Chapitre IV : Calcul de valeurs et de vecteurs propres

Dans ce chapitre, nous étudions numériquement les problèmes liés au calcul des valeurs et des vecteurs propres

IV.1. Quelques notions sur les valeurs et les vecteurs propres

Soit A une matrice carrée réelle (ou complexe) de dimension $(n\times n)$. Le problème consiste à calculer $\lambda \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) et $v \in \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$), $v \neq 0$; tel que : $\boxed{Av = \lambda v}$ ---- (1)

Si cette équation est vérifiée, λ s'appelle valeur propre de la matrice A et v est le vecteur propre correspondant.

l'équation (1) est équivalente au système $(A-\lambda I_n)v=0$ qui possède une solution unique si et seulement si :

$$P_n(\lambda) = \det(A-\lambda I_n) = 0.$$

les valeurs propres de A sont les racines de polynôme caractéristique $P_n(\lambda)$.

IV.2. Méthode de la puissance :

Soit A une matrice de dimension $(n\times n)$; $\lambda_1, \lambda_2, ---, \lambda_n$ ses valeurs propres vérifient : $|\lambda_1| > |\lambda_2| > --- > |\lambda_n|$ et $V_1, V_2, ---, V_n$ ses vecteurs propres sont linéairement indépendant.

Considérons un vecteur initial $y^{(0)}$; tel que :

$$y^{(0)}=\sum_{i=1}^{n} c_i V_i \ / \ c_i \neq 0$$

$$y^{(1)}=A y^{(0)}=A\left(\sum_{i=1}^{n} c_i V_i\right)=\sum_{i=1}^{n} c_i A V_i=\sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i V_i$$

$$y^{(2)}=A y^{(1)}=A^2 y^{(0)}=A\left(\sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i V_i\right)=\sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i A V_i=\sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i^2 V_i$$

De la même manière, on obtient :

$$y^{(k)}=A y^{(k-1)}=A^{(k)} y^{(0)}=\sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i^k V_i=c_1 \lambda_1^k V_1+c_2 \lambda_2^k V_2+\dots+c_n \lambda_n^k V_n$$

$$=\lambda_1^k\Big(c_1 V_1+\underbrace{c_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k V_2+\dots+c_n\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k V_n}_{\varepsilon(k)}\Big)$$

si k est suffisamment grand ($k \to +\infty$), on néglige $\varepsilon(k)$ ($\varepsilon(k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$). on trouve : $y^{(k)}=\lambda_1^k c_1 V_1$ et $y^{(k+1)}=\lambda_1^{k+1} c_1 V_1$

Alors : $$\lambda_1=\lim_{k\to+\infty}\frac{\left(A^{(k+1)} y^{(0)}\right)_r}{\left(A^{(k)} y^{(0)}\right)_r}=\lim_{k\to+\infty}\frac{\left(y^{(k+1)}\right)_r}{\left(y^{(k)}\right)_r} \ ; \ r=1,2,\dots,n$$

r : la $r^{\text{ème}}$ composante de $y^{(k)}$ et $y^{(k+1)}$

Pratiquement, le rapport $(y^{(k+1)})_r / (y^{(k)})_r$ peuvent être déterminer avec l'une quelconque des composantes de $y^{(k+1)}$ et la composante correspondante de $y^{(k)}$. De plus, on préfère ramener à 1 la valeur de l'une des composantes de ces vecteurs.

Chapitre V : Généralités sur l'analyse numérique et le calcul scientifique.

V.1. Motivations :

Il est important de se préoccuper de la manière de présenter et manipuler les nombres dans une machine. Les nombres entiers ou réels ne peuvent pas être représentés exactement (le système est discret) il en découle que tous les calculs sont entachés d'erreurs.

Dans la mémoire d'un ordinateur, les nombres réels sont présentés en notation flottante. Cette notation a été introduite pour garder une erreur à peut près constante.

V.2. Arithmétique en virgule flottante et erreurs d'arrondi :

V.2.1. Représentation des nombres en machine :

En notation flottante, les nombres réels sont représentés de façon approximative en mémoire avec la convention standarisée de la forme :

$$x = \pm 0, d_1 d_2 d_3 \dots \times b^{e} = \pm m(x) \times b^{e(x)} \text{ ; où}$$

- b : est la base du système numérique utilisé.
- $m(x)$ est la mantisse : une suite d'entiers $d_1, d_2, d_3, \dots$ avec : $d_1 \neq 0$ et $0 \leq d_i \leq b-1$.
- $e(x)$ est l'exposant : un entier relatif.

La représentation précedente s'appelle : la représentation des nombres réels en virgule flottante.

Pour définir les différents type d'arrondissement, on introduit la définition de l'ensemble machine.

On note par E_t l'ensemble suivant :

$$x \in E_t \iff x = 0 \text{ ou } x = \pm 0, d_1 d_2 \cdots d_t \times 10^e ;$$

$$\text{où } d_1, d_2, \ldots, d_t \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\} \text{ et } d_1 \neq 0 .$$

- **Arrondi par défaut** : On a : $x = \pm\, 0, d_1 d_2 \cdots d_t d_{t+1} \cdots \times 10^e$;

$$\begin{aligned} Rd_p : \mathbb{R} &\longrightarrow E_t \\ x &\longmapsto Rd_p(x) = \pm\, 0, d_1 d_2 \cdots d_t \times 10^e . \end{aligned}$$

- **Arrondi par excés** : $\begin{aligned} Rd_p^+ : \mathbb{R} &\longrightarrow E_t \\ x &\longmapsto Rd_p^+(x) = 0, d_1 d_2 \cdots (d_t + 1) \times 10^e . \end{aligned}$

Les deux types d'arrondissement ne repond pas a notre besoin de précision dans les calculs scientifiques.

- **Arrondi pair** : On appelle arrondi pair l'application "fl" ; Cette application réalise la minimalité.

$$\begin{aligned} fl : \mathbb{R} &\longrightarrow E_t \\ x &\longmapsto fl(x) ; \end{aligned}$$

$$\text{où : } fl(x) = \begin{cases} Rd_p(x) & \text{si } 0 \leq d_{t+1} \leq 4 \\ Rd_p^+(x) & \text{si } 6 \leq d_{t+1} \leq 9 . \end{cases}$$

Le cas où : $d_{t+1} = 5$: ici, on distingue deux cas :

- Si $(\exists j > t+1)$; tel que : $d_j \neq 0$: $fl(x) = Rd_p^{+}(x)$.
- Si $(\forall j > t+1)$; tel que : $d_j = 0$: $fl(x) = \begin{cases} Rd_p(x) \text{ si } d_t \text{ est pair} \\ Rd_p^{+}(x) \text{ si } d_t \text{ est impair} \end{cases}$

V.2.2. Opérations machines (Opérations floHantes)

Il est important aussi de Connaitre la manière de manipuler les opérations sur une machine. Toutes opération élementaire $(+, -, \times, /, \dots)$ est en général entachée d'erreurs ; C'est-à-dire : pour effectuer une opération quelConques sur deux nombres réels, on effectue une opérations sur leurs représentations floHantes et on prend ensuite la représentation flottante du résultat.

$$x \oplus y = fl(fl(x) + fl(y))$$
$$x \ominus y = fl(fl(x) - fl(y))$$
$$x \otimes y = fl(fl(x) \times fl(y))$$
$$x \oslash y = fl(fl(x) / fl(y))$$

V.2.3. Erreurs d'arrondi :

L'erreur d'arrondi est l'ecart entre le réel de départ et le flottant vers lequel il est Converti lors de l'opération d'arrondi. En général, on distingue deux type d'erreurs d'arrondi :

- Erreur absolue : Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$|x - fl(x)| \leq 5 \times 10^{-t-1} \times 10^{e}.$$

• Erreur relative : Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\frac{|x - fl(x)|}{|x|} \leqslant u ;$$

où $u = 5 \times 10^{-t}$: est l'unité d'erreur d'arrondi

Si on pose :

$$\alpha = \frac{x - fl(x)}{x} \Rightarrow \alpha x + x = fl(x) ;$$

donc : $f(x) = x(1+\alpha) ; |\alpha| \leqslant u$.