Université Mohamed Khider, Biskra
Faculté des Sc. Exactes et Sc. de la Nature et la Vie
Département de Mathématiques
Master 1: 2021/2022
Module: tests statistiques

Solution de l'exercice 2 de la Série N°**3**

Exercice 2.

On suppose que le poids (en grammes) d'un paquet de café est une variable aléatoire normale de moyenne μ et de variance σ^2 (toutes les deux inconnues). Pour faire des tests, au niveau de signification 10%, sur ces deux paramètres, on dispose de l'échantillon suivant :

480 502 484 500 504 503 495 500 501 481

Que décidez-vous pour chacun des problèmes suivants :

$$\begin{cases} H_0: & \mu = 500 \\ H_1: & \mu \neq 500 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} H_0: & \sigma^2 = 25 \\ H_1: & \sigma^2 > 25 \end{cases}$$

****

Solution. Considérons tout d'abord le test bilatérale de la moyenne

$$\begin{cases} H_0: & \mu = 500 \\ H_1: & \mu \neq 500 \end{cases},$$

avec $n = 10$, $\alpha = 0.1$ et σ^2 est inconnue. D'après le cours, la région critique de ce test est donnée par

$$W = \left\{ (x_1, ..., x_{10}) \in \mathbb{R}_+^{10} \mid \frac{|\overline{x} - 500|}{\widetilde{s}/\sqrt{10-1}} \geq k \right\},$$

où k est la solution de l'équation $\mathbf{P}\left(\left|T_{(10-1)}\right| \geq k\right) = \alpha = 0.1$, avec $T_{(10-1)} = T_9$ est la variable aléatoire de Student à 9 degré de liberté. On rappelle que $\overline{x} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i$ et $\widetilde{s}^2 = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}(x_i - \overline{x})^2$ désignent la moyenne et la variance empiriques respectivement. De la table statistique de la loi de Student on obtient $k = 1.8331$, ainsi

$$W = \left\{ (x_1, ..., x_{10}) \in \mathbb{R}_+^{10} \mid \frac{|\overline{x} - 500|}{\widetilde{s}/3} \geq 1.8331 \right\}.$$

Le fonction statistique test correspondante est

$$\delta(x_1, ..., x_{10}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{|\overline{x}-500|}{\widetilde{s}/3} \geq 1.8331 \\ 0 & \text{si } \frac{|\overline{x}-500|}{\widetilde{s}/3} < 1.8331 \end{cases}.$$

La moyenne et l'écart-type des données observées sont $\overline{x}_{obs} = 495$ et $\widetilde{s}_{obs} \simeq 9$ respectivement, ainsi

$$\frac{|\overline{x}_{obs} - 500|}{\widetilde{s}_{obs}/3} = \frac{|495 - 500|}{9/3} = 1.6667 < 1.8331.$$

Donc on accepte l'hypothèse H_0 disant que le poids des paquets de café est de 500 grammes.

Traitons maintenant le test de la variance

$$\begin{cases} H_0: & \sigma^2 = 25 \\ H_1: & \sigma^2 > 25 \end{cases},$$

avec la moyenne μ inconnue. Nous avons aussi annoncé au cours la région critique de ce test est donnée par

$$W = \left\{ (x_1, ..., x_{10}) \in \mathbb{R}_+^{10} \mid \frac{10v^2}{25} \geq k \right\},$$

où $v^2 = \widetilde{s}^2 = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}(x_i - \overline{x})^2$, et k est la solution de l'équation $\mathbf{P}\left(\chi_9^2 \geq k\right) = 0.1$, où χ_9^2 désigne la variable de Chi-deux (ou de Pearson) à 9 dégres de liberté. De la table statistique on obtient $k = 14.683$, ainsi

$$\begin{aligned} W &= \left\{(x_1, ..., x_{10}) \in \mathbb{R}_+^{10} \mid \frac{10v^2}{25} \geq 14.683\right\} \\ &= \left\{(x_1, ..., x_{10}) \in \mathbb{R}_+^{10} \mid v^2 \geq 36.709\right\}. \end{aligned}$$

La fonction statistique test correspondante est

$$\delta(x_1, ..., x_{10}) = \begin{cases} 1 & \text{si } v^2 \geq 36.709 \\ 0 & \text{si } v^2 < 36.709 \end{cases}.$$

Comme $v_{obs}^2 = \widetilde{s}_{obs}^2 \simeq 9^2 = 81 > 36.709$, alors on rejette H_0; c'est à dire $\sigma^2 > 25$.