3.1 سلسلة التمارين رقم 4

تمرين 1 : .

1) نزود المجموعة $\mathbb{R}$ بقانون التركيب الداخلي $\bigstar$ المعرف كما يلي:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x \bigstar y = xy + \left(x^2 - 1\right)\left(y^2 - 1\right)$$

أثبت أن $\bigstar$ تبديلي وليس تجميعي وأن 1 هو العنصر الحيادي.

2) نزود المجموعة $\mathbb{R}_+^*$ بقانون التركيب الداخلي $\bigstar$ المعرف كما يلي:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^* : x \bigstar y = \sqrt{x^2 + y^2}$$

A) أثبت أن $\bigstar$ تبديلي و تجميعي وأن 0 هو العنصر الحيادي.

B) أثبت أنه لايوجد في $\mathbb{R}_+^*$ أي عنصر نظير بالنسبة للعملية $\bigstar$.

الحــل

1) نلاحظ أن

$$x \bigstar y = xy + (x^2 - 1)(y^2 - 1) = yx + (y^2 - 1)(x^2 - 1) = y \bigstar x$$

ومنه القانون $\bigstar$ تبديلي

لإثبات أن القانون ليس تجميعيا، يكفي العثور على x و y و z بحيث:

$$x \bigstar (y \bigstar z) \neq (x \bigstar y) \bigstar z$$

كما سنرى أدناه أن 1 هو العنصر الحيادي، ومنه يجب أن لا نأخذ 1 في إختيار العناصر x و y و z. نأخذ على سبيل المثال: $x = 0$ ، $y = 2$ و $z = 3$

$$\begin{aligned} x\bigstar(y\bigstar z) &= 0\bigstar(2\bigstar 3)\\ &= 0\bigstar(2\bigstar 3+(2^2-1)(3^2-1))\\ &= 0\bigstar(6+3\times 8)\\ &= 0\bigstar 30\\ &= 0\bigstar 30+(0^2-1)(30^2-1)=-899 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x\bigstar y)\bigstar z &= (0\bigstar 2)\bigstar 3\\ &= (0\times 2+(0^2-1)(2^2-1))\bigstar 3\\ &= (-3)\bigstar 3\\ &= -3\times 3+((-3)^2-1)(3^2-1)\\ &= -9+82\\ &= 55 \end{aligned}$$

القانون $\bigstar$ ليس تجميعيا.

$$1\bigstar x = 1x+(1^2-1)(x^2-1)=x$$

بالإضافة لذلك ، لأن القانون تبديلي فإن:

$$x\bigstar 1 = 1\bigstar x$$

لدينا $x\bigstar 1 = 1\bigstar x = x$، 1 **هو العنصر الحيادي.**

2) A) **لدينا**

$$x\bigstar y=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{y^2+x^2}=y\bigstar x$$

القانون $\bigstar$ تبديلي.

$$(x\bigstar y)\bigstar z=\sqrt{x^2+y^2}\bigstar z=\sqrt{(\sqrt{x^2+y^2})+z^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

بإعادة الحساب أعلاه عن طريق تغيير (x,y,z) بـ (y,z,x) نجد :

$$(y\bigstar z)\bigstar x=\sqrt{y^2+z^2+x^2}$$

لأن $\bigstar$ تبديلي، ومنه : القانون $\bigstar$ تجميعي.

$$(y\bigstar z)\bigstar x=x\bigstar(y\bigstar z)(x\bigstar y)\bigstar z=x\bigstar(y\bigstar z)$$

كان بإمكاننا الحساب مباشرة $x\bigstar(y\bigstar z)$ لأن $\bigstar$ تبديلي فإن 0 هو العنصر الحيادي.

$$0\bigstar x=\sqrt{0^2+x^2}=|x|=x, \qquad \text{لأن} \quad x\geq 0$$

$$0\bigstar x=x\bigstar 0$$

$$0\bigstar x=x\bigstar 0=x$$

$B)$ لنفترض أن x يقبل نظير y

$$x\bigstar y=0\Leftrightarrow\sqrt{x^2+y^2}=0\Leftrightarrow x^2+y^2=0\Leftrightarrow x=y=0$$

في حين $x>0$ و $y>0$ ومنه $x\bigstar y=0$ مستحيل من أجل كل $x>0$ أي x ليس له نظير.

تمرين 2 : ليكن $G=\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$ و $\bigstar$ القانون المعرف في G كما يلي:

$$(x,y)\bigstar(x',y')=(xx',xy'+y)$$

1) أثبت أن $(G,\bigstar)$ زمرة ليست تبديلية.

2) أثبت أن $(]0,+\infty[\times\mathbb{R},\bigstar)$ زمرة جزئية من $(G,\bigstar)$.

الحــل

$A-1$) إذا كان $x\neq 0$ و $x'\neq 0$ فإنه $xx'\neq 0$

$$(x,y)\bigstar(x',y')=(xx',xy'+y)\in\mathbb{R}^*\mathbb{R}.$$

القانون $\bigstar$ هو قانون تركيب داخلي.

$$\begin{aligned}(x,y)\bigstar((x',y')*(x'',y'')) &= (x,y)*(x'x'',x'y''+y')\\ &= (xx'x'',x(x'y''+y')+y)\\ &= (xx'x'',xx'y''+xy'+y)\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}((x,y)\bigstar(x',y'))\bigstar(x'',y'') &= (xx',xy'+y)*(x'',y'')\\ &= (xx'x'',xx'y''+xy'+y)\end{aligned}$$

ومنه القانون $\bigstar$ تجميعي.

$B-1$) لتكن (a,b) حيث من أجل كل $(x,y)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$:

$$(a,b)\bigstar(x,y)=(x,y)=(x,y)\bigstar(a,b)$$

هذه المساوات مكافئة لـ:

$$(ax,ay+b)=(x,y)=(xa,xb+y)\Leftrightarrow\begin{cases}ax=x\\ ay+b=y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=0\end{cases}$$

ومنه $(1,0)$ هو العنصر الحيادي.

$C-1$) ليكن $(x,y)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$ نبحث عن (x',y') حيث

$$(x,y)\bigstar(x',y')=(1,0)=(x',y')\bigstar(x,y)$$

هذه المساوات مكافئة لـ:

$$(xx',xy'+y)=(1,0)=(x'x,x'y+y')\Leftrightarrow\begin{cases}xx'=1\\x'y+y'=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x'=\frac{1}{x}\\y'=\frac{-y}{x}\end{cases}$$

العنصر النظير لـ (x,y) هو $\left(\frac{1}{x},\frac{-y}{x}\right)$. ومنه $(\mathbb{R}^*\times\mathbb{R},\bigstar)$ تشكل زمرة.

$D-1$) بما أن $(1,2)\bigstar(2,0)=(2,2)$ و $(2,0)\bigstar(1,2)=(2,4)$ فمن الواضح جدا أن الزمرة ليست تبديلية.

2) العنصر الحيادي لـ $(\mathbb{R}^*\times\mathbb{R},\bigstar)$ هو $(1,0)\in]0,+\infty[\times\mathbb{R}$.
ليكن $(x,y)\in]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ و $(x',y')\in]0,+\infty[\times\mathbb{R}$. ومنه

$$(x,y)\bigstar\left(\frac{1}{x'},\frac{-y'}{x'}\right)=\left(\frac{x}{x'},x\left(\frac{-y'}{x'}\right)+y\right)=\left(\frac{x}{x'},\frac{-y'x+x'y}{x'}\right)$$

بما أن $x>0$ فإن $\left(\frac{x}{x'},\frac{-y'x+x'y}{x'}\right)\in]0,+\infty[\times\mathbb{R}$. ومنه $(\in]0,+\infty[\times\mathbb{R},\bigstar)$ زمرة جزئية من $(\mathbb{R}^*\times\mathbb{R},\bigstar)$.

تمرين 3 : نزود المجموعة $A=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ بالقانونين المعرفين كما يلي:

$$(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')$$

و

$$(x,y)*(x',y')=(xx',xy'+x'y)$$

1) أثبت أن $(A,*)$ زمرة تبديلية.

2) أثبت أن

A) القانون $*$ تبديلي.

B) القانون $*$ تجميعي.

C) اوجد العنصر الحيادي بالنسبة للقانون $*$.

D) أثبت أن $(A,+,*)$ تشكل حلقة تبديلية.

الحــل

1)

$$(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')\in A$$

ومنه القانون داخلي.

$$\begin{aligned}(x,y)+[(x',y')+(x'',y'')] &= (x,y)+(x'+x'',y'+y'')\\ &= (x+(x'+x''),y+(y'+y''))\\ &= ((x+x')+x'',(y+y')+y'')\\ &= [(x,y)+(x',y')]+(x'',y'')\end{aligned}$$

ومنه القانون $+$ تجميعي.

$$\begin{aligned}(x,y)+(x',y') &= (x+x',y+y')=(x'+x,y'+y)\\ &= (x',y')+(x,y)\end{aligned}$$

ومنه القانون $+$ تبديلي.

ليكن (a,b) حيث $(x,y)+(a,b)=(x,y)$، من الواضح أن $(a,b)=(0,0)$ هو العنصر الوحيد الحيادي .

ليكن (x',y') حيث

$$(x,y)+(x',y')=(0,0)$$

هذا يكافئ

$$(x+x',y+y')=(0,0)\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x+x'=0\\ y+y'=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x'=-x\\ y'=-y\end{array}\right.$$

ومنه العنصر النظير (x,y) هو $(-x,-y)$. نستنتج أن $(A,+)$ زمرة تبديلية.

$(A-2$

$$(x,y)*(x',y') = (xx', xy'+x'y) = (x'x, x'y+xy') = (x',y')*(x,y)$$

ومنه $*$ تبديلي.

$(B-2$

$$\begin{aligned}[(x,y)*(x',y')]*(x'',y'') &= (xx', xy'+x'y)*(x'',y'') \\ &= (xx'x'', xx'y''+x''(xy'+x'y)) \\ &= (xx'x'', xx'y''+x''xy'+x''x'y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x,y)*[(x',y')*(x'',y'')] &= (x,y)*(x'x'', x'y''+x''y') \\ &= (xx'x'', x(x'y''+x''y')+x'x''y) \\ &= (xx'x'', xx'y''+xx''y'+x'x''y)\end{aligned}$$

ومنه

$$[(x,y)*(x',y')]*(x'',y'') = (x,y)*[(x',y')*(x'',y'')]$$

القانون $*$ تجميعي.

$(C-2$ ليكن (e,f) حيث من أجل كل $(x,y)\in A$،

$$(x,y)*(e,f) = (x,y)$$

e و f تحقق :

$$\begin{cases} xe = x \\ xf+ye = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e=1 \\ f=0 \end{cases}$$

$A \ni (1,0)$ العنصر الحيادي لـ A بالنسبة للقانون $*$.

$(D-2$ توزيعية الجداء على الجمع

$$\begin{aligned}(x,y)*[(x',y')+(x''+y'')] &= (x,y)*(x'+x'',y'+y'')\\ &= (x(x'+x''),x(y'+y'')+(x'+x'')y)\\ &= (xx'+xx'',xy'+xy''+x'y+x''y)\\ &= (xx'+xx'',xy'+x'y+xy''+x''y)\\ &= (xx',xy'+x'y)+(xx'',xy''+x''y)\\ &= (x,y)*(x',y')+(x,y)*(x'',y'')\end{aligned}$$

في الأخير $(A,+,*)$ حلقة تبدبلية.

تمرين 4 : أوجد معادلات الفضاءات الشعاعية التي تم إنشاؤها بواسطة الأشعة التالية:

- $u_1=(1,2,3)$،
- $u_1=(1,2,3)$ و $u_2=(-1,0,1)$،
- $u_1=(1,2,0)$، $u_2=(2,1,0)$ و $u_3=(1,0,1)$.

الحـــل

نضع F الفضاء الشعاعي الجزئي المولد بالشعاع u_1. ومنه

$$(x,y,z)\in F \iff \exists a\in\mathbb{R},\ \begin{cases} x &= a\\ y &= 2a\\ z &= 3a\end{cases} \iff \exists a\in\mathbb{R},\ \begin{cases} a &= x\\ y-2x &= 0\\ z-3x &= 0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y-2x &= 0\\ z-3x &= 0\end{cases}$$

لقد وجدنا بالفعل معادلات لـ F. نضع G الفضاء الشعاعي الجزئي المولد بالأشعة u_1 و u_2. ومنه:

$$(x,y,z)\in G \iff \exists(a,b)\in\mathbb{R}^2,\ \begin{cases} x &= a-b\\ y &= 2a\\ z &= 3a+b\end{cases}$$

$$\iff \exists(a,b)\in\mathbb{R}^2,\ \begin{cases} a &= y/2\\ b &= z-3y/2\\ 0 &= x-2y+z\end{cases}$$

$$\iff x-2y+z=0.$$

هذه المعادلة الأخيرة هي معادلة G. نضع H الفضاء الشعاعي الجزئي المولد بالأشعة u_1، u_2 و u_3. ومنه :

$$(x,y,z)\in H \iff \exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ \begin{cases} x &= a+2b+c\\ y &= 2a+b\\ z &= c\end{cases}$$

$$\iff \exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ \begin{cases} a+2b+c &= x\\ -3b-2c &= y-2x\\ c &= z\end{cases}$$

الجملة تقبل حلا مهما كانت قيم x، y و z. و بالتالي $H=\mathbb{R}^3$.

تمرين 5 : أوجد الأشعة المولدة للفضاءات الجزئية التالية من $\mathbb{R}^3$:

- $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x+2y-z=0\}$،
- $G=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x-y+z=0$ و $2x-y-z=0\}$.

الحـــل

- لدينا

$$(x,y,z) \in F \iff x=-2y+z \iff \begin{cases} x=-2y+z \\ y\in\mathbb{R} \\ z\in\mathbb{R} \end{cases}$$
$$\iff (x,y,z)=(-2y+z,y,z), y\in\mathbb{R}, z\in\mathbb{R},$$
$$= y(-2,1,0)+z(1,0,1), y\in\mathbb{R}, z\in\mathbb{R}.$$

نضع $u_1=(-2,1,0)$ و $u_2=(1,0,1)$ ومنه نجد $F=vect(u_1,u_2)$.

- لدينا

$$(x,y,z)\in G \iff \begin{cases} x-y+z &= 0 \\ 2x-y-z &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x-y+z &= 0 \\ y-3z &= 0 \end{cases}$$

$$\iff (x,y,z)=z\,(2,3,1)$$

ومنه نجد $G=vect(u)$ حيث $u=(2,3,1)$

تمرين 6 : ليكن في $\mathbb{R}^4$ الأشعة $v_1=(1,2,3,4)$ و $v_2=(1,-2,3,-4)$.

- هل نستطيع إيجاد x و y حيث $(x,1,y,1)\in Vect\{v_1,v_2\}$ ؟
- هل نستطيع إيجاد x و y حيث $(x,1,1,y)\in Vect\{v_1,v_2\}$ ؟

<u>الحـــل</u>

- لنا:

$$\begin{aligned}
&(x,1,y,1)\in Vect\{v_1,v_2\}\\
\Longleftrightarrow \exists\lambda,\mu\in\mathbb{R}\qquad &(x,1,y,1)=\lambda(1,2,3,4)+\mu(1,-2,3,-4)\\
\Longleftrightarrow \exists\lambda,\mu\in\mathbb{R}\qquad &(x,1,y,1)=(\lambda,2\lambda,3\lambda,4\lambda)+(\mu,-2\mu,3\mu,-4\mu)\\
\Longleftrightarrow \exists\lambda,\mu\in\mathbb{R}\qquad &(x,1,y,1)=(\lambda+\mu,2\lambda-2\mu,3\lambda+3\mu,4\lambda-4\mu)\\
\Longrightarrow \exists\lambda,\mu\in\mathbb{R}\qquad &1=2(\lambda-\mu)\ \text{ و }\ 1=4(\lambda-\mu)\\
\Longrightarrow \exists\lambda,\mu\in\mathbb{R}\qquad &\lambda-\mu=\frac{1}{2}\ \text{ و }\ \lambda-\mu=\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

وهو مستحيل (أيا كان x,y). لذلك لا يمكننا العثور على مثل x,y.

- بنفس المنطق :

$$\begin{aligned}
&(x,1,1,y)\in Vect\{v_1,v_2\}\\
iff\ \exists\lambda,\mu\in\mathbb{R}\qquad &(x,1,1,y)=(\lambda+\mu,2\lambda-2\mu,3\lambda+3\mu,4\lambda-4\mu)\\
\Longleftrightarrow \exists\lambda,\mu\in\mathbb{R}\qquad &\begin{cases} x &=\lambda+\mu\\ 1&=2\lambda-2\mu\\ 1&=3\lambda+3\mu\\ y&=4\lambda-4\mu\end{cases}\\
\Longleftrightarrow \exists\lambda,\mu\in\mathbb{R}\qquad &\begin{cases} \lambda &=\frac{5}{12}\\ \mu&=-\frac{1}{12}\\ x&=\frac{1}{3}\\ y&=2.\end{cases}
\end{aligned}$$

لذا فإن الشعاع الوحيد $(x,1,1,y)$ الذي يناسب $(\frac{1}{3},1,1,2)$.