie par H(t) = 0 pour t < 0, 1 pour t > 0.

La fonction f(t) est appelée <u>original</u>, <u>fonction objet</u>, ou <u>fonction causale</u>. La fonction F(p) est appelée <u>image</u> de f(t). On note f(t)] F(p) cette correspondance.
La variable de F est traditionnellement notée p en France et en Allemagne, s dans les pays anglo-saxons…

Se posent naturellement les problèmes suivants :

- En quels points la fonction F est-elle définie ?
- Quelles sont ses propriétés à l'intérieur de son domaine de définition ?
- Quelles sont ses propriétés au bord de ce domaine ?
- Quelles sont les propriétés algébriques, différentielles et intégrales, de la transformation de Laplace $\mathfrak{L} : f \to F$?
- Peut-on remonter de F à f ? Autrement dit, y a-t-il une transformée de Laplace inverse ?

Notons D(f) l'ensemble des complexes $p = a + ib$ tels que la fonction t $\to$ $e^{-pt} f(t)$ est intégrable sur]0, +∞[, c'est-à-dire $\int_{0}^{+\infty} e^{-pt}.f(t).dt$ est absolument convergente.
D(f) est appelé **domaine d'absolue convergence** de la transformée de Laplace.
Comme $|e^{-pt} f(t)| = e^{-at}\,|\,f(t)\,|$, $p \in D(f) \Leftrightarrow a = \mathrm{Re}(p) \in D(f)$.

De plus, si $p \in D(f)$, alors pour tout $a' > a$, $e^{-a't} f(t)$ est intégrable.

On en déduit que l'ensemble D(f) est de l'une des quatre formes suivantes :

$$\varnothing \;,\; \mathbf{C} \;,\; \{\, p \,;\, \mathrm{Re}\, p \in \,]A, +\infty[\,\} \;\text{ ou }\; \{\, p \,;\, \mathrm{Re}\, p \in [A, +\infty[\,\}.$$

Le réel A = a(f) est appelé **abscisse d'absolue convergence** de la transformée de Laplace.
On convient que A = +∞ si D(f) = ∅ , A = –∞ si D(f) = **C**.

<u>**Exemples**</u> :

1) Si $f(t) = \exp(t^2)$, D(f) = ∅, car t $\to$ $e^{-pt}\, e^{t^2}$ n'est jamais intégrable.

2) Si f(t) = 0 ou si $f(t) = \exp(-t^2)$, D(f) = **C**, car t $\to$ $e^{-pt} f(t)$ est toujours intégrable.

3) Si f(t) = 1 ou H(t), D(f) = { p ; Re p > 0 } et $\mathfrak{L}(1)(p) = \mathfrak{L}(H)(p) = \int_{0}^{+\infty} e^{-pt}.dt \;=\; \frac{1}{p}$.

4) Si $f(t) = e^{at}$ ou e^{at} H(t), D(f) = { p ; Re p > a } et

$$\mathfrak{L}(\,e^{at}\,)(p) = \mathfrak{L}(\,e^{at}\,H(t))(p) = \int_{0}^{+\infty} e^{(a-p)t}.dt \;=\; \frac{1}{p-a}\,.$$

5) Si $f(t) = \frac{1}{t^2+1}$, D(f) = { p ; Re $p \geq 0$ }.

6) Si $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$, D($f$) = { p ; Re p > 0 }.

La proposition suivante donne une condition suffisante pour qu'une fonction f ait une transformée de Laplace :

Proposition : Soit f :]0, +∞[$\to$ **R** ou **C** continue par morceaux sur tout segment.
Si l'intégrale $\int_{0}^{1} |f(t)|.dt$ converge, et si $\exists(M, \gamma, A)\;\; \forall t \geq A\;\; |\,f(t)\,| \leq M\,e^{\gamma t}$, D(f) est non vide.
La fonction f est dite <u>d'ordre exponentiel</u> si elle vérifie cette dernière condition.

2. Propriétés générales.

Dans la suite, on utilise librement la notation abusive $F(p) = \mathcal{L}(f(t))(p)$ pour $f(t)$] $F(p)$.
La variable p est supposée réelle.

Proposition 1 : linéarité.
Si $D(f)$ et $D(g)$ sont non vides, $D(\alpha.f + \beta.g)$ est non vide et, sur $D(f) \cap D(g)$:

$$\mathcal{L}(\ \alpha.f + \beta.g\ )(p) = \alpha.\mathcal{L}(f)(p) + \beta.\mathcal{L}(g)(p).$$

Proposition 2 : translation.
Si $D(f)$ est non vide, pour tout α, $D(\ e^{-\alpha t} f(t)\ )$ est non vide et $\mathcal{L}(\ e^{-\alpha t} f(t)\ )(p) = (\mathcal{L} f\ )(p + \alpha)$.

Preuve : $\mathcal{L}(\ e^{-\alpha t} f(t)\ )(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} e^{-\alpha t} f(t).dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p+\alpha)t} f(t).dt = (\mathcal{L} f\ )(p + \alpha)$.

Proposition 3 : retard.
Si $D(f)$ est non vide, $a > 0$, $g(t) = f(t - a)$ pour $t > a$ pour $t < a$, et

$$\mathcal{L}(\ f(t-a)\ )(p) = e^{-ap}\,(\mathcal{L} f\ )(p)\ .$$

Preuve : $\mathcal{L}(\ g\ )(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} g(t).dt = \int_0^{a} e^{-pt} g(t).dt + \int_a^{+\infty} e^{-pt} g(t).dt = \int_a^{+\infty} e^{-pt} f(t-a).dt$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-p(u+a)} f(u).du = e^{-ap}\,(\mathcal{L} f\ )(p).$$

Proposition 4 : changement d'échelle.

Si $D(f)$ est non vide, $D(f(at))$ est non vide pour tout $a > 0$, et $\mathcal{L}(\ f(at))(p) = \frac{1}{a}(\mathcal{L} f)(\frac{p}{a})$.

Preuve : $\mathcal{L}(\ f(at))(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(at).dt = \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} e^{-pu/a} f(u).du = \frac{1}{a}(\mathcal{L} f\ )(\frac{p}{a})$.

Proposition 5 : dérivée de l'image.
Si $D(f)$ est non vide, la fonction $\mathcal{L} f = F$ est de classe C^{∞} sur l'intervalle $]a(f), +\infty[$, et

$$\mathcal{L}(\ t^n f(t))(p) = (-1)^n F^{(n)}(p).$$

Preuve : Ici, la variable p est supposée réelle.
Soit $p > a(f)$. Choisissons b tel que $a(f) < b < p$.
La fonction $e^{-bt}|f(t)|$ est intégrable sur $]0, +\infty[$. Comme $t^n e^{-pt}|f(t)| = O(\ e^{-bt}|f(t)|\ )$ au $V(+\infty)$, chacune des fonctions $t^n e^{-pt} f(t)$ est intégrable.
Le théorème de dérivation des intégrales à paramètres s'applique :

- Chaque fonction $t \to t^n e^{-pt} f(t)$ est continue par morceaux et intégrable ;
- Chaque fonction $p \to t^n e^{-pt} f(t)$ est continue ;
- Pour $p \geq b > a(f)$, $t^n e^{-pt}|f(t)| \leq M\,e^{-bt}|f(t)|$, majorante intégrable. Cqfd.

Corollaire : Si $f(t)$ est à valeurs réelles positives, $F(p)$ est positive, décroissante, convexe, et complètement monotone, en ce sens que sa dérivée n-ème est du signe de $(-1)^n$.

Proposition 5 : image de la dérivée.
Si f est C^1 sur $\mathbf{R}_+$, alors $\mathcal{L}(f')(p) = p\,F(p) - f(0)$.
Si f est C^2 sur $\mathbf{R}_+$, alors $\mathcal{L}(f'')(p) = p^2\,F(p) - p\,f(0) - f'(0)$.
Si f est C^n sur $\mathbf{R}_+$, alors

$$\mathcal{L}(f^{(n)})(p) = p^n F(p) - (\ p^{n-1} f(0) + p^{n-2} f'(0) + \dots + p\,f^{(n-2)}(0) + f^{(n-1)}(0)\ ).$$

Preuve : Il suffit d'intégrer par parties.

Proposition 6 : image de l'intégrale.

Si D(f) est non vide et si f est continue par morceaux $\mathfrak{L}\left(\int_0^t f(u).du\right)(p) = \dfrac{F(p)}{p}$.

Proposition 7 : convolution.

Soient f et g deux fonctions continues $[0, +\infty[\to \mathbf{C}$, d'ordre exponentiel, leur produit de convolution $f * g$, défini par $\forall x \geq 0 \quad (f * g)(x) = \int_0^x f(x-t).g(t).dt$.

est continue, d'ordre exponentiel, et $\mathfrak{L}(f * g)(x)(p) = \mathfrak{L}(f)(p).\mathfrak{L}(g)(p)$.

Preuve : le schéma de la preuve, basé sur les intégrales doubles, est le suivant :

$$\mathfrak{L}(f * g)(x)(p) = \int_0^{+\infty} e^{-px}(f*g)(x).dx = \int_0^{+\infty} e^{-px}\left(\int_0^x f(x-t).g(t).dt\right).dx$$

$$= \iint_\Delta f(x-t)g(t)e^{-px}.dt.dx = \iint_\Delta f(x-t)g(t)e^{-p(x-t)}e^{-pt}.dt.dx$$

$$= \iint_\Delta f(x-t)g(t)e^{-p(x-t)}e^{-pt}.dx.dt = \int_0^{+\infty}\left(\int_t^{+\infty} f(x-t)g(t)e^{-p(x-t)}e^{-pt}.dx\right).dt$$

$$= \int_0^{+\infty}\left(\int_t^{+\infty} f(x-t)e^{-p(x-t)}.dx\right).g(t)e^{-pt}.dt = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} f(u)e^{-pu}.du\right).g(t)e^{-pt}.dt$$

$$= \int_0^{+\infty} F(p)g(t)e^{-pt}.dt = \mathrm{F}(p).\mathrm{G}(p) = \mathfrak{L}(f)(p).\mathfrak{L}(g)(p).$$

3. Valeur initiale, valeur finale.

Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ une fonction continue par morceaux. Supposons sa transformée de Laplace $\mathrm{F}(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t).dt$ définie pour $p > 0$, autrement dit $a(f) \leq 0$.

Nous nous proposons d'étudier le comportement asymptotique de F(p) quand $p \to +\infty$ et quand $p \to 0+$. Pour cela, observons que $p.\mathrm{F}(p) = p\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t).dt$, où $\int_0^{+\infty} pe^{-pt}.dt = 1$.

p.F(p) est la moyenne des valeurs f(t) prises par f, pondérées par les poids $p\,e^{-pt}$ dt .

3.1. Comportement de F(p) quand $p \to +\infty$.

Lorsque p tend vers $+\infty$, les poids $p\,e^{-pt}$ dt se concentrent au voisinage de 0+, de sorte que F(p) dépend de plus en plus des valeurs de f(t) au voisinage de 0+ à mesure que p augmente. Pour obtenir un équivalent ou un développement asymptotique de F(p) au V($+\infty$), il suffira de remplacer, dans F(p), $f(t)$ par son équivalent ou son développent asymptotique en 0+. C'est la **méthode de Laplace**, ou **propriété de la valeur initiale**.

Théorème de la valeur initiale.

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbf{C}$, continue par morceaux sur tout segment, vérifiant :

(L) $(\exists r) \quad f(s) = O(e^{rs})$ au V($+\infty$) .

F(p) est définie pour $p > r$, et $\lim_{p\to+\infty} p.\mathrm{F}(p) = \lim_{t\to0+} f(t)$.

On trouvera en exercices des applications et des généralisations de cet important résultat.

3.2. Comportement de F(p) quand $p \to 0+$.

Lorsque 0 est à l'intérieur de D(f), i.e. $a(f) < 0$, F(p) est développable en série entière en 0 et il n'y a pas de problème.

Si 0 est au bord de D(f), i.e. $a(f) = 0$, les poids $p\,e^{-pt}\,dt$ se répartissent de manière de plus en plus homogène à mesure que $p \to 0+$, de sorte que F(p) dépend de plus en plus des valeurs prises par f(t) en $+\infty$, ou, disons, de son comportement général moyen sur $\mathbf{R}^*_+$. C'est la **propriété de la valeur finale**.

Théorème de la valeur finale.

1) Si f est intégrable sur $\mathbf{R}^*_+$, alors $F = \mathfrak{L}(f)$ est définie pour $p \geq 0$, et continue en 0.

2) Si f est intégrable sur $]0, 1]$ et a une limite ω en $+\infty$, F(p) est définie pour $p > 0$ et

$$\lim_{p\to 0+} p.F(p) = \lim_{t\to+\infty} f(t) = \omega.$$

Preuve : laissée en exercice.

4. Table de transformées de Laplace usuelles.

De même qu'il existe des tables de primitives usuelles, des tables de développements limités usuels, il existe des tables de transformées de Fourier et des tables de transformées de Laplace de fonctions usuelles. Dans la table ci-dessous, il faudrait en toute rigueur indiquer les abscisses de convergence.

f(t)	$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t).dt$
1 ou H(t)	$\frac{1}{p}$
$e^{\alpha t}$ ou $e^{\alpha t}$ H(t)	$\frac{1}{p-\alpha}$
cos(ωt) sin(ωt)	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$ $\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
ch(ωt) sh(ωt)	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$ $\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$
t^n ou t^n H(t)	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$t^n\, e^{\alpha t}$ ou $t^n\, e^{\alpha t}$ H(t)	$\frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$

De cette table et des règles de calcul ci-dessus, on déduit que la transformation de Laplace induit un isomorphisme de l'espace vectoriel des exponentielles-polynômes, c'est-à-dire les combinaisons linéaires des fonctions $t^n e^{\alpha t}$ (α réel ou complexe), sur l'espace vectoriel des fractions rationnelles de degré < 0.

5. Transformée de Laplace inverse.

Si f(t) a pour transformée de Laplace F(p), $F = \mathfrak{L}\,f$, on écrit symboliquement $f = \mathfrak{L}^{-1}$ F et l'on dit que f est *une* transformée de Laplace inverse de F.

Attention, la transformation de Laplace n'est pas injective !

– D'une part, seules interviennent les valeurs prises par f(t) sur t > 0. Les fonctions 1 et H(t) ont même transformée de Laplace.

– D'autre part, deux fonctions qui diffèrent sur $\mathbf{R}^*_+$ peuvent avoir même image de Laplace. Une fonction nulle presque partout a une transformée de Laplace nulle.

Les fonctions $f(t) = e^{-2t}$ et $g(t) = 0$ pour $t = 5$, e^{-2t} pour $t \neq 5$, ont même transformée de Laplace : $(\mathcal{L} f)(p) = (\mathcal{L} g)(p) = \frac{1}{p+2}$.

Cependant, la transformation de Laplace est injective si on la restreint à certaines classes de fonctions : exponentielles-polynômes, théorème de Lerch...

6. <u>Introduction au calcul symbolique</u>.

Le calcul symbolique, ou calcul opérationnel, fut inventé par Heaviside pour résoudre notamment les équations et les systèmes différentiels linéaires, mais aussi certaines équations intégrales. Il établit un pont entre analyse et algèbre. Nous allons le développer sur quelques exemples.

<u>**Exemple 1**</u> : <u>Résoudre l'équation différentielle</u> $y'' + 3y' + 2y = t$, $y(0) = y'(0) = 0$.

C'est une équation différentielle linéaire à coefficients constants.
Notons $F(p) = (\mathcal{L} f)(p)$ la transformée de Laplace de y(t).

$$\mathcal{L}(y'' + 3y' + 2y)(p) = \mathcal{L}(t)(p)$$

$$p\,(p.F(p) - y(0)) - y'(0) + 3p\,(F(p) - y(0)) + 2\,F(p) = \frac{1}{p^2}$$

$$(p^2 + 3p + 2).F(p) - 4p\,y(0) - y'(0) = \frac{1}{p^2}$$

$$F(p) = \frac{1}{p^2(p^2+3p+2)} = \frac{1}{p^2(p+1)(p+2)} = \frac{1}{2}\frac{1}{p^2} - \frac{3}{4}\frac{1}{p} + \frac{1}{p+1} - \frac{1}{4}\frac{1}{p+2}.$$

La décomposition en éléments simples de la fraction permet de remonter à la fonction causale. $F(p)$ est transformée de Laplace de :

$$y(t) = \frac{1}{2}t - \frac{3}{4} + e^{-t} - \frac{1}{4}e^{-2t}.$$

Cette méthode fournit le résultat juste, mais elle pose des problèmes de rigueur.
<u>1er problème</u> : la solution y(t) a-t-elle une transformée de Laplace ?
Il faudrait montrer que les solutions des équations différentielles linéaires à coefficients constants et avec un second membre exponentielle-polynôme sont toutes dominées par $O(e^{Mt})$ pour un M convenable. C'est bien le cas, en effet.
<u>2ème problème</u> : il manque un argument d'unicité pour remonter de $F(p)$ à la source y(t).
Il faudrait démontrer que la transformation de Laplace $y(t) \to F(p)$ est injective sur une classe suffisamment vaste de fonctions (exponentielles-polynômes notamment).

<u>**Exemple 2**</u> : <u>Trouver la fonction *f* continue de **R** dans **R** vérifiant</u> :

$$\forall x \in \mathbf{R} \qquad f(x) = x^2 + \int_0^x \sin(x-t).f(t).dt \qquad \text{(E)}.$$

C'est une équation fonctionnelle de convolution, qui s'écrit : $f(x) = x^2 + (\sin * f)(x)$.

Notons $F(p) = (\mathcal{L} f)(p)$ la transformée de Laplace de $f(x)$.

Il vient $\quad F(p) = \frac{2}{p^3} + \frac{F(p)}{p^2+1}$, donc $\quad F(p) = \frac{2}{p^3} + \frac{2}{p^5}$.

$F(p)$ est la transformée de Laplace de $\quad f(x) = x^2 + \frac{1}{12}x^4$.

La réciproque est facile.
NB : On pourrait donner une solution directe plus rigoureuse et plus élémentaire.

En effet, (E) s'écrit : $\forall x \in \mathbf{R} \quad f(x) = x^2 + \sin x.\int_0^x \cos t.f(t).dt - \cos x.\int_0^x \sin t.f(t).dt$.

On en déduit que f est C^1 et, de proche en proche, C^∞. Si on la dérive deux fois, on tombe sur une équation différentielle…

7. Exercices corrigés.

Exercice 1 : **Calculs explicites de transformées de Laplace**.
Calculer les transformées de Laplace des fonctions suivantes :

$$H(t)\ ,\quad f(t) = 1 \text{ si } 0 \le t \le 1, 0 \text{ sinon}\ ,\quad t.H(t)\ ,\quad t^n.H(t)\ ,\quad e^{-\alpha t}H(t)$$

$$f(t) = \cos(\omega t).H(t)\ ,\quad f(t) = \sin(\omega t).H(t)\ ,\quad f(t) = t.\sin(\omega t).H(t)\ ,\quad f(t) = t.\cos(\omega t).H(t)$$

$$f(t) = \frac{\sin t}{t}.H(t)\ ,\quad f(t) = \text{sh}(\omega t).H(t)\ ,\quad f(t) = \text{ch}(\omega t).H(t)$$

$$f(t) = \sin\left(t - \frac{3\pi}{4}\right) \text{ si } t > \frac{3\pi}{4}\ ,\ 0 \text{ sinon.}$$

Solution : Dans ces solutions nous supposons la variable p réelle.

a) $F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}H(t).dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt}.dt = \frac{1}{p}$ pour $p > 0$.

b) $F(p) = \int_0^1 e^{-pt} f(t).dt = \int_0^1 e^{-pt}.dt = \frac{1-e^{-p}}{p}$ pour tout p.

On pourrait observer que $f(t) = H(t) - H(t-1)$ et utiliser linéarité et déplacement.
Plus généralement, considérons, pour tout $h > 0$, la fonction en escaliers :
$P_h(t) = \frac{1}{h}$ si $0 < t < h$, 0 sinon (les valeurs en 0 et h importent peu).

On a $P_h f(t) = \frac{1}{h}(\,H(t) - H(t-h)\,)$. Par linéarité et théorème du retard, $(\mathcal{L} P_h)(p) = \frac{1-e^{-hp}}{hp}$.

Si l'on fait tendre h vers 0+ dans cette formule, on obtient :

$$\boxed{\mathcal{L}\,\delta = 1\ ,\ \text{où } \delta \text{ est la distribution de Dirac …}}$$

Cela suppose que l'on étende la transformation de Laplace aux distributions de Schwartz.

c) $F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}tH(t).dt = \int_0^{+\infty} te^{-pt}.dt = \frac{1}{p^2}$ pour $p > 0$.

d) $F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}t^nH(t).dt = \int_0^{+\infty} t^ne^{-pt}.dt = \frac{n!}{p^{n+1}}$ pour $p > 0$ (chgt de var $pt = u$).

e) $F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}e^{-\alpha t}H(t).dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p+\alpha)t}.dt = \frac{1}{p+\alpha}$ pour $p > -\alpha$.

f) $\int_0^{+\infty} e^{-pt}e^{i\omega t}H(t).dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt}e^{i\omega t}.dt = \left.\frac{e^{(-p+i\omega)t}}{-p+i\omega}\right|_0^{+\infty} = \frac{1}{p-i\omega} = \frac{p+i\omega}{p^2+\omega^2}$ pour $p > 0$.

Donc $\int_0^{+\infty} e^{-pt}\cos(\omega t)H(t).dt = \frac{p}{p^2+\omega^2}$ et $\int_0^{+\infty} e^{-pt}\sin(\omega t)H(t).dt = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$.

Conséquence : par linéarité, la transformée de Laplace de $f(t) = 3.\sin 4t - 2.\cos 5t$
est $$F(p) = 3\frac{4}{p^2+16} - 2\frac{p}{p^2+25} = \frac{12}{p^2+16} - \frac{2p}{p^2+25}.$$

g) Par linéarité, $f(t) = \text{sh}(\omega t).H(t) = \frac{e^{\omega t}-e^{-\omega t}}{2}H(t)$ et $f(t) = \text{ch}(\omega t).H(t) = \frac{e^{\omega t}+e^{-\omega t}}{2}H(t)$
ont pour images respectives

$$F(p) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\omega} - \frac{1}{p+\omega}\right) = \frac{\omega}{p^2-\omega^2} \quad \text{et} \quad F(p) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\omega} + \frac{1}{p+\omega}\right) = \frac{p}{p^2-\omega^2}.$$

h) La fonction $f(t) = \sin(t - \frac{3\pi}{4})$ si $t > \frac{3\pi}{4}$, 0 sinon, n'est autre que

$$f(t) = \sin(t - \frac{3\pi}{4}).H(t - \frac{3\pi}{4}) .$$

On peut calculer sa transformée de Laplace directement, ou utiliser le théorème du retard :

$$F(p) = \mathfrak{L}(\sin t)(p + \frac{3\pi}{4}) = \frac{e^{-3\pi/4}}{p^2+1} .$$

Exercice 2 : Domaines de définition et calcul des transformées de Laplace des fonctions suivantes : $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$, $f(t) = t^{a-1}$ ($a > 0$) , $f(t) = \ln t$.

Solution : Ici, f est définie et continue sur $]0, +\infty[$.
Dans les trois cas, on montre que $D(f) =]0, +\infty[$. Le chgt de var $pt = u$ donne :

$$F(p) = \int_0^{+\infty}\frac{e^{-pt}}{\sqrt{t}}.dt = \frac{1}{\sqrt{p}}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}.du = \frac{1}{\sqrt{p}}\Gamma(1/2) = \sqrt{\frac{\pi}{p}} .$$

$F(p) = \int_0^{+\infty} t^{a-1}e^{-pt}.dt = \frac{1}{p^a}\int_0^{+\infty} u^{a-1}e^{-u}.du = \frac{1}{p^a}\Gamma(a)$, par définition de la fonction Γ.

$$F(p) = \int_0^{+\infty}\ln t.e^{-pt}.dt = \frac{1}{p}\int_0^{+\infty}\ln u.e^{-u}.du - \frac{\ln p}{p} = \frac{c-\ln p}{p} = \frac{-\gamma-\ln p}{p} ,$$

car la constante $c = \int_0^{+\infty}\ln u.e^{-u}.du$ se trouve être égale à $-\gamma$, où γ est la constante d'Euler.

Exercice 3 : Soit f une fonction T-périodique ($T > 0$), continue par morceaux sur tout segment. Montrer que $F(p) = \mathfrak{L}(f)(p)$ est définie pour tout $p > 0$ et que

$$F(p) = \frac{1}{1-e^{-pT}}\int_0^T e^{-pt} f(t).dt .$$

En déduire que : $\lim_{p\to 0+} p.F(p) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t).dt$.

Applications : Calculer les transformées de Laplace des fonctions suivantes :
a) La fonction f 2π-périodique définie par : $f(t) = \sin t$ si $0 < t < \pi$, $f(t) = 0$ si $\pi < t < 2\pi$.
b) La fonction $f(t) = |\sin t|$
c) La fonction f $2a$-périodique définie par $f(t) = 1$ si $0 < t < a$, -1 si $a < t < 2a$.

Solution : f est bornée sur **R**, donc pour tout $p > 0$, $e^{-pt} f(t)$ est intégrable.

$$F(p) = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_{nT}^{(n+1)T} e^{-pt} f(t).dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^T e^{-p(nT+u)} f(u).du = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-pnT}\int_0^T e^{-pu} f(u).du$$

$$= (\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-pnT}).\int_0^T e^{-pu} f(u).du = \frac{1}{1-e^{-pT}}\int_0^T e^{-pt} f(t).dt \quad \text{(somme d'une série géométrique).}$$

$p.F(p) = \frac{p}{1-e^{-pT}}\int_0^T e^{-pt} f(t).dt \to \frac{1}{T}\int_0^T f(t).dt$ quand $p \to 0+$.

On trouve $F(p) = \frac{1}{(1-e^{-\pi p})(p^2+1)}$, $F(p) = \frac{1}{p^2+1}\coth\frac{\pi p}{2}$, $F(p) = \frac{1}{p}\ln\frac{ap}{2}$.

Exercice 4 : Domaines de définition et calculs des transformées de Laplace de
a) $f(t) = [t]$ (partie entière) b) $f(t) = r^n$ si $n < t < n + 1$ ($r > 0$).

Solution : On trouvera resp.

D(f) =]0, +∞[et $F(p) = \dfrac{e^{-p}}{p(1-e^{-p})}$, D(f) =] ln r , +∞[et $F(p) = \dfrac{1-e^{-p}}{p}\,\dfrac{1}{1-re^{-p}}$.

Exercice 5 : Intégrale de Frullani.

Soient a et b des réels > 0, $f(t) = \dfrac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}$. Trouver la transformée de Laplace de f(t).

En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}.dt$.

Solution : résumée.

On trouve D(f) =] max($-a$, $-b$), + ∞[. On trouve $F(p) = \ln\dfrac{p+b}{p+a}$ (considérer F'(p))

Du coup, $F(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}.dt = \ln\frac{b}{a}$.

Exercice 6 : Pour $(n, \lambda) \in \mathbf{N}^*\times\mathbf{R}$, soit $f_{n,\lambda}$ définie par $f_{n,\lambda}(t) = \dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}.e^{\lambda t}$ si t > 0, 0 si t < 0.

Vérifier que $\forall(m, n) \in \mathbf{N}^*\times\mathbf{N}^* \quad \forall\lambda \in \mathbf{R} \quad f_{m,\lambda} * f_{n,\lambda} = f_{m+n,\lambda}$.

Calculer la transformée de Laplace de $f_{n,\lambda}(t)$, et vérifier que $\mathcal{L}(f_{m,\lambda} * f_{n,\lambda}) = \mathcal{L}(f_{m,\lambda}).\mathcal{L}(f_{n,\lambda})$.

Solution partielle : Si $F_{n,\lambda}$ est la transformée de Laplace de $f_{n,\lambda}$, $F_{n,\lambda}(p) = \dfrac{1}{(p-\lambda)^n}$

Exercice 7 : Calculs explicites de transformées de Laplace inverses.

Pour chacune des fonctions φ suivantes, trouver une fonction causale f telle que $\mathcal{L} f = \varphi$:

$$\varphi(p) = \frac{1}{(p+2)(p-1)} \ , \ \varphi(p) = \frac{p}{(p+1)(p^2+1)} \ , \ \varphi(p) = \frac{p^2+5}{p(p^2+4)} \ , \ \varphi(p) = \ln\frac{p^2+\alpha^2}{p^2} .$$

[Indication pour la dernière question : résoudre d'abord $\mathcal{L} g = \varphi'$].

Solution :

a) Décomposons en éléments simples $\varphi(p) = \dfrac{1}{(p+2)(p-1)} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{p-1} - \dfrac{1}{p+2}\right)$

a pour fonction causale $f(t) = \dfrac{1}{3}(e^t - e^{-2t}) = \dfrac{2}{3}\,e^{-t/2}\,\mathrm{sh}\dfrac{3t}{2} = \dfrac{2}{3}\,e^{-t/2}\,\mathrm{sh}\left(\dfrac{3t}{2}\right)$ H(t).

b) De même, $\varphi(p) = \dfrac{p}{(p+1)(p^2+1)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{p+1}{p^2+1} - \dfrac{1}{p+1}\right)$

a pour fonction causale $f(t) = \dfrac{1}{2}(\cos t + \sin t - e^{-t})$.

c) Enfin, $\varphi(p) = \dfrac{p^2+5}{p(p^2+4)} = \dfrac{5}{4}\,\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{4}\,\dfrac{p}{p^2+4}$

a pour fonction causale $f(t) = \dfrac{5}{4} - \dfrac{1}{4}\cos(2t)$.

d) La fonction $\varphi(p) = \ln\dfrac{p^2+\alpha^2}{p^2}$ n'est pas rationnelle, mais sa dérivée l'est.

$\varphi'(p) = -\dfrac{1}{2p} + \dfrac{2p}{p^2+a^2}$ a pour fonction causale $g(t) = -\dfrac{1}{2} + 2\cos(at)$.

$\varphi(p)$ a donc pour fonction causale $f(\mathrm{t}) = 2\dfrac{1-\cos(at)}{t}$.

Exercice 8 : Trouver une fonction causale f(t) ayant pour transformée de Laplace
$\varphi(p) = \dfrac{1}{(p+1)(p+2)(p+3)}$. Transformée de Laplace de f(t)/t ?

Solution : Après décomposition en éléments simples,
$\varphi(p) = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{p+1} - \dfrac{1}{p+2} + \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{p+3}$ est transformée de Laplace de $f(\mathrm{t}) = \dfrac{1}{2}\,e^{-t} - e^{-2t} + \dfrac{1}{2}\,e^{-3t}$.

g(t) = f(t)/t a pour transformée de Laplace $-\dfrac{1}{2}\ln(p+1) + \ln(p+2) - \dfrac{1}{2}\ln(p+3)$.

Passer par la dérivée…

Exercice 9 : On considère l'équation différentielle (1) $y'' + 2y' + y = \psi(t)$, $t \geq 0$.
1) On suppose $\psi(t) = \sin t$. Trouver la solution de (1) vérifiant $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.
2) On suppose $\psi(t) = e^{-t}$. Trouver la solution de (1) vérifiant $f(0) = 0$ et $f'(0) = 2$.

Solution :
Ce sont des équations différentielles linéaires à coefficients constants avec second membre.

1ère méthode : méthode classique.

L'équation caractéristique est $r^2 + 2r + 1 = (r+1)^2$ a une racine double, donc $(e^{-t}, \mathrm{t}\,e^{-t})$ est un système fondamental de solutions.

1) L'équation $f''(t) + 2f'(t) + f(t) = \sin t$, $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$
équivaut à $(f''(t) + 2f'(t) + f(t))\,e^{t} = e^{t}\sin t$, $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$

Posons $g(t) = f(t)\,e^{t}$. Alors $g''(t) = e^{t}\sin t$, $g(0) = 1$, $g'(0) = 1$.

Deux quadratures conduisent à $g(t) = \dfrac{3}{2}(t+1) - \dfrac{1}{2}\,e^{-t}\cos t$, puis $f(t) = \dfrac{3}{2}e^{-t}(t+1) - \dfrac{1}{2}\cos t$.

2) De même $f''(t) + 2f'(t) + f(t) = e^{-t}$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 2$

équivaut à $(f''(t) + 2f'(t) + f(t))\,e^{t} = 1$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 2$

Posons $g(t) = f(t)\,e^{t}$. Alors $g''(t) = 1$, $g(0) = 0$, $g'(0) = 2$.

Deux quadratures conduisent à $g(t) = \dfrac{t^2}{2} + 2t$, puis $f(t) = \left(\dfrac{t^2}{2} + 2t\right)e^{-t}$.

2ème méthode : calcul symbolique.

Notons F(p) la transformée de Laplace de f(t).
Alors $\mathcal{L}(f''(t) + 2f'(t) + f(t)) = (p^2 + 2p + 1)\,F(p) - (p+2)\,f(0) - f'(0)$.

1) L'équation $f''(t) + 2f'(t) + f(t) = \sin t$, $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$

conduit à $(p^2 + 2p + 1)\,F(p) - (p+2) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-pt}\sin t.dt = \frac{1}{p^2+1}$.

Donc $F(p) = \dfrac{1}{(p^2+1)(p+1)^2} + \dfrac{p+2}{(p+1)^2} = \dfrac{3}{2}\,\dfrac{1}{p+1} + \dfrac{3}{2}\,\dfrac{1}{(p+1)^2} - \dfrac{1}{2}\,\dfrac{p}{p^2+1}$

Il reste à revenir à f(t) au moyen des tables…

2) L'équation $f''(t) + 2f'(t) + f(t) = e^{-t}$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 2$

conduit à $(p^2 + 2p + 1)\,F(p) - 2 = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-pt}e^{t}.dt = \frac{1}{p+1}$.

Donc $F(p) = \frac{2}{(p+1)^2} + \frac{1}{(p+1)^3}$.

Il reste à revenir à f(t)…

Exercice 10 : En utilisant les propriétés de la transformée de Laplace, déterminer des fonctions causales vérifiant :

(1) $\forall t \geq 0 \quad \int_0^t e^{t-x} f(x).dx = \sin t$ (2) $\forall t \geq 0 \quad f(t) + \int_0^t e^{-x} f(t-x).dx = \cos t$.

Solution : Ce sont deux équations fonctionnelles intégrales.

1ère méthode : élémentaire.

Cherchons une fonction continue f de $\mathbf{R}_+$ (ou de $\mathbf{R}$) dans $\mathbf{R}$ vérifiant (1).

Alors $e^t \int_0^t e^{-x} f(x).dx = \sin t$, donc $\int_0^t e^{-x} f(x).dx = e^{-t} \sin t$.

Dérivons les deux membres ! $e^{-t} f(t) = e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t$, donc $f(t) = \cos t - \sin t$.

Réciproquement, cette fonction vérifie bien (1)

Cherchons une fonction continue f de $\mathbf{R}_+$ (ou de $\mathbf{R}$) dans $\mathbf{R}$ vérifiant (2).

Alors $f(t) + \int_0^t e^{-x} f(t-x).dx = f(t) + \int_0^t e^{-t+u} f(u).du = f(t) + e^{-t}\int_0^t e^{u} f(u).du = \cos t$.

Comme $t \rightarrow \int_0^t e^{u} f(u).du$ est C^1, f l'est aussi. Dérivons $e^t f(t) + \int_0^t e^{u} f(u).du = e^t \cos t$.

Il vient $e^t f(t) + e^t f'(t) + e^t f(t) = e^t \cos t - e^t \sin t$, donc $f'(t) + 2 f(t) = \cos t - \sin t$.

De plus, $f(0) = 1$. Cette équation différentielle a pour solution :

$$f(t) = \frac{2}{5}e^{-2t} + \frac{3}{5}\cos t - \frac{1}{5}\sin t.$$

Réciproquement, on vérifie que cette fonction satisfait (2)

2ème méthode : transformation de Laplace.

L'équation intégrale (1) est une équation de convolution, qui s'écrit $\exp * f = \sin$.

Appliquons la transformée de Laplace : $\mathcal{L}(\exp).\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(\sin)$

$$\frac{1}{p-1}.F(p) = \frac{1}{p^2+1}, \quad \text{donc } F(p) = \frac{p-1}{p^2+1}.$$

Remontant à la fonction causale, $f(t) = \cos t - \sin t$. La réciproque reste à faire…

L'équation intégrale (2) est une équation de convolution, qui s'écrit $f + \exp(-t) * f = \cos$.

Appliquons la transformée de Laplace : $\mathcal{L}(f) + \mathcal{L}(\exp(-t)).\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(\cos)$

$$F(p) + \frac{1}{p+1}.F(p) = \frac{p}{p^2+1}, \quad \text{donc } F(p) = \frac{p(p+1)}{(p+2)(p^2+1)} = \frac{1}{5}\left(\frac{2}{p+2} + \frac{3p-1}{p^2+1}\right).$$

Il reste à remonter à la fonction causale, et à montrer la réciproque.

Exercice 11 : Trouver les $f \in C(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ vérifiant $\forall x \in \mathbf{R} \quad f(x) = x + \int_0^x \cos(x-t).f(t).dt$.

Solution *:* Réponse : $\boxed{f(x) = x + 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} e^{x/2}.\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x) - e^{x/2}.\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x)}$.

On montre que f est C^∞ et vérifie : $f(0) = 0$, $f'(x) = 1 + f(x) - \int_0^x f(t)\sin(x-t).dt$, $f'(0) = 1$, et $f''(x) = f'(x) - \int_0^x f(t)\cos(x-t).dt = f''(x) - f'(x) + f(x) = x$.

```
> dsolve({diff(y(x),x,x)-diff(y(x),x)+y(x)=x,y(0)=0,D(y)(0)=1},y(x));
```