Université Mohamed Khider, Biskra
Faculté des Sc. Exactes et Sc. de la Nature et la Vie
Département de Mathématiques
Master 1: 2021/2022
Module: Tests Statistiques

Corrigé-type de l'interrogation N°**1**

Exercice 1 (07pts)

Soit X une population normale d'espérance inconnue μ et de variance 2. On prélève un échantillon de taille 18 pour réaliser le test

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 5 \\ H_1 : \mu < 5 \end{cases}.$$

1. Quel type de test s'agit-il: unilatéral ou bilatéral? $(0.5pt)$
2. Construire le test uniformément le plus puissant, δ, au niveau $\alpha = 0.05. (3pts)$
3. Déterminer la fonction puissance de δ, notée $\pi(\mu). (2pts)$
4. Tracer le graphe de la fonction $\pi(\mu). (1pt)$
5. Si $\mu = 7$, calculer le risque de deuxième espèce. $(0.5pt)$

* * * * * * * * * * * * * * * * * *

Solution.

1) Il s'agit d'un test unilatéral à gauche.

Pour la deuxième question, nous avons deux méthodes:

- Méthode de rapport de vraisemblance croissant (monotone)
- Application du Lemme de Neymann-Pearson

2) **Première méthode**: Nous allons appliquer la méthode du test de *rapport de vraisemblance croissant (monotone)***.** Soit $\mu_1 > \mu_2$ et écrivons

$$\frac{L_{\mu_1}}{L_{\mu_2}} = \frac{\prod_{i=1}^{18} \frac{1}{\sqrt{2\pi \times 2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i-\mu_1}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}}{\prod_{i=1}^{18} \frac{1}{\sqrt{2\pi \times 2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i-\mu_2}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}}$$
$$= \exp\left(\frac{9}{2}\left(\mu_2^2 - \mu_1^2\right)\right) \times \exp\left\{\frac{1}{2}(\mu_1 - \mu_2)\sum_{i=1}^{18} x_i\right\}.$$

On pose $t := \sum_{i=1}^{18} x_i$, $b := (\mu_1 - \mu_2)/2$ et $d := \exp\left(\frac{9}{2}\left(\mu_2^2 - \mu_1^2\right)\right) > 0$, ainsi on a une fonction $t \to \frac{L_{\mu_1}}{L_{\mu_2}}(t) = d \exp bt$, croissante en t, car $\mu_1 > \mu_2$ implique $b > 0$. Alors la loi de X possède un rapport de vraisemblance croissant en $t = \sum_{i=1}^{18} x_i$. Donc en appliquant la proposition 3 et la remarque 3 du cours, on obtient le test upp:

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{i=1}^{18} x_i \leq c \\ 0 & \text{si } \sum_{i=1}^{18} x_i > c \end{cases}$$

avec $\mathbf{P}_{\mu=5}\left(\sum_{i=1}^{18} X_i \leq c\right) = \alpha = 0.05$. Celle-ci peut être réécrite comme suit:

$$\mathbf{P}_{\mu=5}\left(\frac{\sum_{i=1}^{18} X_i - 18\times 5}{\sqrt{18\times 2}} \leq \frac{c - 18\times 5}{\sqrt{18\times 2}}\right) = \alpha = 0.05.$$

En d'autres termes $\mathbf{P}\left(Z \leq c/6 - 15\right) = 0.05$, ce qui implique que

$$c/6 - 15 = \Phi^{-1}(0.05) = -\Phi^{-1}(1-0.05) = -\Phi^{-1}(0.95).$$

Daprès la table statistique des quantiles de la loi de Gauss on a $\Phi^{-1}(0.95) = 1.64$, donc $c/6 - 15 = -1.64$, ainsi $c = 80.16$. La forme explicite de la fonction test upp est

$$\delta(x_1, ..., x_{18}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{i=1}^{18} x_i \leq 80.16 \\ 0 & \text{si } \sum_{i=1}^{18} x_i > 80.16 \end{cases}.$$

Ceci peux être réécrit, en termes de la moyenne $\overline{x} = \frac{1}{18}\sum_{i=1}^{18} x_i$, comme suit:

$$\delta(x_1, ..., x_{18}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \overline{x} \leq \frac{80.16}{18} = 4.45 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Remarque: utiliser $\sum_{i=1}^{18} x_i$ ou $\overline{x}$ donne le même résultat.

2) **Deuxième méthode:** Nous allons appliquer le lemme de Neyman-Pearson. La région critique de ce test est définie par

$$W = \left\{(x_1, ..., x_{18}) \mid L_1/L_0 \geq k\right\},$$

ou

$$\frac{L_1}{L_0} = \frac{\prod_{i=1}^{18} \frac{1}{\sqrt{2\pi\times 2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i - \mu}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}}{\prod_{i=1}^{18} \frac{1}{\sqrt{2\pi\times 2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i - 5}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}}, \text{ pour } \mu < 5.$$

Après simplification on trouve

$$\frac{L_1}{L_0} = \exp\left(9\left(25 - \mu^2\right)/2\right) \times \exp\left\{\frac{1}{2}(\mu - 5)\sum_{i=1}^{18} x_i\right\},$$

ce qui implique que

$$W = \left\{(x_1, ..., x_{18}) \mid \exp\left(9\left(25 - \mu^2\right)/2\right) \times \exp\left\{\frac{1}{2}(\mu - 5)\sum_{i=1}^{18} x_i\right\} \geq k\right\}.$$

Posons $\exp\left(9\left(25 - \mu^2\right)/2\right) = c_1 \neq 0$, donc la dernière inégalité devient

$$\frac{1}{2}(\mu - 5)\sum_{i=1}^{18} x_i \geq \log(k/c_1).$$

Attention: Il est important de noter que $\mu < 5$ ce qui implique $\mu - 5 < 0$, donc

$$\sum_{i=1}^{18} x_i \leq \frac{2\log(k/c_1)}{\mu - 5} := c.$$

Ainsi le test uniformément le plus puissant vaut:

$$\delta = \begin{cases} 1 \quad \text{si} \sum_{i=1}^{18} x_i \leq c \\ 0 \quad \text{si} \sum_{i=1}^{18} x_i > c \end{cases},$$

et ceci coïncide avec le résultat de la première méthode.
3) La fonction puissance du test est

$$\pi(\mu) = \mathbf{P}_\mu \left(\sum_{i=1}^{18} X_i \leq 80.16 \right) = \mathbf{P}_\mu \left(\overline{X} \leq 4.45 \right), \ \mu \leq 5,$$

En d'autres termes

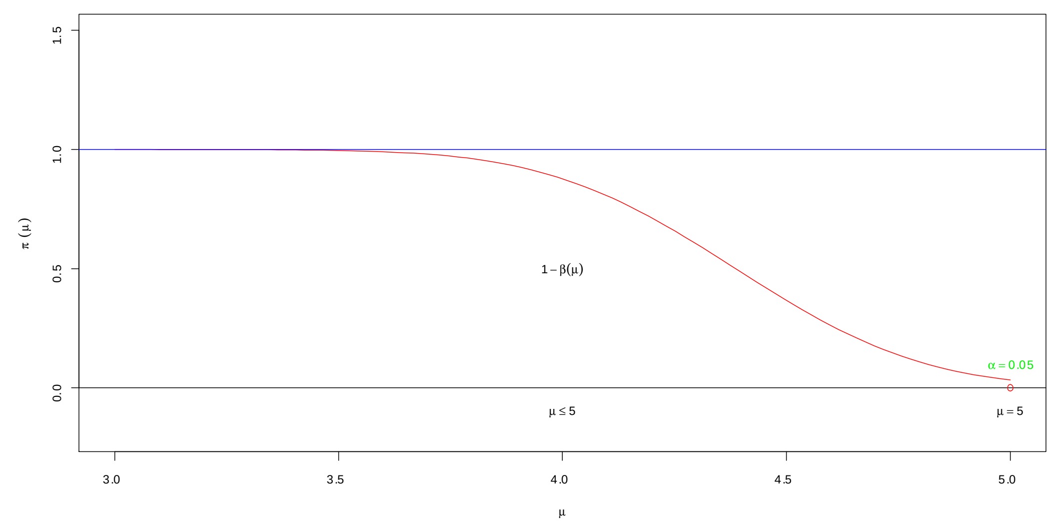
$$\begin{aligned} \pi(\mu) &= \mathbf{P}_\mu \left(\frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{2/18}} \leq \frac{4.45 - \mu}{\sqrt{2/18}} \right) \\ &= \mathbf{P}_\mu \left(Z \leq \frac{4.45 - \mu}{1/3} \right) = \Phi(13.35 - 3\mu) = 1 - \Phi(3\mu - 13.35), \ \mu \leq 5. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$, on écrit

$$\pi(\mu) = 1 - \Phi(3\mu - 13.35), \ \mu \leq 5.$$

On peut vérifier que $\pi(5) = 0.049 \sim 0.05 = \alpha$.

4) Le graphe de la fonction puissance est donné par la figure suivante:



5) La valeur $\mu = 7$ n'appartient pas au domaine $\mu \leq 5$ du test, donc celle-ci est exclue de l'étude.