Université Mohamed Khider, Biskra
Faculté des Sc. Exactes et Sc. de la Nature et la Vie
Département de Mathématiques
Master 1: 2021/2022

Solution de l'exercice 7 de la série N°**2**

Exercice 7. On pélève un échantillon de taille 64 d'une population normale d'espérance inconnue μ et de variance 1. Déterminer le test unifomément le plus puissant, au niveau de signification 0.10, pour les hypoyhèses

$$\begin{cases} H_0 : \mu \geq 0 \\ H_1 : \mu < 0 \end{cases}.$$

Tracer le graphe de sa fonction puissance.

* * * * * * * * * * * * * * * * * *

Solution. Nous allons appliquer la méthode du test de *rapport de vraisemblance croissant (monotone)*. Soit $\mu_1 > \mu_2$ et écrivons

$$\frac{L_{\mu_1}}{L_{\mu_2}} = \frac{\prod_{i=1}^{64} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x_i - \mu_1)^2\right\}}{\prod_{i=1}^{64} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x_i - \mu_2)^2\right\}}$$
$$= \exp\left(32\left(\mu_2^2 - \mu_1^2\right)\right) \times \exp\left\{(\mu_1 - \mu_2)\sum_{i=1}^{64} x_i\right\}.$$

On pose $t := \sum_{i=1}^{64} x_i$, $b := \mu_1 - \mu_2$ et $d := \exp\left(32\left(\mu_2^2 - \mu_1^2\right)\right) > 0$, ainsi on a une fonction $t \to \frac{L_{\mu_1}}{L_{\mu_2}}(t) = d \exp bt$, croissante en t, car $\mu_1 > \mu_2$ implique $b > 0$. Alors la loi de X possède un rapport de vraisemblance croissant en $t = \sum_{i=1}^{64} x_i$. Donc en appliquant la proposition 3 (voir le cours), on obtient le test upp:

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{i=1}^{64} x_i \leq c \\ 0 & \text{si } \sum_{i=1}^{64} x_i > c \end{cases}$$

avec $\mathbf{P}_{\mu=0}\left(\sum_{i=1}^{64} X_i \leq c\right) = \alpha = 0.1$. Celle-ci peut être réecrite comme suit:

$$\mathbf{P}_{\mu=0}\left(\frac{\sum_{i=1}^{64} X_i - 64 \times 0}{\sqrt{64}} \leq \frac{c - 64 \times 0}{\sqrt{64}}\right) = \alpha = 0.1.$$

En d'autres terms $\mathbf{P}(Z \leq c/8) = 0.1$, ce qui est equvalent à $c = 8\Phi^{-1}(0.1) = -8\Phi^{-1}(0.9)$. De la table statistique des quantiles de la loi gauss on a $\Phi^{-1}(0.9) = 1.28$, donc $c = -10.24$. La forme explicite du test upp est

$$\delta(x_1, ..., x_{64}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{i=1}^{64} x_i \leq -10.24 \\ 0 & \text{si } \sum_{i=1}^{64} x_i > -10.24 \end{cases}$$

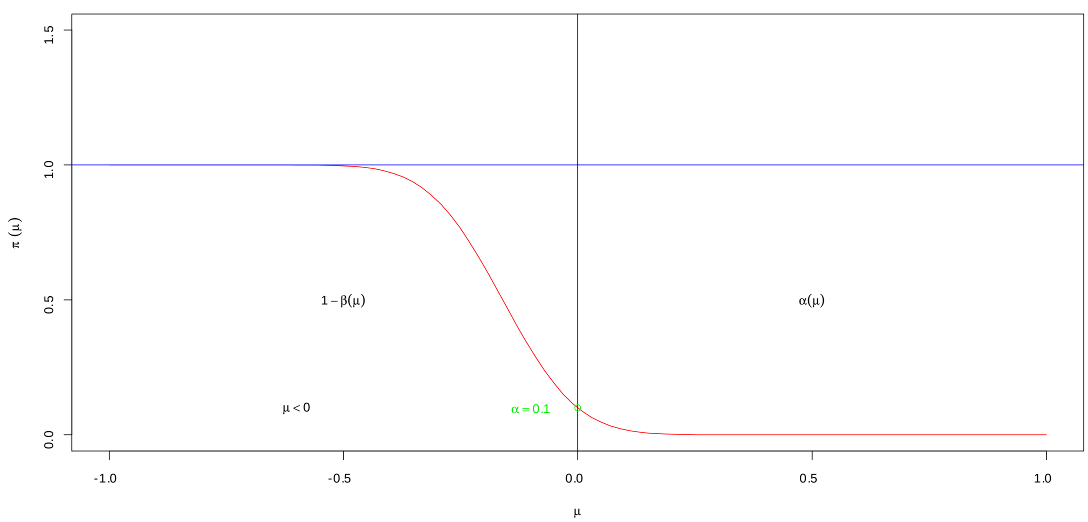
La fonction puissance du test est

$$\pi(\mu) = \mathbf{P}_\mu \left(\sum_{i=1}^{64} X_i \leq -10.24 \right), \ \mu \in \mathbb{R}.$$

En d'autres termes

$$\begin{aligned} \pi(\mu) &= \mathbf{P}_\mu \left(\frac{\sum_{i=1}^{64} X_i - 64\mu}{8} \leq \frac{-10.24 - 64\mu}{8} \right). \\ &= \mathbf{P}_\mu \left(Z \leq \frac{-10.24 - 64\mu}{8} \right) = 1 - \Phi(8\mu + 1.28), \ \mu \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Le graphe de la fonction puissance est donné par la figure suivante:



Voici le programme en langage R qui réalise ce graphe:

```
f<-function(x){1-pnorm(8*x+1.28)}
x<-seq(-1,1,length=100)
plot(x,f(x),type="l",col="red",ylim=c(0,1.5),
xlab=expression(mu),ylab=expression(pi~(mu)))
abline(h=1,col="blue")
abline(v=0)
points(0,0.1,col="green")
text(-0.1,0.1,expression(alpha==0.1),col="green2")
text(-0.5,0.5,expression(1-beta(mu)))
text(0.5,0.5,expression(alpha(mu)))
text(-0.6,0.1,expression(mu<0))
text(0.5,0.1,expression(mu>=0))
```